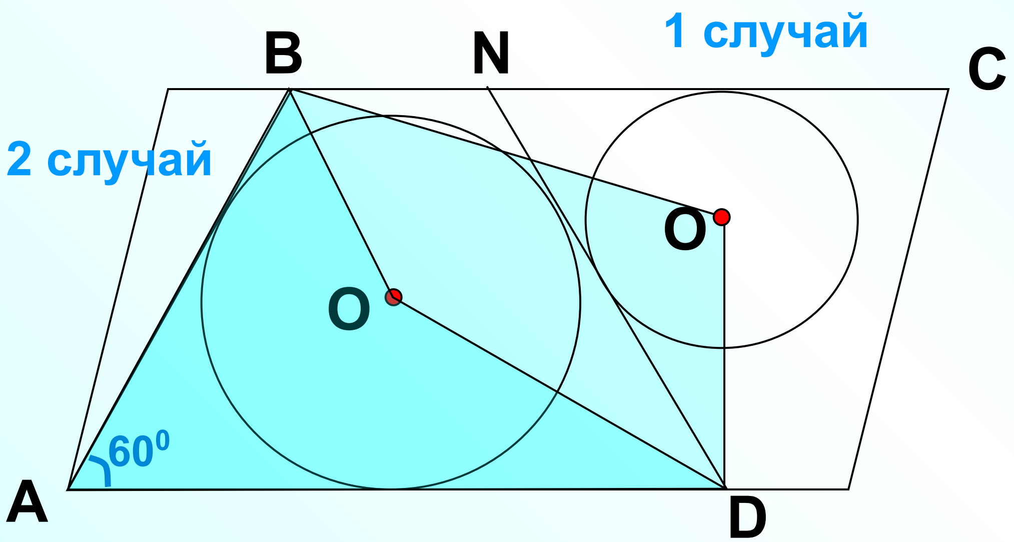
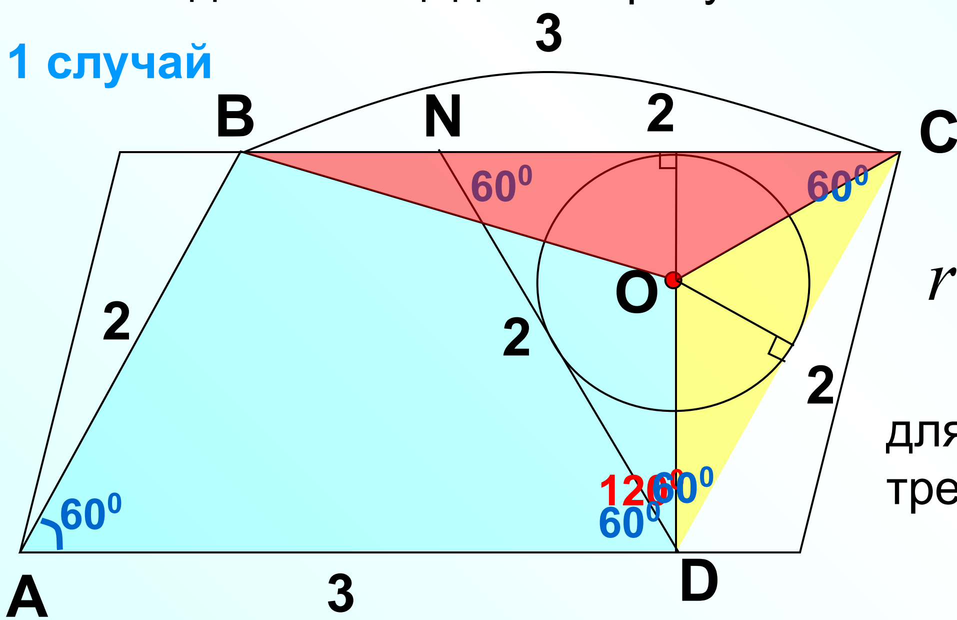
С4 Дан параллелограмм ABCD, AB = 2, BC = 3, $\angle A=60^0$. Окружность с центром в точке О касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырехугольника ABOD.



C4 Дан параллелограмм ABCD, AB = 2, BC = 3, $\angle A=60^0$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырехугольника ABOD.

1 случай



$$S_{ABOD} = S_{ABCD} - S_{BOC} - S_{COD}$$

$$r = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

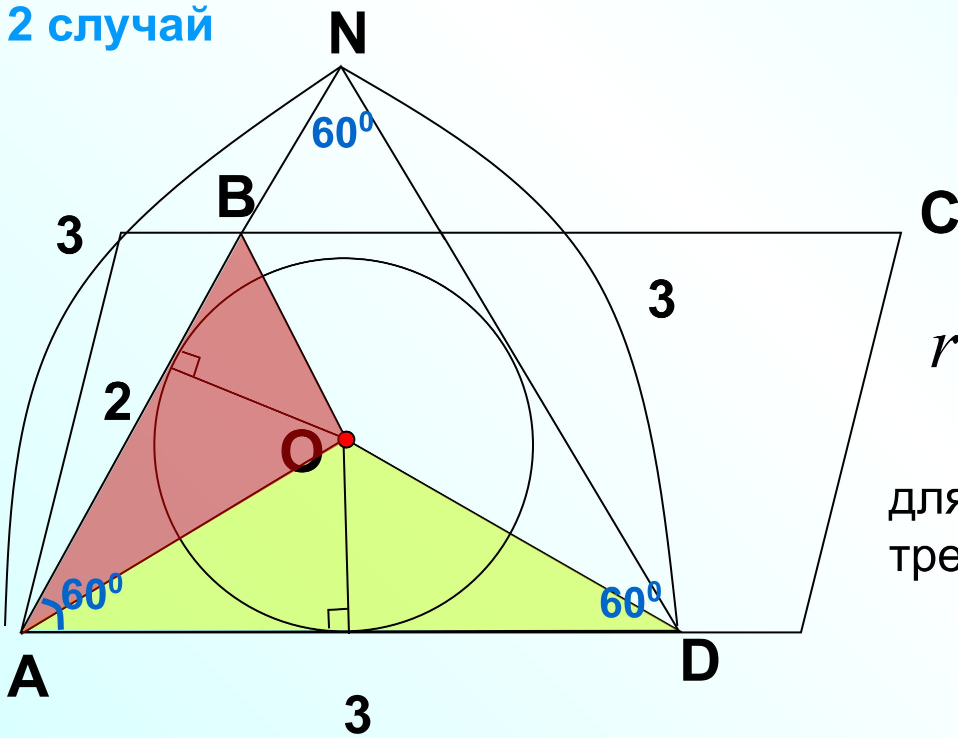
для равностороннего треугольника DNC

$$S_{ABOD} = \underbrace{2\cdot 3\cdot \sin 60^0}_{S_{ABCD}} - \underbrace{\frac{1}{2}\cdot 3\cdot \frac{\sqrt{3}}{3}}_{S_{BOC}} - \underbrace{\frac{1}{2}\cdot 2\cdot \frac{\sqrt{3}}{3}}_{S_{COD}}$$

$$\frac{13\sqrt{3}}{6}$$

С4 Дан параллелограмм ABCD, AB = 2, BC = 3, $\angle A = 60^0$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырехугольника ABOD.

2 случай



$$S_{ABOD} = S_{AOD} + S_{AOB}$$

$$r = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

для равностороннего треугольника ADN

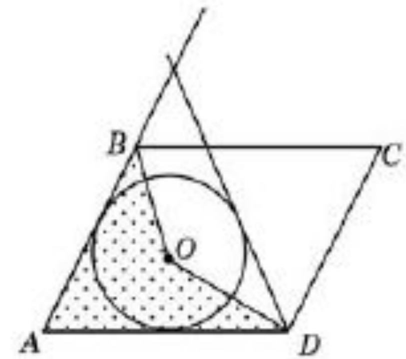
$$S_{ABOD} = \overbrace{\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}^{S_{AOD}} + \overbrace{\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}^{S_{AOB}}$$

$$\frac{5\sqrt{3}}{4}$$

C4 Дан параллелограмм $ABCD$, $AB = 3$, $BC = 7$, $\angle A = 60^\circ$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырёхугольника $ABOD$.

Решение.

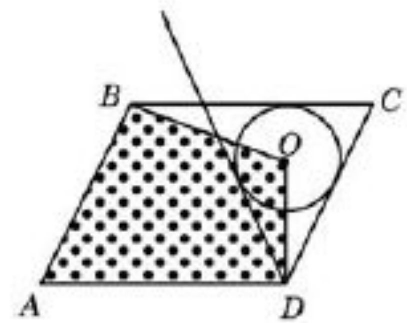
Окружностей две: каждая из них – вписанная в равносторонний треугольник. Эти треугольники имеют стороны равные 7 и 3 соответственно.



Для треугольника со стороной 7 радиус вписанной окружности равен $r = \dfrac{7\sqrt{3}}{6}$.

Найдем площадь невыпуклого четырехугольника как сумму площадей треугольников AOB и AOD:

$$S_{ABOD} = \frac{1}{2}AB \cdot r + \frac{1}{2}AD \cdot r = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{7\sqrt{3}}{6} = \frac{35\sqrt{3}}{6}.$$



Для треугольника со стороной 3 радиус вписанной окружности равен $r = \dfrac{3\sqrt{3}}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Чтобы найти площадь четырехугольника $ABOD$, вычтем из площади параллелограмма площади треугольников BOC и DOC:

$$S_{ABOD} = AB \cdot AD \cdot \sin 60^\circ - \frac{1}{2}BC \cdot r - \frac{1}{2}CD \cdot r = \frac{21\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}.$$

Ответ: $\dfrac{35\sqrt{3}}{6}$, $8\sqrt{3}$.