



# Лекция 5. Транспортные задачи и задачи о назначениях

Содержание лекции:

1. Формулировка транспортной задачи
2. Метод потенциалов
3. Особенности решения открытой транспортной задачи
4. Задача о назначениях



# Литература

- *Экономико-математические методы и прикладные модели: Учеб. пособие для вузов / Под ред. В.В. Федосеева. — 2-е изд. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. — раздел 3.2.*
- *Фомин Г.П. Математические методы и модели в коммерческой деятельности: Учебник. — 2-е изд. М.: Финансы и статистика, 2005. — раздел 2.2.6.*
- *Вентцель Е.С. Исследование операций: Задачи, принципы, методология. М.: Высшая школа, 2001.*



# 5.1. Формулировка транспортной задачи

- Дано:
  - ◆ Множество  $I$ , включающее  $m$  пунктов отправления груза, имеющегося в количествах  $a_i$  ( $i=1\dots m$ )
  - ◆ Множество  $J$ , включающее  $n$  пунктов потребления, в каждом из которых имеется спрос на данный груз в количестве  $b_j$  ( $j=1\dots n$ )
  - ◆ Затраты  $c_{ij}$  на перевозку единицы груза между пунктами  $i$  и  $j$
- Найти:
  - ◆ План перевозок  $X = (x_{ij})$ , согласно которому груз из пунктов отправления перевозится в пункты потребления с минимальными издержками, а спрос удовлетворяется полностью

Обычно предполагается, что общий размер запасов груза равен спросу (*закрытая транспортная задача*).

При этом условии задача всегда имеет оптимальное решение.



# 5.1.

## Математическая запись

Целевая функция:

$$\min_{x_{ij}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

Условия удовлетворения спроса:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1 \dots n$$

Условия полного вывоза груза:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1 \dots m$$

Условия неотрицательности:

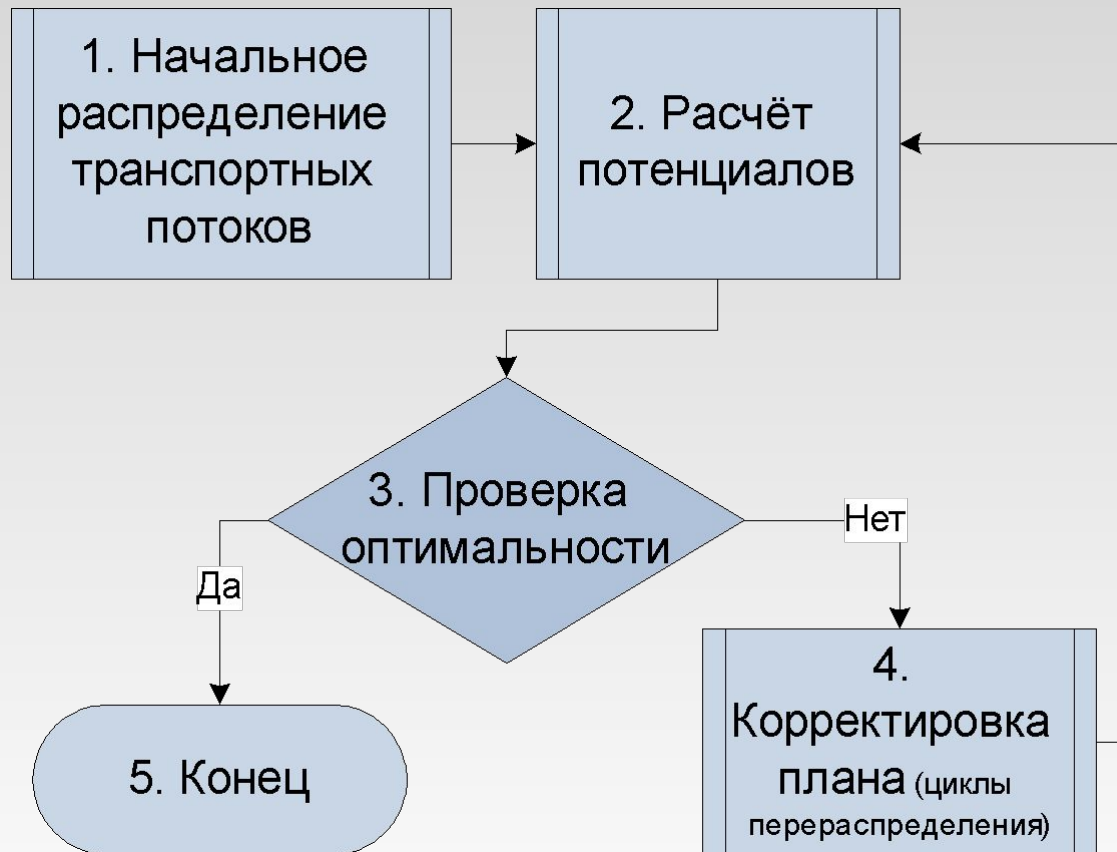
$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1 \dots m, \quad j = 1 \dots n$$




# 5.1

- Получившаяся задача имеет форму задачи линейного программирования
- Её можно решить симплексным методом
- Однако есть более эффективные способы её решения

## 5.2. Метод потенциалов





## 5.2.1. Начальное распределение транспортных потоков

- Теоретическая основа
  - ◆ Ранг матрицы ограничений транспортной задачи равен  $n+m-1$
  - ⇒ В оптимальном плане все переменные, кроме  $n+m-1$ , будут свободными
    - ◆ Следовательно, равными нулю
- Метод северо-западного угла
  - ◆ Не использует данных о затратах
  - ◆ Обычно приводит к распределению, требующему много корректировок
    - ◆ Зато самый простой 😊



# 5.2.1

Ещё не вывезенный остаток

Ещё не удовлетворённый спрос

1.  $i=1, j=1$
2.  $x_{ij} = \min(a'_i, b'_j)$
3. Если  $x_{ij} = a'_i$ , то  $i \square i+1$ ;  
иначе  $j \square j+1$
4. Если  $i > m$ , то процесс завершён;  
иначе переход к 2.

~~$i=1$~~     ~~$j=1$~~

	Потребители			
	Запас	<del>1</del>	<del>2</del>	3
Потребности		60	40	20
<del>Поставщик 1</del>	30	30		
<del>Поставщик 2</del>	40	<del>30</del>	<del>10</del>	
Поставщик 3	50		<del>30</del>	<del>20</del>

## Начальное распределение получено!





## 5.2.2. Расчёт потенциалов

### ■ Теоретическая основа

- ◆ Потенциалы приписываются поставщикам ( $u_i$ ) и потребителям ( $v_j$ ).
- ◆ Уравнение потенциалов

$$c_{ij} = v_j - u_i$$

⇒ Расчёт потенциалов:

- ◆ подобрать такие  $v_j$  и  $u_i$ , чтобы уравнение потенциалов выполнялось для всех **базисных** клеток (перевозок)



# 5.2.2

- 1.  $i = 1; u_i = 0$
- 2. В строке  $i$  находим множество столбцов  $J'$  с ненулевыми перевозками и нерассчитанными потенциалами
- 3. Для всех  $j \in J'$  выполняем  $v_j \square u_i + c_{ij}$
- 4. В столбце  $j$  находим множество строк  $I'$  с ненулевыми перевозками и нерассчитанными потенциалами.
- 5. Для всех  $i \in I'$  выполняем  $u_i \square v_j - c_{ij}$
- 6. Выполняем (2)
- Процесс закончен, когда  $I'$  или  $J'$  оказывается пустым

	Потребители				$u_i$
	Запас	1	2	3	
Потребности		60	40	20	
Поставщик 1	30	<del>30</del> <sub>6</sub>	9	7	0
Поставщик 2	40	<del>20</del> <sub>8</sub>	<del>10</del> <sub>8</sub>	5	-2
Поставщик 3	50	4	<del>30</del> <sub>6</sub>	<del>20</del> <sub>12</sub>	0
$v_j$		6	6	12	

## Расчёт потенциалов завершён!



## 5.2.3. Проверка оптимальности

### ■ Теоретическая основа

- ◆ По используемым перевозкам  $c_{ij}$  разница в «ценах» (потенциалах) у потребителя  $j$  и у поставщика  $i$  равна стоимости перевозки
  - ◆ это следует из способа расчёта потенциалов
- ◆ Неиспользуемая перевозка  $c_{ij}$  выгодна, если разница в «ценах» (потенциалах) у потребителя  $j$  и у поставщика  $i$  больше стоимости перевозки

### ⇒ Условие оптимальности

- ◆ Разница в потенциалах потребителя и поставщика *по всем неиспользуемым перевозкам* не больше стоимости перевозки



# 5.2.3

- Условие оптимальности
  - ◆ Разница в потенциалах потребителя и поставщика *по всем неиспользуемым перевозкам* не больше стоимости перевозки
- В нашем примере выполняется не по всем неисп. перевозкам
  - ◆ Выполняется только для 1  2.
  - ◆ Значит, требуется переход к п.4. – корректировка плана

	Потребители				
	Запас	1	2	3	$u_i$
Потребности		60	40	20	
Поставщик 1	30	30 <sub>6</sub>	-3 <sub>9</sub>	5 <sub>7</sub>	0
Поставщик 2	40	30 <sub>8</sub>	10 <sub>8</sub>	9 <sub>5</sub>	-2
Поставщик 3	50	2 <sub>4</sub>	30 <sub>6</sub>	20 <sub>12</sub>	0
$v_j$		6	6	12	

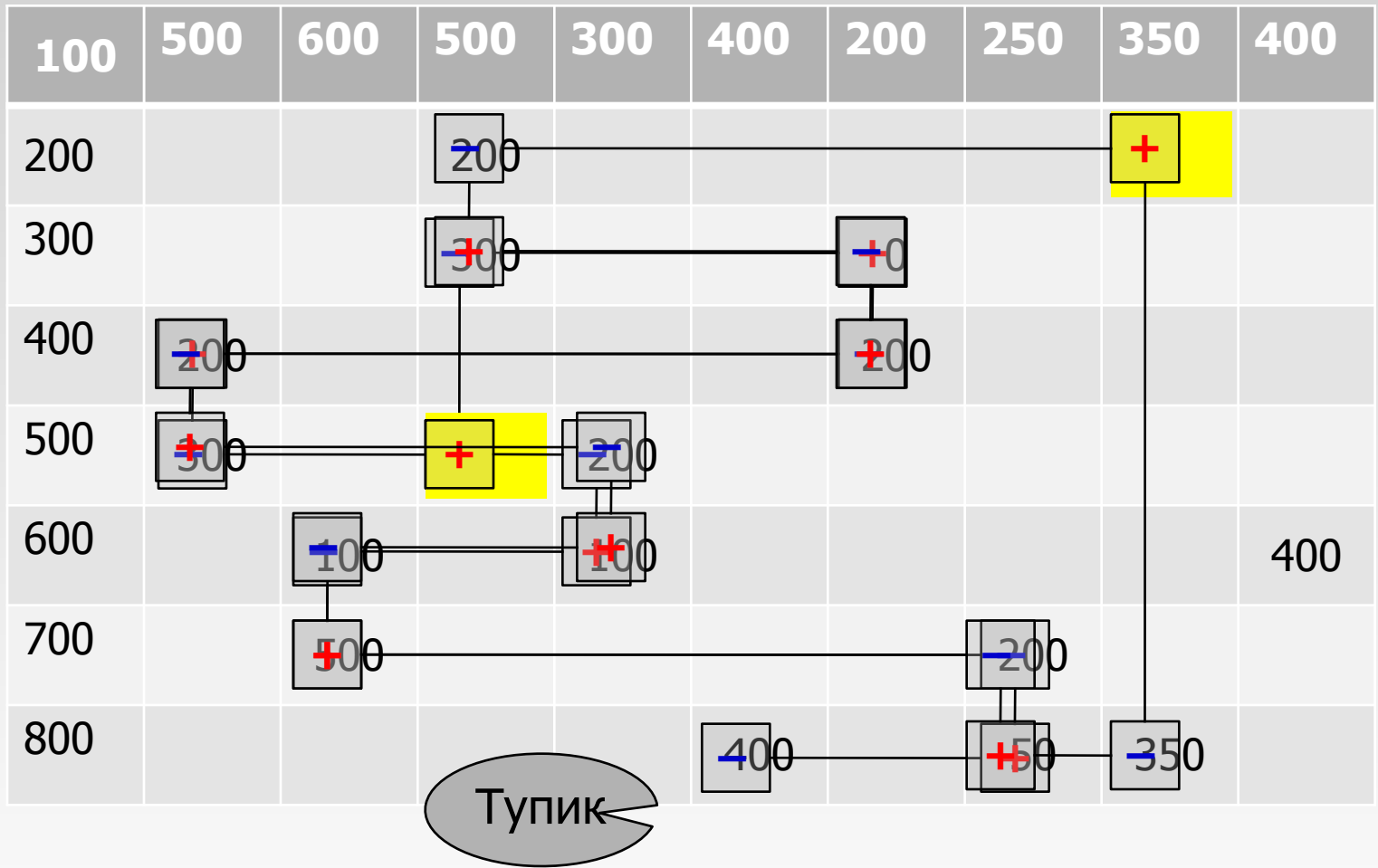


## 5.2.4. Корректировка плана

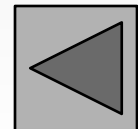
1. Выбираем **клетку** с превышением разности потенциалов потребителя и поставщика над стоимостью транспортировки  
как правило, с наибольшим
  2. Строим **контур** (см. схему), начиная с данной **клетки**
  3. Помечаем вершины контура знаками **+** и **-**  
начинаем со знака **+** в выбранной свободной **клетке**
  4. Находим **наименьшую из величин** в клетках со знаком **-**
  5. Вычитаем **её** из всех клеток «**-**» и прибавляем ко всем клеткам «**+**»
  6. Одну из клеток, в которых оказался нуль, объявляем свободной.
- Переходим к проверке критерия оптимальности



# 5.2.4



Тупик





## ОСОБЕННОСТИ

### 5.2.4<sup>1</sup>.

Контур можно построить всегда, но не всегда удаётся угадать правильный путь

- ♦ В больших задачах отыскание циклов вручную может оказаться проблематичным
  - ♦ Для компьютерных программ это не составляет проблемы

### 2. Контур может оказаться вырожденным

- ♦ Так случается, если наименьшим значением в клетке со знаком – оказывается нуль
  - ♦ Пересчёт по такому циклу не улучшает план, вследствие чего метод может зациклиться
- ♦ в этом случае выбирают другую свободную клетку в качестве начальной

### 3. Если после пересчёта получились нули в нескольких клетках, в качестве свободной можно выбрать любую из них

- ♦ Остальные считаются базисными с нулевым объёмом перевозки



## 5.3. Особенности решения открытой транспортной задачи

Транспортная задача называется *открытой*, если не выполняется условие равенства запасов спросу

Если спрос больше запасов, вводят *фиктивного поставщика*, располагающего недостающим количеством груза

- Стоимость «перевозки груза» от фиктивного поставщика принимается равным потерям, возникающим из-за неудовлетворённого спроса
- «Перевозки» от фиктивного поставщика интерпретируются как величины неудовлетворённого спроса соответствующих потребителей

Если имеется избыточный запас у поставщиков, вводят *фиктивного потребителя*, потребляющего избыток

- Стоимость перевозки груза фиктивному потребителю принимается равной потерям при хранении либо нулю
- «Перевозки» фиктивному потребителю интерпретируются как остатки на складах





## 5.4. Задача о назначениях

Дано:

- $n$  работников
- $n$  работ
- добавленная стоимость, создаваемая работником  $i$  на работе  $j$

Найти:

- оптимальное назначение работников на работы, максимизирующее добавленную стоимость



## 5.4

- Переформулируется в транспортную задачу по следующему правилу:
  - ◆ имеется  $n$  поставщиков, располагающих единичными ресурсами  
⇒ *работники*
  - ◆ имеется  $n$  потребителей с единичным спросом  
⇒ *работы*
  - ◆ стоимость перевозок равна добавленной стоимости, взятой со знаком «минус»
    - ◆ это делается для того, чтобы добавленная стоимость *максимизировалась*
- Решается методом потенциалов, как обычно
- «Перевозки единичного объёма груза» интерпретируются как назначение работника  $i$  на работу  $j$ 
  - ◆ Все базисные переменные в этом случае могут принимать только единичные значения