# Задания с параметром в ГИА-2011



Болдырева Татьяна Викторовна учитель математики высшей квалификационной категории МАОУ «Лицей №62»

С 2005/2006 года итоговая аттестация (ГИА) по алгебре проходит в новой форме, которая, несмотря на очевидную связь с ЕГЭ, обладает некоторыми особенностями.

Контрольно- измерительные материалы экзамена в новой форме проверяют сформированность комплекса умений, связанных с информационно-коммуникативной деятельностью, с получением, анализом, а также применением эмпирических данных.

Экзаменационная работа ГИА-9 состоит из двух частей.

Первая часть предусматривает выполнение тестовых заданий. При этом ответы заданий фиксируются учениками непосредственно на бланке теста. Эта часть заданий направлена на проверку уровня обязательной подготовки учащихся (владение понятиями, знание свойств и алгоритмов, решение стандартных задач) и включает задания по следующим разделам алгебры: числа, буквенные выражения, преобразования выражений, уравнения, неравенства, функции и графики, последовательности и прогрессии.

Вторая часть имеет вид традиционной контрольной работы и состоит из пяти задажий которых в соответствии со спецификацией представлены следующие разделы программного материала: выражения и их преобразования; уравнения и системы уравнений; текстовые задачи; неравенства; функции, координаты и графики, последовательности и прогрессии.

Эта часть работы направлена на дифференцированную проверку повышенного уровня математической подготовки учащихся: владение формально-оперативным аппаратом, интеграция знаний из различных тем школьного курса, исследовательские навыки.

### Литература для

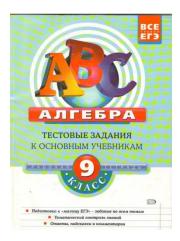
подготовки к экзамену.





















### Решение задач с параметром аналитически

1. Найдите значение р при которых парабола  $y = -2x^2 + px - 50$  касается оси х. Для каждого значения р определите координаты точки касания.

#### Решение и ответ

Парабола касается оси х, если квадратный трехчлен  $-2x^2+px-50$  имеет единственный корень. Следовательно его дискриминант должен обратиться в нуль.  $p^2-400=0,\ p=\pm20.$  Подставляя значения букв р, находим координаты точек касания с осью оХ. При p=20 точка касания (5;0); при p=-20 – точка касания (-5;0)

2. Найдите все значения а, при которых , неравенство  $x^2 + (2a+6)x + 12a + 4 \le 0$  не имеет решений.

График функции  $y = x^2 + (2a + 6)x + 12a + 4$  -парабола, ветви которой направлены вверх. Значит данное неравенство не имеет решений в том и только том случае, когда эта парабола целиком расположена в верхней полуплоскости. Отсюда следует, что дискриминант квадратного трехчлена

 $x^2 + (2a+6)x+12a+4$ 

должен быть отрицательным.



$$\frac{D}{4} = (a+3)^2 - (12a+4) = a^2 - 6a + 5,$$

$$a^2 - 6a + 5 < 0$$
  $1 < a < 5$ .

3. Прямая y = -3x + b касается окружности  $x^2 + y^2 = 10$  в точке с положительной абсциссой. Определите координаты точки касания.

Решение и ответ

1) Найдем значения b, при которых система

$$\begin{cases} y = -3x + b, \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Выполнив подстановку, получим уравнение



$$x^2 + (-3x + b)^2 = 10,$$

$$10x^2 - 6xb + b^2 - 10 = 0.$$

2) Полученное уравнение имеет единственное решение, когда его дискриминант равен нулю. Имеем:

$$\frac{D}{4} = 9b^2 - 10(b^2 - 10) = 100 - b^2.$$

Решив уравнение  $100 - b^2 = 0$  , получим  $b = \pm 10$ .

3) Таким образом, получили уравнения двух прямых, касающихся окружности y=-3x+10 u y=-3x-10 Найдем абсциссы точек касания, подставив найденные значения b в уравнение  $10x^2-6xb+b^2-10=0$ . При b=-10 получим  $x^2+6x+9=0$ , x=-3. Этот корень не удовлетворяет условию задачи. При b=10 получим  $x^2-6x+9=0$ , x=3. Найдем

При b=10 получим  $x^2-6x+9=0$ , x=3. Найдем соответствующее значение у:  $y=-3x+10=-3\cdot 3+10=1$  Координаты точки касания (3;1).

4. Парабола  $y = ax^2 + bx + c$  проходит через точки A(0;-4), B(-1; -11), C (4;4). Найдите координаты ее вершины.

Решение и ответ

1) Найдем коэффициенты a, b и c в уравнении параболы  $y = ax^2 + bx + c$ 

Парабола проходит через точку А(0;-4), значит, с=-4. Подставим координаты точек В и С в уравнение

$$y = ax^2 + bx - 4$$

Получим систему уравнений



$$\begin{cases} a-b = -7 \\ 16a+4b=8. \end{cases}$$

#### Решаем систему

$$\begin{cases}
a - b = -7 \\
16a + 4b = 8.
\end{cases}$$

#### Отсюда: a=-1, b=6.Уравнение параболы имеет вид

$$y = -x^2 + 6x - 4$$

#### 2) Найдем координаты вершины:



$$x_0 = -\frac{b}{2a} = 3,$$

$$y_0 = -3^2 + 6 \cdot 3 - 4 = 5.$$

#### 5. При каких значениях т уравнение

$$x^3 + 10x^2 - mx = 0.$$

#### имеет два различных корня?

#### Решение и ответ

- 1) Представим уравнение в виде  $x(x^2+10x-m)=0$ . Отсюда x=0 unu  $x^2+10x-m=0$ . Таким образом, при любом значении m данное уравнение имеет корень, равный 0.
  - 2) Рассмотрим уравнение  $x^2 + 10x m = 0$  Возможны два случая



$$m \neq 0$$
  $u$   $m = 0$ 

При  $m \neq 0$  получаем полное квадратное уравнение. Если его дискриминант равен нулю, то оно имеет единственный корень, а уравнение

$$x^3 + 10x^2 - mx = 0$$
 два корня.

**Имеем** 
$$D_1 = 25 + m$$
,  $25 + m = 0$ ,  $m = -25$ .

Таким образом, при m = -25 исходное уравнение имеет два различных корня.

При m = 0 получаем неполное квадратное уравнение  $x^2 + 10x = 0$ , корни которого 0 и -10. Таким образом. При m = 0 уравнение

 $x^{3} + 10x^{2} - mx = 0$  также имеет два различных корня.

**Ответ:** при m = 0 и m = -25

## 6. При каких значениях m и n, связанных соотношением m+n=2, выражение

$$2m^2 - 2mn - 3n^2$$

#### принимает наименьшее значение?

#### Решение и ответ

1) Выразим из равенства m+n=2 одну переменную через другую, например, переменную m через n: m=2-n. Подставим полученное выражение в данное:

$$2(2-n)^2 - 2n(2-n) - 3n^2 = n^2 - 12n + 8.$$

2) Функция  $y = ax^2 + bx + c$ , a > 0 принимает наименьшее значение при  $x = -\frac{b}{2a}$  ; воспользовавшись этой формулой, получим

$$n = \frac{12}{2} = 6$$
,  $m = 2 - 6 = -4$ . Ответ: при  $m = -4$ ,  $n = 6$ .

## 7Найдите все отрицательные значения т, при которых система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = m^2, \\ x + y = 1 \end{cases}$ Решение и ответ

Подставим y=1-х в уравнение  $x^2 + y^2 = m^2$ , получим квадратное уравнение относительно х:

$$2x^2 - 2x + (1 - m^2) = 0.$$

2) Найдем значения m, при которых это уравнение не имеет решений:

$$D_1=1-2\left(1-m^2\right)=2m^2-1;\ 2m^2-1<0;\ \left|m\right|<\frac{1}{\sqrt{2}}.$$
 Таким образом, система не имеет решений при

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} < m < \frac{\sqrt{2}}{2}$$
. Учитывая условие m<0, получим: $m \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2};0\right)$ .

## 8.При каких значениях р система неравенств $\begin{cases} 5x + 2 \ge 17 + 2x, \text{ имеет решения?} \\ p + 2x \le 3 + x \end{cases}$

#### Решение и ответ

1.Преобразовав каждое неравенство, получим систему

$$\begin{cases} x \ge 5, \\ x \le 3 - p. \end{cases}$$

2. Система имеет решения, если  $5 \le 3 - p$  К этому выводу легко придти с помощью координатной прямой. Отсюда  $p \le -2$ .



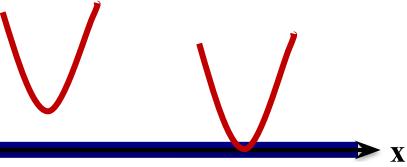
5 3-p X

Ответ: при  $p \le -2$ .

9.При каких значениях п решением неравенства  $x^2 - 2nx - n + 2 \ge 0$  является любое число?

#### Решение и ответ

1.Так как ветви параболы  $y = x^2 - 2nx - n + 2$  направлены вверх. То она должна быть расположена выше оси Ох или касаться ее.



2. Поэтому  $D_1 = n^2 + n - 2$ ,  $(n+2)(n-1) \le 0$ . Отсюда  $-2 \le n \le 1$ .

**Ответ:** при  $-2 \le n \le 1$ .

## 10.При каких отрицательных значениях k прямая y=kx-4 пересекает параболу

 $y = x^2 - 2x$  в двух точках?

#### Решение и ответ

- 1.Прямая у=кх-4 пересекает параболу  $y = x^2 2x$  в двух точках, если уравнение  $kx 4 = x^2 2x$  имеет два решения, то есть дискриминант уравнения  $x^2 (2+k)x + 4 = 0$  больше нуля.
- 2. Имеем:  $(2+k)^2-16>0$  отсюда k>2 или k<-6. Так как k-отрицательно, то k<-6.

**Ответ:** при k < -6.



### Решение задач с параметром графически

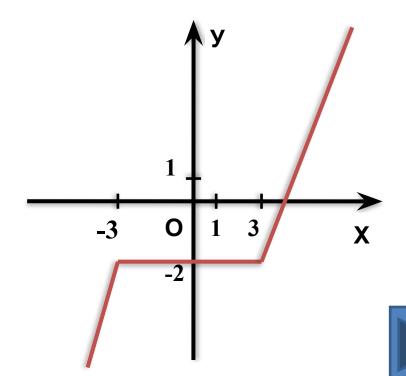
## 11. Найдите все значения k, при которых прямая y=kx пересекает в трех различных точках график функции (3x+7,ecnu x<-3)

Решение и ответ

$$3x + 7, ecnu x < -3$$
  
 $-2, ecnu - 3 \le x \le 3$   
 $3x - 11, ecnu x > 3.$ 

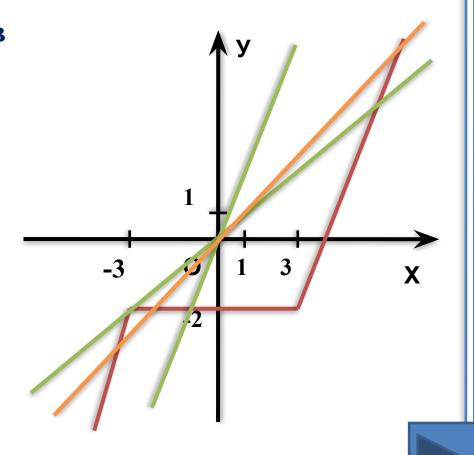
Построим график заданной функции







Прямая у=кх пересекает в трех различных точках этот график, если ее угловой коэффициент больше углового коэффициента прямой, проходящей через точку (-3, -2) и меньше углового коэффициента прямой, параллельной прямым y=3x+7 и y=3x-11



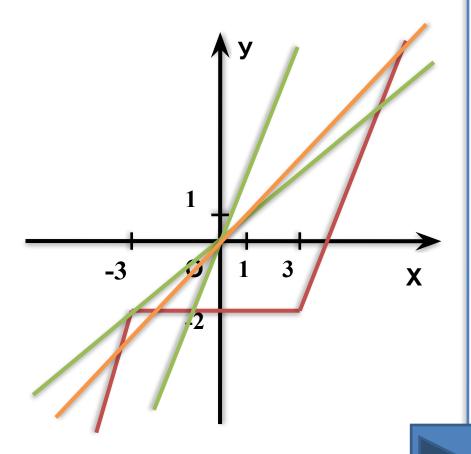


Найдем угловой коэффициент прямой, проходящей через точку

$$-2=-3k$$

$$k=2/3.$$

Угловой коэффициент к прямой, параллельной прямой y=3x+7, равен 3. Прямая y=kx имеет с графиком заданной функции три общие точки при  $\frac{2}{3} < k < 3.$ 



#### 12. Постройте график функции

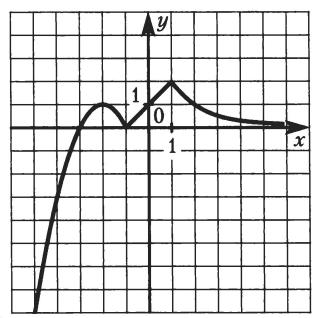
$$y = \begin{cases} -x^{2} - 4x - 3, ecnu \ x \le -1 \\ x + 1, ecnu - 1 < x \le 1 \\ \frac{2}{x}, ecnu \ x > 1. \end{cases}$$



При каких значениях m прямая у=m имеет с графиком этой функции две общие точки?

Решение и ответ

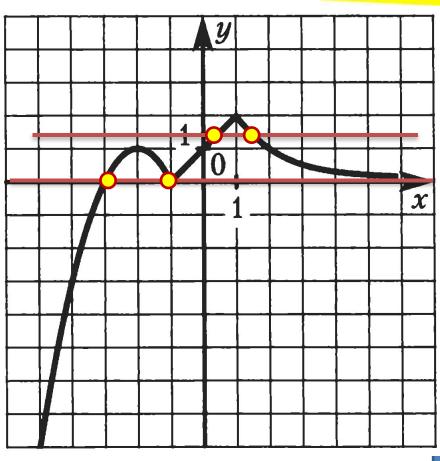
Построим график заданной функции



Прямая у=m имеет с графиком этой функции две общие точки при

$$m = 0$$
 и  $1 < m < 2$ 





#### 13. Постройте график функции

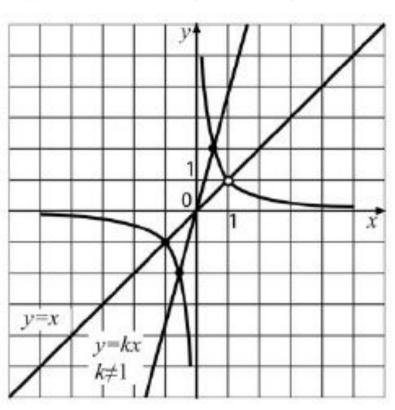
$$y = \frac{x-1}{x^2 - x}$$

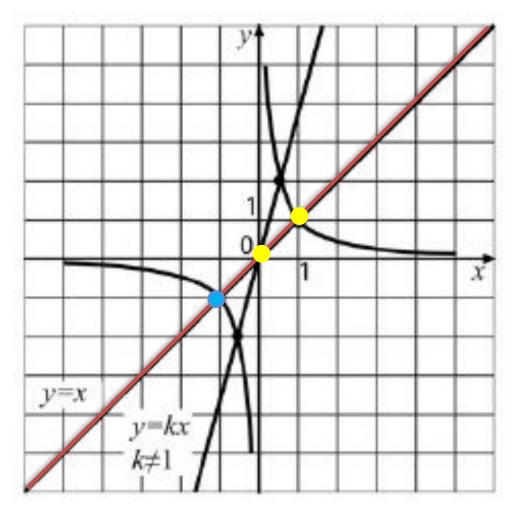


И определите, при каких значениях k прямая y=kx имеет c графиком ровно одну общую точку.

Решение и ответ

Построим график заданной функции







#### Преобразуем дробь

$$\frac{x-1}{x^2-x} = \frac{x-1}{x(x-1)} = \frac{1}{x},$$

$$y = \frac{1}{x}, x \neq 0, x \neq 1.$$

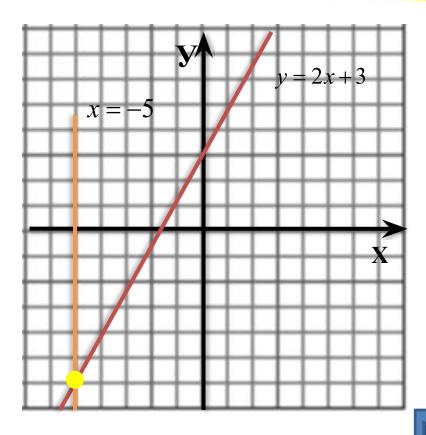
**Ответ:** k=1

## 14. При каких значениях а отрезок с концами в точках A(-5;-6) и B(-5;a) пересекает прямую 2х-y=-3?



#### Решение и ответ

Построим график функции y = 2x + 3Точки А и В лежат на вертикальной прямой x = -5 Отрезок **AB** пересекает эту прямую в том случае, когда точка В(-5;а) лежит ниже этой прямой, то есть когда выполняется неравенство  $a \le -7$ .



## Удачи на экзаменах



ГИА-2011!

B

