

Задания с параметром в ГИА-2011



**Болдырева Татьяна Викторовна
учитель математики
высшей квалификационной категории
МАОУ «Лицей №62»**



С 2005/2006 года итоговая аттестация (ГИА) по алгебре проходит в новой форме, которая, несмотря на очевидную связь с ЕГЭ, обладает некоторыми особенностями.

Контрольно- измерительные материалы экзамена в новой форме проверяют сформированность комплекса умений, связанных с информационно-коммуникативной деятельностью, с получением, анализом, а также применением эмпирических данных.



Экзаменационная работа ГИА-9 состоит из двух частей.



Первая часть предусматривает выполнение тестовых заданий . При этом ответы заданий фиксируются учениками непосредственно на бланке теста. Эта часть заданий направлена на проверку уровня обязательной подготовки учащихся (владение понятиями, знание свойств и алгоритмов, решение стандартных задач) и включает задания по следующим разделам алгебры: числа, буквенные выражения, преобразования выражений, уравнения, неравенства, функции и графики, последовательности и прогрессии.



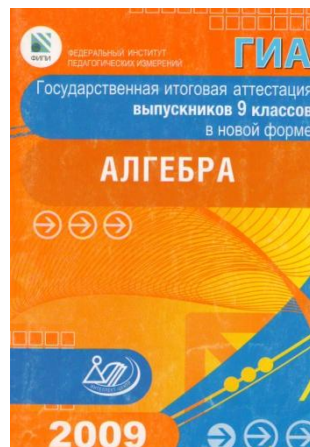
Вторая часть имеет вид традиционной контрольной работы и состоит из пяти заданий, в которых в соответствии со спецификацией представлены следующие разделы программного материала: выражения и их преобразования; уравнения и системы уравнений; текстовые задачи; неравенства; функции, координаты и графики, последовательности и прогрессии.



Эта часть работы направлена на дифференцированную проверку повышенного уровня математической подготовки учащихся: владение формально-оперативным аппаратом, интеграция знаний из различных тем школьного курса, исследовательские навыки.



Литература для подготовки к экзамену.





Решение задач с параметром аналитически





1. Найдите значение p при которых парабола $y = -2x^2 + px - 50$ касается оси x . Для каждого значения p определите координаты точки касания.

Решение и ответ

Парабола касается оси x , если квадратный трехчлен $-2x^2 + px - 50$ имеет единственный корень. Следовательно его дискриминант должен обратиться в нуль. $p^2 - 400 = 0, p = \pm 20$.

Подставляя значения букв p , находим координаты точек касания с осью OX .

При $p=20$ точка касания $(5;0)$; при $p=-20$ – точка касания $(-5;0)$



2. Найдите все значения a , при которых, неравенство $x^2 + (2a + 6)x + 12a + 4 \leq 0$ не имеет решений.

Решение и ответ

График функции $y = x^2 + (2a + 6)x + 12a + 4$ -парабола, ветви которой направлены вверх. Значит данное неравенство не имеет решений в том и только том случае, когда эта парабола целиком расположена в верхней полуплоскости. Отсюда следует, что дискриминант квадратного трехчлена

$$x^2 + (2a + 6)x + 12a + 4$$

должен быть отрицательным.



$$\frac{D}{4} = (a + 3)^2 - (12a + 4) = a^2 - 6a + 5,$$

$$a^2 - 6a + 5 < 0 \quad 1 < a < 5.$$



3. Прямая $y = -3x + b$ касается окружности $x^2 + y^2 = 10$ в точке с положительной абсциссой. Определите координаты точки касания.

Решение и ответ

1) Найдем значения b , при которых система

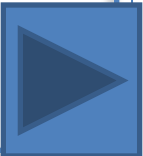
$$\begin{cases} y = -3x + b, \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Выполнив подстановку, получим уравнение



$$x^2 + (-3x + b)^2 = 10,$$

$$10x^2 - 6xb + b^2 - 10 = 0.$$



Решение и ответ



2) Полученное уравнение имеет единственное решение, когда его дискриминант равен нулю. Имеем:

$$\frac{D}{4} = 9b^2 - 10(b^2 - 10) = 100 - b^2.$$

Решив уравнение $100 - b^2 = 0$, получим $b = \pm 10$.

3) Таким образом, получили уравнения двух прямых, касающихся окружности $y = -3x + 10$ и $y = -3x - 10$. Найдем абсциссы точек касания, подставив найденные значения b в уравнение $10x^2 - 6xb + b^2 - 10 = 0$. При $b = -10$ получим $x^2 + 6x + 9 = 0$, $x = -3$. Этот корень не удовлетворяет условию задачи.

При $b = 10$ получим $x^2 - 6x + 9 = 0$, $x = 3$. Найдем соответствующее значение y : $y = -3x + 10 = -3 \cdot 3 + 10 = 1$.
Координаты точки касания (3;1).



4. Парабола $y = ax^2 + bx + c$
проходит через точки $A(0;-4)$, $B(-1; -11)$, $C(4;4)$.
Найдите координаты ее вершины.

Решение и ответ

1) Найдем коэффициенты a , b и c в уравнении
параболы $y = ax^2 + bx + c$

Парабола проходит через точку $A(0;-4)$, значит, $c=-4$.
Подставим координаты точек B и C в уравнение

$$y = ax^2 + bx - 4$$

Получим систему уравнений

$$\begin{cases} a - b = -7 \\ 16a + 4b = 8. \end{cases}$$



Решение и ответ

Решаем систему

$$\begin{cases} a - b = -7 \\ 16a + 4b = 8. \end{cases}$$

Отсюда: $a=-1$, $b=6$. Уравнение параболы имеет вид

$$y = -x^2 + 6x - 4$$

2) Найдем координаты вершины:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = 3,$$

$$y_0 = -3^2 + 6 \cdot 3 - 4 = 5.$$



5. При каких значениях m уравнение

$$x^3 + 10x^2 - mx = 0.$$

имеет два различных корня?

Решение и ответ

1) Представим уравнение в виде $x(x^2 + 10x - m) = 0$.

Отсюда $x = 0$ или $x^2 + 10x - m = 0$. Таким образом, при любом значении m данное уравнение имеет корень, равный 0.

2) Рассмотрим уравнение $x^2 + 10x - m = 0$.

Возможны два случая

$$m \neq 0 \quad \text{и} \quad m = 0$$



Решение и ответ



При $m \neq 0$ получаем полное квадратное уравнение. Если его дискриминант равен нулю, то оно имеет единственный корень, а уравнение

$$x^3 + 10x^2 - mx = 0 \quad \text{два корня.}$$

Имеем $D_1 = 25 + m$, $25 + m = 0$, $m = -25$.

Таким образом, при $m = -25$ исходное уравнение имеет два различных корня.

При $m = 0$ получаем неполное квадратное уравнение $x^2 + 10x = 0$, корни которого 0 и -10.

Таким образом. При $m = 0$ уравнение

$$x^3 + 10x^2 - mx = 0 \quad \text{также имеет два}$$

различных корня.

Ответ: при $m = 0$ и $m = -25$



6. При каких значениях m и n , связанных соотношением $m+n=2$, выражение

$$2m^2 - 2mn - 3n^2$$

принимает наименьшее значение?



Решение и ответ

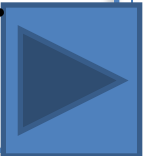
- 1) Выразим из равенства $m+n=2$ одну переменную через другую, например, переменную m через n : $m=2-n$. Подставим полученное выражение в данное:

$$2(2-n)^2 - 2n(2-n) - 3n^2 = n^2 - 12n + 8.$$

- 2) Функция $y = ax^2 + bx + c$, $a > 0$ принимает наименьшее значение при $x = -\frac{b}{2a}$; воспользовавшись этой формулой, получим

$$n = \frac{12}{2} = 6, m = 2 - 6 = -4.$$

Ответ: при $m = -4, n = 6$.



7 Найдите все отрицательные значения m , при которых система уравнений не имеет решений.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = m^2, \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Решение и ответ

1) Подставим $y=1-x$ в уравнение $x^2 + y^2 = m^2$, получим квадратное уравнение относительно x :



$$2x^2 - 2x + (1 - m^2) = 0.$$

2) Найдем значения m , при которых это уравнение не имеет решений:

$$D_1 = 1 - 2(1 - m^2) = 2m^2 - 1; \quad 2m^2 - 1 < 0; \quad |m| < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом, система не имеет решений при

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} < m < \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad \text{Учитывая условие } m < 0, \text{ получим: } m \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right).$$

Ответ: $m \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right).$



8. При каких значениях p система неравенств $\begin{cases} 5x + 2 \geq 17 + 2x, \\ p + 2x \leq 3 + x \end{cases}$ имеет решения?

Решение и ответ

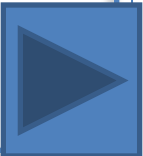
1. Преобразовав каждое неравенство, получим систему

$$\begin{cases} x \geq 5, \\ x \leq 3 - p. \end{cases}$$

2. Система имеет решения, если $5 \leq 3 - p$. К этому выводу легко прийти с помощью координатной прямой. Отсюда $p \leq -2$.



Ответ: при $p \leq -2$.

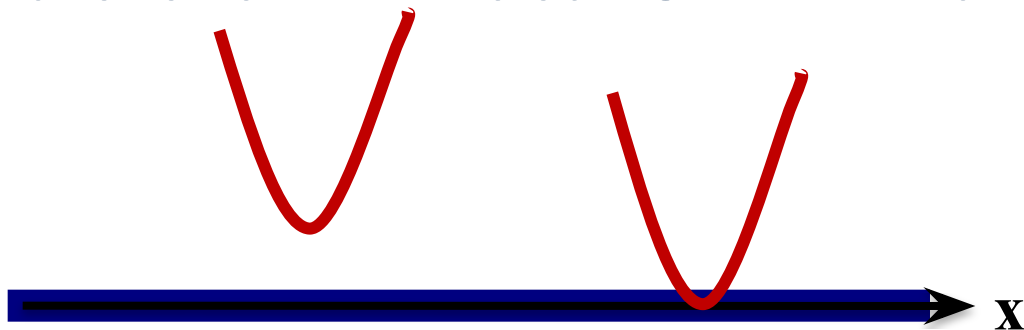


9. При каких значениях n решением неравенства $x^2 - 2nx - n + 2 \geq 0$ является любое число?



Решение и ответ

1. Так как ветви параболы $y = x^2 - 2nx - n + 2$ направлены вверх. То она должна быть расположена выше оси Ox или касаться ее.



2. Поэтому $D_1 = n^2 + n - 2, (n + 2)(n - 1) \leq 0$.
Отсюда $-2 \leq n \leq 1$.

Ответ: при $-2 \leq n \leq 1$.



10. При каких отрицательных значениях k прямая $y=kx-4$ пересекает параболу $y = x^2 - 2x$ в двух точках?



Решение и ответ

1. Прямая $y=kx-4$ пересекает параболу $y = x^2 - 2x$ в двух точках, если уравнение $kx - 4 = x^2 - 2x$ имеет два решения, то есть дискриминант уравнения $x^2 - (2 + k)x + 4 = 0$ больше нуля.

2. Имеем: $(2 + k)^2 - 16 > 0$
отсюда $k > 2$ или $k < -6$. Так как k -отрицательно, то $k < -6$.

Ответ: при $k < -6$.





Решение задач с параметром графически

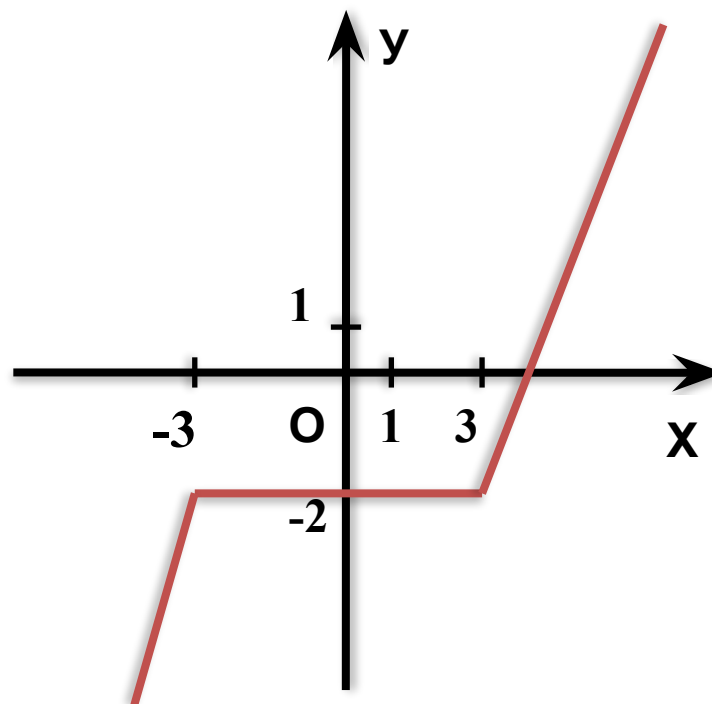


11. Найдите все значения k , при которых прямая $y=kx$ пересекает в трех различных точках график функции

Решение и ответ

$$\begin{cases} 3x + 7, & \text{если } x < -3 \\ -2, & \text{если } -3 \leq x \leq 3 \\ 3x - 11, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

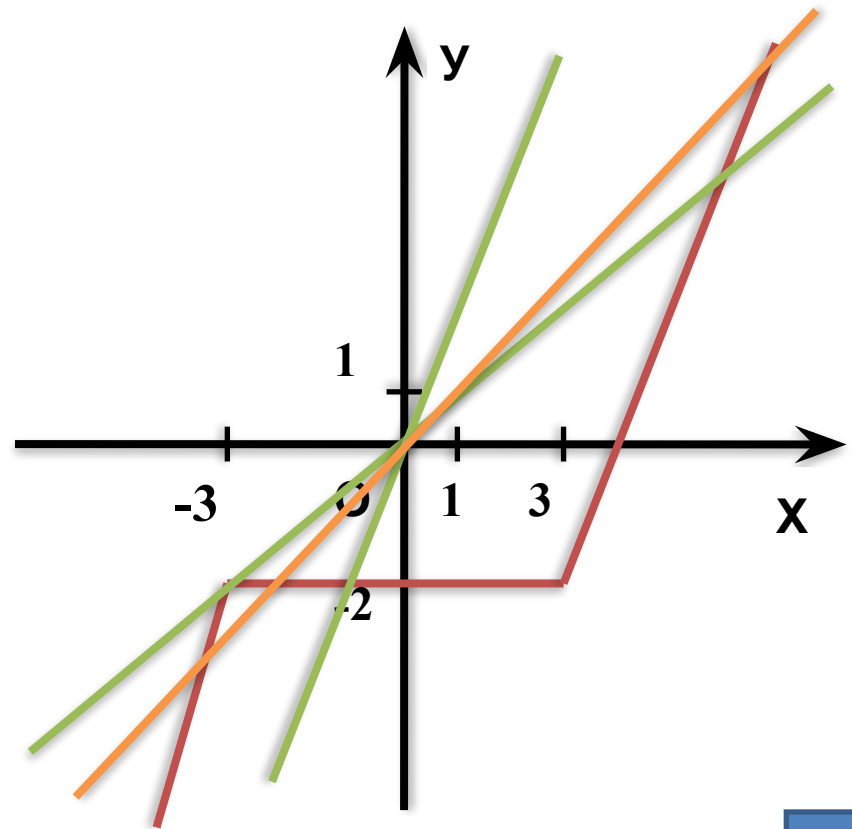
Построим график заданной функции



Решение и ответ



Прямая $y=kx$ пересекает в трех различных точках этот график, если ее угловой коэффициент больше углового коэффициента прямой, проходящей через точку $(-3, -2)$ и меньше углового коэффициента прямой, параллельной прямым $y=3x+7$ и $y=3x-11$



Решение и ответ



Найдем угловой коэффициент прямой, проходящей через точку

$(-3, -2)$:

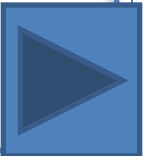
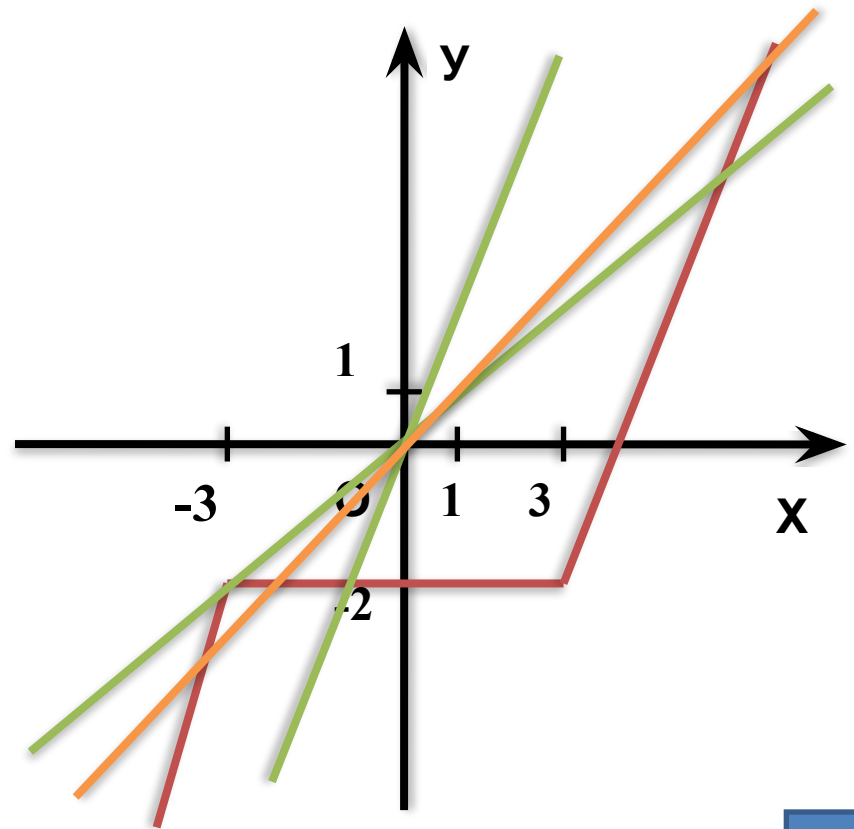
$$-2 = -3k$$

$$k = 2/3.$$

Угловой коэффициент k прямой, параллельной прямой $y = 3x + 7$, равен 3.

Прямая $y = kx$ имеет с графиком заданной функции три общие точки при

$$\frac{2}{3} < k < 3.$$



12. Постройте график функции

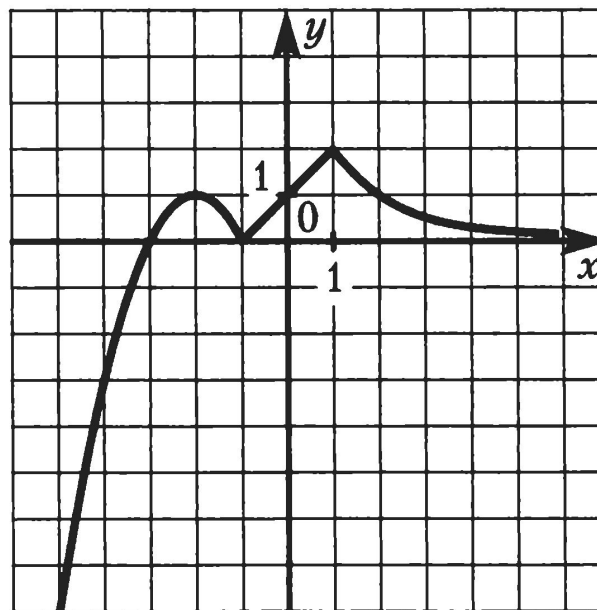
$$y = \begin{cases} -x^2 - 4x - 3, & \text{если } x \leq -1 \\ x + 1, & \text{если } -1 < x \leq 1 \\ \frac{2}{x}, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$



При каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком этой функции две общие точки?

Решение и ответ

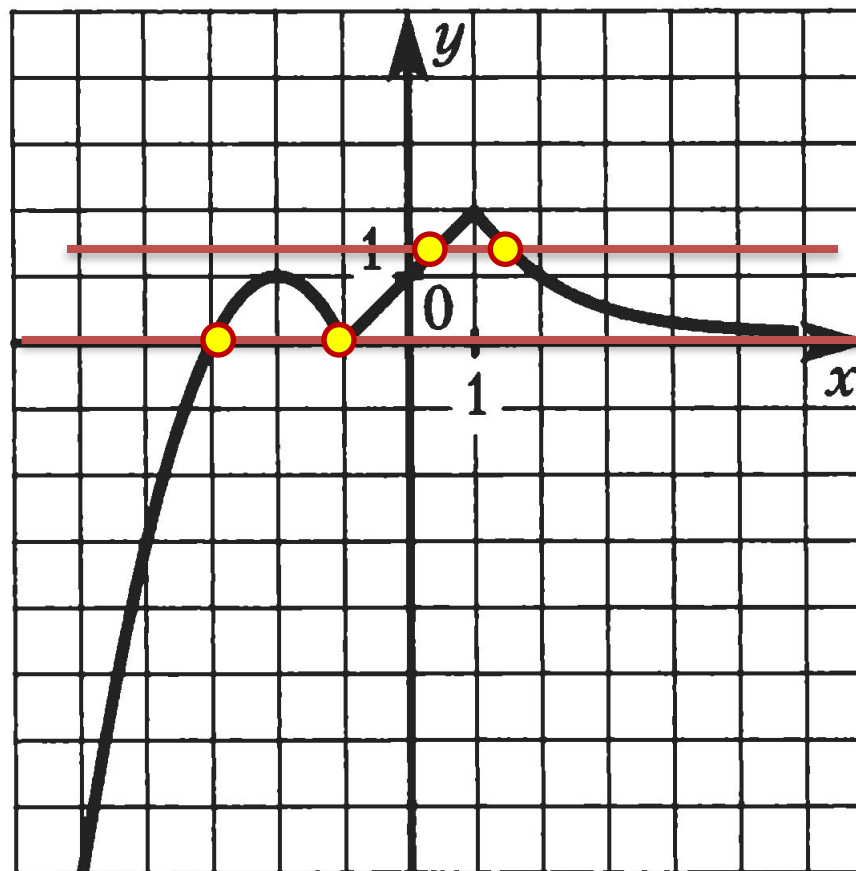
Построим график заданной функции



Решение и ответ

Прямая $y=t$ имеет
с графиком этой
функции две
общие точки при

$$t = 0 \text{ и } 1 < t < 2$$



13. Постройте график функции

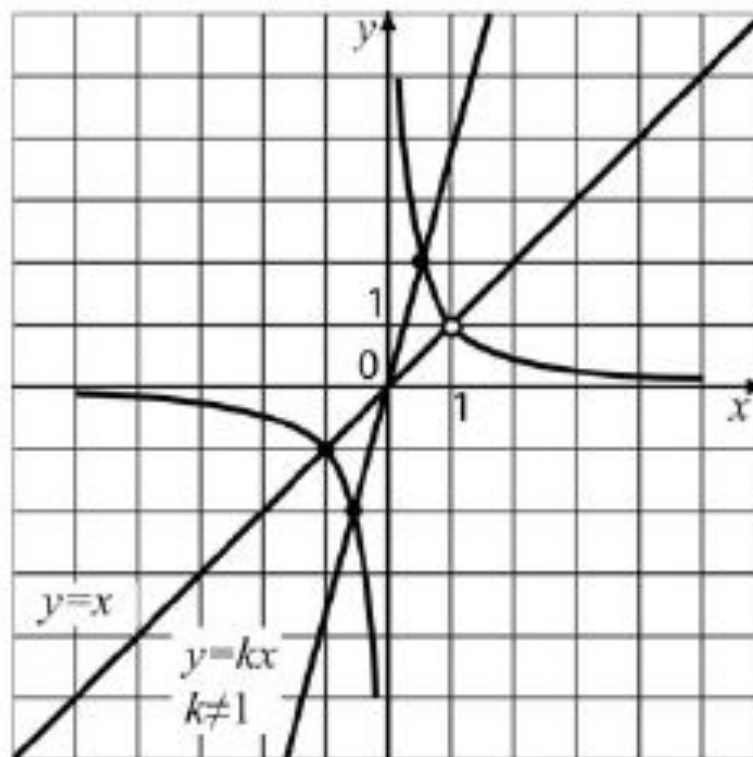
$$y = \frac{x-1}{x^2-x}$$



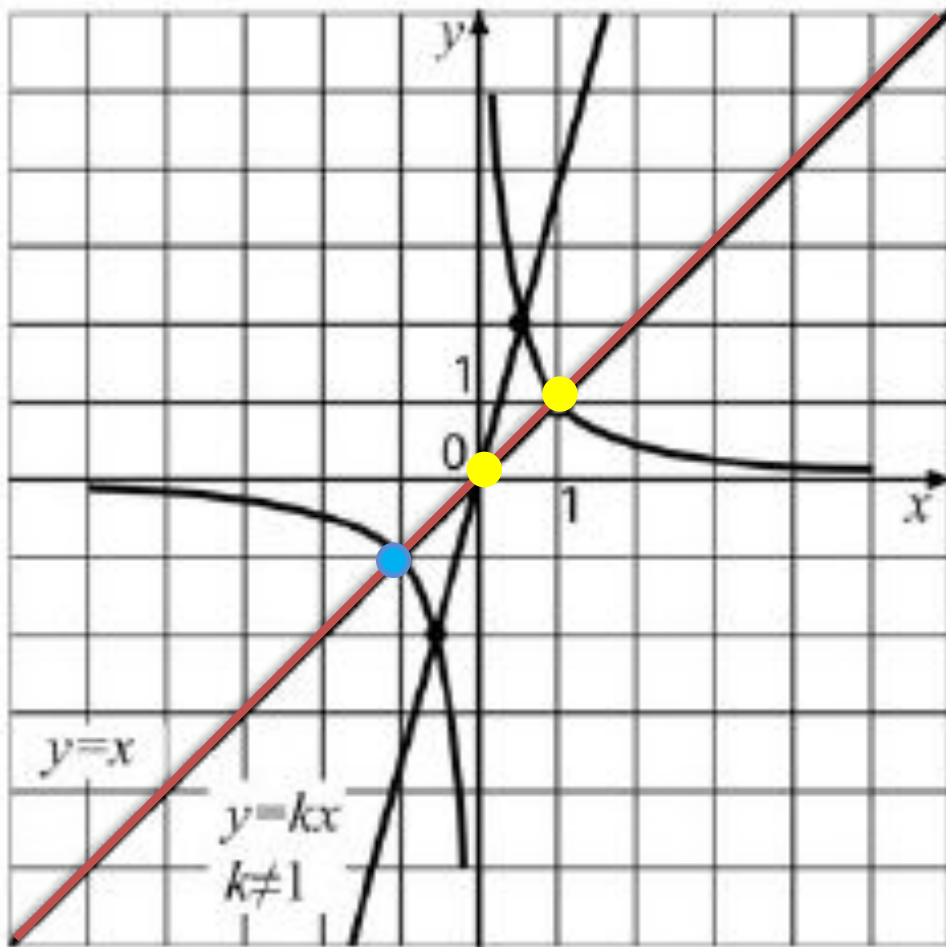
И определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение и ответ

Построим график заданной функции



Решение и ответ



Преобразуем дробь

$$\frac{x-1}{x^2-x} = \frac{x-1}{x(x-1)} = \frac{1}{x},$$

$$y = \frac{1}{x}, x \neq 0, x \neq 1.$$

Ответ: $k=1$



14. При каких значениях a отрезок с концами в точках $A(-5;-6)$ и $B(-5;a)$ пересекает прямую $2x-y=-3$?



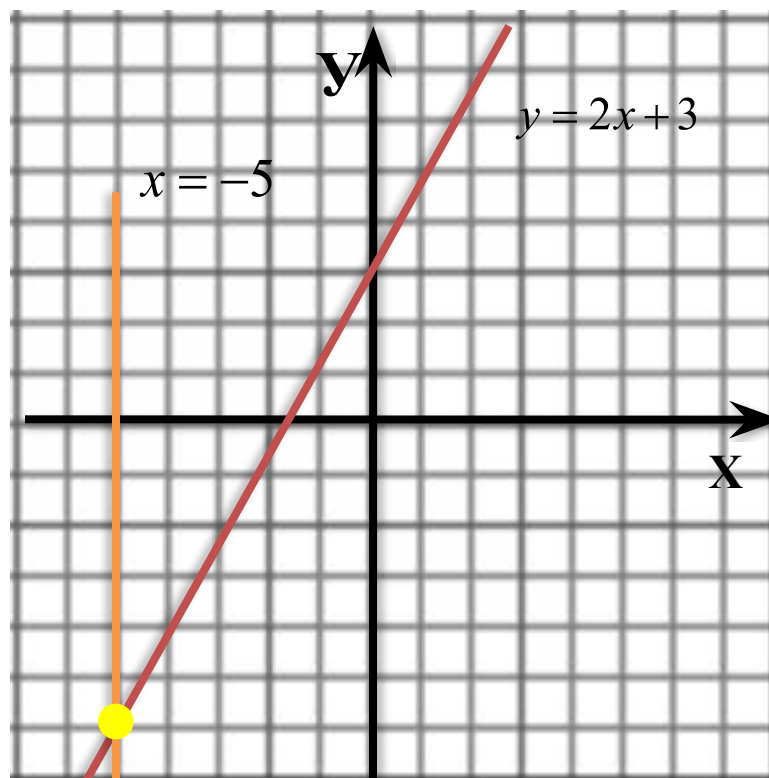
Решение и ответ

Построим график функции $y = 2x + 3$

Точки A и B лежат на вертикальной прямой

$$x = -5$$

Отрезок AB пересекает эту прямую в том случае, когда точка $B(-5;a)$ лежит ниже этой прямой, то есть когда выполняется неравенство $a \leq -7$.



**Удачи на
экзаменах
В
ГИА-2011!**

