ПР в условиях неопределенности

Данный тип задач чаще всего встречается на практике. Для него разработано очень много методов и рекомендаций. В этой ситуации большая роль отводится ЛПР.

В исследовании операций принято различать три типа неопределенностей:

1. неопределенность целей (учитывается в W);
2. неопределенность наших знаний об окружающей обстановке и действующих в данном явлении факторах (неопределенность природы);
3. неопределенность действий активного или пассивного партнера или противника.

Пункты 2 и 3 учитываются при определении ограничений и при выборе метода решения.

Кроме этого, необходимо учитывать **отношение к случайности**.

- Стохастическая (вероятностная неопределенность), неизвестные факторы статистически устойчивы – объекты теории вероятностей.
- Неопределенность не стохастического вида, никаких предположений о стохастической устойчивости не существует.
- Неопределенность промежуточного типа, решение принимается на основе гипотез о законах распределения случайных величин. ЛПР понимает риск несовпадения полученных результатов с реальными условиями.

ПР в условиях риска

Промежуточный случай между полной определенностью в поведении случайной величины и полной неопределенностью называется ситуацией риска. Принятие решений в ситуации риска основано на одном из критериев:

- Критерий ожидаемого значения;
- Критерий "ожидаемого значения - дисперсия";
- Критерий предельного уровня;
- Критерий наиболее вероятного исхода.

Критерий ожидаемого значения

Есть исходные данные о вероятности полученного результата при различных решениях, т.е. КОЗ – выборочные средние значения случайной величины. Естественно, что достоверность получаемого решения при этом будет зависеть от объема выборки. Так, если обозначить

КОЗ - $E(x_1,x_2,...,x_n)$, где x_1, x_2,..., x_n - принимаемые решения при их количестве, равном n, то

$$E(x_i) => M(x_i), \text{ где}$$

$M(x_i)$ - математическое ожидание критерия.

Таким образом, КОЗ может применяться, когда однотипные решения в сходных ситуациях приходится принимать большое число раз.

Стохастическое программир-е

Учет неопределенных факторов, заданных законом распределения

а) Замена случайных параметров их мат. ожиданиями (стохастическая задача сводится к детерминированной). М-подстановка

б) Определение целевой функции для дискретных и непрерывных величин Р-подстановка

$$W = \sum_i W(U_i) P(U_i) \qquad W = \int W(U) f(U) dU$$

$P(U_i)$ - ряд распределений случайной величины U_i;

$f(U)$ - плотность распределения случайной величины U.

При описании дискретных случайных величин наиболее часто используют распределения Пуассона, биноминальное. Для непрерывных величин основными распределениями являются нормальное, равномерное и экспоненциальное.

ПР в условиях риска

Пример КОЗ

Пусть мастерская имеет **n** станков, причем ремонт отказавшего станка производится индивидуально, а если станки не отказывают, то через **T** интервалов времени производится профилактический ремонт всех станков. Задача заключается в определении оптимального значения **T**, при котором общие затраты на ремонт будут минимальны. Очевидно, что задача может быть решена, если известна вероятность $\mathbf{p_t}$ отказа одного станка в момент времени **t**. Эта неопределенность и представляет в данном случае элемент "риска".

КОЗ для данного случая запишется так:

$$E\left[C(T)\right] = \left(C_1 \sum_{t=1}^{T-1} E(n_t) + nC_2\right) / T$$

где **E[C(T)]** - КОЗ затрат на ремонт станков за один интервал времени; $\mathbf{C_1}$ - затраты на ремонт одного станка при внезапном отказе; $\mathbf{E(n_t)}$ - математическое ожидание вышедших из строя станков в момент **t**; $\mathbf{C_2}$ - затраты на профилактический (плановый) ремонт одного станка.

Допустим, что $\mathbf{n_t}$ имеет биноминальное распределение, тогда $\mathbf{E(n_t) = n*p_t}$ и

$$E\left[C(T)\right] = n\left(C_1 \sum_{t=1}^{T-1} p_t + C_2\right) / T$$

Необходимые условия оптимального значения **T*** имеют вид:

E[C(T*-1)]≥E[C(T*)] и **E[C(T*+1)]≥E[C(T*)]**.

ПР в условиях риска

Критерий "ожидаемого значения – дисперсия"

Как указывалось выше, КОЗ имеет область применения, ограниченную значительным числом однотипных решений, принимаемых в аналогичных ситуациях. Этот недостаток можно устранить, если применять комбинацию КОЗ и выборочной дисперсии $\boldsymbol{\sigma^2}$. Возможным критерием при этом является минимум выражения

$$E(Z,\sigma) = E(Z) \pm k*U(z) \to \min,$$

где $E(Z,\sigma)$ - критерий "ожидаемого значения - дисперсия"; k - постоянный коэффициент; $U(Z) = m_Z/S$ - выборочный коэффициент вариации; m_Z - оценка математического ожидания; S - оценка среднего квадратического ожидания.

Знак "минус" ставится в случае оценки прибыли, знак "плюс" - в случае затрат.

Из зависимости видно, что в данном случае точность предсказания результата повышается за счет учета возможного разброса значений E(Z), то есть введения своеобразной "страховки". При этом степень учета этой страховки регулируется коэффициентом k, который как бы управляет степенью учета возможных отклонений. Так, например, если для ЛПР имеет большое значение ожидаемые потери прибыли, то k>>1 и при этом существенно увеличивается роль отклонений от ожидаемого значения прибыли E(Z) за счет дисперсии.

ПР в условиях риска

Критерий предельного уровня

Этот критерий не имеет четко выраженной математической формулировки и основан в значительной степени на интуиции и опыте ЛПР. Критерий предельного уровня обычно не используется, когда нет полного представления о множестве возможных альтернатив. Учет ситуации риска при этом может производиться за счет введения законов распределений случайных факторов для известных альтернатив.

Несмотря на отсутствие формализации критерием предельного уровня пользуются довольно часто, задаваясь их значениями на основании экспертных или опытных данных.

Критерий наиболее вероятного исхода

Этот критерий предполагает замену случайной ситуации детерминированной путем замены случайной величины прибыли (или затрат) единственным значением, имеющим наибольшую вероятность реализации. Использование данного критерия, также как и в предыдущем случае в значительной степени опирается на опыт и интуицию.

Обстоятельства, затрудняющие применение этого критерия:

- критерий нельзя использовать, если наибольшая вероятность события недопустимо мала;
- применение критерия невозможно, если несколько значений вероятностей возможного исхода равны между собой.

Стохастическое программир-е

Постановка задачи стохастического программирования

Случайные факторы: спрос, сбои в поступлении сырья, аварии...

Задачи стохастического программирования часто решают тогда, когда элементы задачи (**A** – матрица, **b** – столбец вектора ресурсов, **c** – вектор оценок) – случайны.

Для одноэтапной задачи (нет итераций) она может быть сформулирована в **M** и **P** постановках по отношению к записи целевой функции и ограничений.

а) Случайны элементы вектора **c** (целевая функция).

M-постановка

$$W = M\left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j\right) \to \max\ (\min) = \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j \to \max\ (\min)$$

От мат. ожидания по W приходим к мат. ожиданию по c_j.

P-постановка (максимизация)

$$W = P\left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ge W_{\min}\right) \to \max$$

P-постановка (минимизация)

$$W = P\left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le W_{\max}\right) \to \max$$

W_{min} - предварительно заданное допустимое наихудшее (минимальное) значение целевой функции, W_{max} – наихудшее (максимальное). Суть **P**-постановки заключается в том, что необходимо найти такие значения $\mathbf{x_j}$, при которых максимизируется вероятность того, что целевая функция будет не хуже предельно допустимого значения.

Стохастическое программир-е

Постановка задачи стохастического программирования

б) Случайны коэффициенты матрицы **A** и элементы вектора ресурсов **b**.

Ограничения

М-постановка (статистические ограничения)

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij}} x_j \le \overline{b_i}$$

Р-постановка (вероятностные ограничения)

$$P\left\{\sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij}} x_j \le \overline{b_i}\right\} \ge \alpha_i$$

Вероятность выполнения каждого заданного ограничения должна превышать заранее назначенное число $\boldsymbol{\alpha_i}$.

Стохастическое программир-е

Представленные выше задачи, как в **M**-постановке, так и в **P**-постановке решены непосредственно быть не могут, поэтому, задаваясь начальными распределениями, формулы сводятся к следующим.

Пусть $\mathbf{a_{ij}}$, $\mathbf{b_i}$, $\mathbf{c_i}$ – распределены по нормальному закону, тогда...

Целевая функция (максимизация)

$$W = \frac{\sum_{j=1}^{n} \overline{c_j} x_j - W_{\min}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 x_j^2}} \to \max$$

$\boldsymbol{\sigma_j}$ – среднеквадратичное отклонение случайной величины $\mathbf{c_j}$.

Целевая функция (минимизация)

$$W = \frac{W_{\max} - \sum_{j=1}^{n} \overline{c_j} x_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 x_j^2}} \to \max$$

Вероятностные ограничения

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij}} x_j \le \overline{b_i} - t_{\alpha i} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 x_j^2 + \theta_i^2}$$

$\boldsymbol{\sigma_j^2}$, $\boldsymbol{\theta_j^2}$ – дисперсии случайных величин $\mathbf{a_{ij}}$, $\mathbf{b_i}$,

$\mathbf{t_{\alpha i}}$ – значение центрированной нормированной случайной величины в нормальном законе распределения, соответствующей заданному уровню вероятности соблюдения ограничения α_i.

Стохастическое программир-е

Замечания

Задача стохастического программирования сводится к задаче НЛП и решается одним из рассмотренных методов.

Сравнение ограничений по ресурсам в СП и НЛП приводит к пониманию методов учета их случайного характера. Т.е. случайный характер величин $\mathbf{a_{ij}}$ и $\mathbf{b_i}$ приводит к уменьшению располагаемого ресурса $\mathbf{b_i}$ на величину

$$\tau_{\alpha i}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2 x_j^2+\theta_i^2}$$

Другими словами, всегда есть надобность в дополнительном ресурсе, нужно всегда держать излишки на складе.