

# Дерево (ЕГЭ СЗ)

Выигрышные игровые  
стратегии

# ЕГЭ СЗ\_1 2006

Два игрока играют в следующую игру.

Имеются три кучи камней, содержащих соответственно 2, 3, 4 камня. За один ход разрешается или удвоить количество камней в какой-нибудь куче, или добавить по два камня в каждую из трех куч. Предполагается, что у каждого игрока имеется неограниченный запас камней.

Выигрывает тот игрок, после чьего хода в какой-нибудь куче становится  $> 15$  камней или во всех трех кучах суммарно становится  $> 25$  камней.

Игроки ходят по очереди. Выяснить, кто выигрывает при правильной игре, - первый или второй игрок.

# Решение: старт

I

4, 3, 4

2, 6, 4

2, 3, 8

4, 5, 6

II

8, 3, 4

4, 6, 4

4, 3, 8

8, 5, 6

4, 6, 4

2, 12,  
4

2, 6, 8

4, 10,  
6

4, 3, 8

2, 6, 8

2,  
3, 16  
4, 5,  
10

4, 5,  
12

6, 5, 6

4, 8, 6

6, 7, 8

При ходе (4, 6, 4) II игрока I проигрывает

Ход (2, 3, 8) ошибочный для I игрока

I игрок выигрывает при любом ходе II

**Ответ:** I игрок выигрывает при ходе (2, 3, 4) → (4, 5, 6)

0	1	2	3	4
		8,3,4		
		4,6,4	проигрыш 1 игрока (при любом продолжении)	
	4,3,4	4,3,8		
		6,5,6		
		4,6,4	проигрыш 1 игрока (при любом продолжении)	
	2,6,4	2,12,4		
2,3,4		2,6,8		
		4,8,6		
	2,3,8	проигрыш 1 игрока (при ходе 2 игрока 2,3,16)		
		8,5,6	выигрыш 1 игрока (при ходе 16,5,6)	
	4,5,6	4,10,6	выигрыш 1 игрока (при ходе 4,20,6)	
		4,5,12	выигрыш 1 игрока (при ходе 4,5,24)	
		6,7,8	выигрыш 1 игрока (при ходе 6,7,16)	

# ЕГЭ СЗ\_3\_2006

Два игрока играют в следующую игру. Перед ними лежат две кучки камней, в первой из которых 5, а во второй - 3 камня. У каждого игрока неограниченно много камней. Игроки ходят по очереди. Ход состоит в том, что игрок или удваивает число камней в какой-то куче, или добавляет 4 камня в какую-то кучу. Выигрывает игрок, после хода которого в одной из куч становится не менее 22 камней. Кто выигрывает при безошибочной игре обоих игроков - игрок, делающий первый ход, или игрок, делающий второй ход? Как должен ходить выигрывающий игрок? Ответ обоснуйте.

Выигрывает первый игрок. Своим первым ходом он должен удвоить количество камней во второй куче.

Для доказательства рассмотрим неполное дерево игры, оформленное в виде таблицы, где в каждой ячейке записаны пары чисел, разделенные запятой. Эти числа соответствуют количеству камней на каждом этапе игры, в первой и второй кучах соответственно.

	1 ход	2 ход	3 ход	
Стартовая позиция	I-й игрок (выигранный ход)	II-й игрок (все варианты хода)	I-й игрок (выигранный ход)	Пояснение
		10,6	<u>10,10</u>	Первый игрок выигрывает после любого ответа второго игрока, удвоив число камней в самой большой куче
		9,6	<u>9,10</u>	
	<u>5,6</u>	5,10	<u>9,10</u> или <u>10,10</u>	
5,3		5,12	<u>5,24</u>	

**Первые ходы (5,7); (9,3); (10,3) можно не рассматривать, т.к. все они приводят к победе второго игрока при его правильной игре**

Из таблицы видно, что при первом ходе (5,3)->(5,6) первый игрок выигрывает не позже, чем на третьем ходу при любом ответе второго игрока. Дерево игры рассматривает *все возможные* варианты.

# ЕГЭ СЗ\_2\_2006

Два игрока играют в следующую игру. Перед ними лежат две кучки камней, в первой из которых 4, а во второй - 3 камня. У каждого игрока неограниченно много камней. Игроки ходят по очереди. Ход состоит в том, что игрок или увеличивает в 3 раза число камней в какой-то куче или добавляет 2 камня в какую-то кучу. Выигрывает игрок, после хода которого общее число камней в двух кучах становится не менее 24 камней. Кто выигрывает при безошибочной игре обоих игроков - игрок, делающий первый ход или игрок, делающий второй ход? Каким должен быть первый ход выигрывающего игрока? Ответ обоснуйте.



**Содержание верного ответа и указания по оцениванию**  
(допускаются иные формулировки ответа, не искажающие его смысла)

Выигрывает второй игрок. Для доказательства рассмотрим неполное дерево игры.

Начальная позиция	1-й ход первого игрока	Выигрывающий ход второго игрока	Пояснение
	6,3	6,5	второй игрок выигрывает после любого ответа первого игрока, утроив число камней в самой большой куче
4,3	4,5	6,5	"-
	12,3	36,3	выигрыш второго игрока
	4, 9	4,27	"-

Из таблицы видно, что при любом первом ходе первого игрока у второго игрока имеется выигрывающий ход.



# Демо 2008

Два игрока играют в следующую игру. Перед ними лежат две кучки камней, в первой из которых 1, а во второй – 2 камня. У каждого игрока неограниченно много камней. Игроки ходят по очереди. Ход состоит в том, что игрок или увеличивает в 3 раза число камней в какой-то куче, или добавляет 2 камня в какую-то кучу. Выигрывает игрок, после хода которого общее число камней в двух кучах становится не менее 17 камней. Кто выигрывает при безошибочной игре обоих игроков – игрок, делающий первый ход, или игрок, делающий второй ход? Каким должен быть первый ход выигрывающего игрока? Ответ обоснуйте.

Выигрывает второй игрок.

Для доказательства рассмотрим неполное дерево игры, оформленное в виде таблицы, где в каждой ячейке записаны пары чисел, разделенные запятой. Эти числа соответствуют количеству камней на каждом этапе игры в первой и второй кучах соответственно.

	1 ход	2 ход	3 ход	4 ход	
Стартовая позиция	I-й игрок (все варианты хода)	II-й игрок (выигрышный ход)	I-й игрок (все варианты хода)	II-й игрок (один из вариантов)	Пояснение
1,2	3,2	<u>3,4</u>	9,4	<u>18,4</u>	Второй игрок выигрывает на четвертом ходу после любого ответа первого игрока, например, утроив число камней в самой большой куче
			5,4	<u>15,4</u>	
			3,12	<u>3,36</u>	
			3,6	<u>3,18</u>	
	1,4	<u>3,4</u>	Те же варианты третьего-четвертого ходов		
	1,6	<u>1,18</u>	Второй игрок выигрывает ответным ходом		

Таблица содержит *все возможные* варианты ходов первого игрока. Из неё видно, что при любом ходе первого игрока у второго имеется ход, приводящий к победе.

# ЕГЭ СЗ\_1 2008

Два игрока играют в следующую игру. Перед ними лежат две кучки камней, в первой из которых 6, а во второй - 5 камней. У каждого игрока неограниченно много камней. Игроки ходят по очереди. Ход состоит в том, что игрок увеличивает или в 2 раза, или в 3 раза число камней в какой-то куче. Выигрывает игрок, после хода которого общее число камней в двух кучах становится не менее 48 камней. Кто выигрывает при безошибочной игре обоих игроков - игрок, делающий первый ход, или игрок, делающий второй ход? Каким должен быть первый ход выигрывающего игрока? Ответ обоснуйте.

**Содержание верного ответа и указания по оцениванию  
(допускаются иные формулировки ответа, не искажающие его смысла)**

Выигрывает второй игрок.

Для доказательства рассмотрим неполное дерево игры, оформленное в виде таблицы, где в каждой ячейке записаны пары чисел, разделенные запятой. Эти числа соответствуют количеству камней на каждом этапе игры, в первой и второй кучах соответственно.

	1 ход	2 ход	3 ход	4 ход	
Стартовая позиция	I-й игрок (все варианты хода)	II-й игрок (выигрышный ход)	I-й игрок (все варианты хода)	II-й игрок (один из вариантов)	Пояснение
6,5	12,5	<u>12,10</u>	24,10	<u>72,10</u>	Второй игрок выигрывает на четвертом ходу, после любого ответа первого игрока, например, утроив число камней в самой большой куче
			36,10	<u>108,10</u>	
			12,20	<u>12,60</u>	
			12,30	<u>12,90</u>	
	6,10	<u>12,10</u>	Те же варианты третьего-четвертого ходов		
	18,5	<u>54,5</u>	Второй игрок выигрывает ответным ходом		
	6,15	<u>6,45</u>	Второй игрок выигрывает ответным ходом		

Таблица содержит *все возможные* варианты ходов первого игрока. Из неё видно, что при любом ходе первого игрока у второго имеется ход, приводящий к победе.

# ЕГЭ СЗ\_2 2008

Два игрока играют в следующую игру. Перед ними лежат две кучки камней, в первой из которых 3, а во второй - 6 камней. У каждого игрока неограниченно много камней. Игроки ходят по очереди. Ход состоит в том, что игрок или удваивает число камней в какой-то куче, или добавляет 2 камня в какую-то кучу. Выигрывает игрок, после хода которого общее число камней в двух кучах становится не менее 24 камней. Кто выигрывает при безошибочной игре обоих игроков - игрок, делающий первый ход, или игрок, делающий второй ход? Каким должен быть первый ход выигрывающего игрока? Ответ обоснуйте.



**Содержание верного ответа и указания по оцениванию**

**(допускаются иные формулировки ответа, не искажающие его смысла)**

Выигрывает первый игрок, своим первым ходом он должен добавить 2 камня в первую кучу. Для доказательства рассмотрим неполное дерево игры, оформленное в виде таблицы, где в каждой ячейке записаны пары чисел, разделенные запятой. Эти числа соответствуют количеству камней на каждом этапе игры, в первой и второй кучах соответственно.

	2 ход	3 ход	4 ход	5 ход	
Позиция после первого хода	II-й игрок (все варианты хода)	I-й игрок (выигрышный ход)	II-й игрок (все варианты хода)	I-й игрок (один из вариантов)	Пояснение
<b>5,6</b>	5,8	<b><u>7,8</u></b>	14,8	<b><u>28,8</u></b>	Первый игрок выигрывает на пятом ходу, после любого ответа второго игрока, например, удвоив число камней в самой большой куче
			9,8	<b><u>18,8</u></b>	
			7,16	<b><u>7,32</u></b>	
			7,10	<b><u>7,20</u></b>	
	7,6	<b><u>7,8</u></b>	Те же варианты четвертого-пятого ходов.		
5,12	<b><u>5,24</u></b>	Первый игрок выиграл.			

Таблица содержит *все возможные* варианты ходов второго игрока. Из неё видно, что при любом ответе второго игрока у первого имеется ход, приводящий к победе.



# ЕГЭ 2009

Два игрока играют в следующую игру. На координатной плоскости стоит фишка. Игроки ходят по очереди. В начале игры фишка находится в точке с координатами  $(3,2)$ . Ход состоит в том, что игрок перемещает фишку из точки с координатами  $(x,y)$  в одну из трех точек: или в точку с координатами  $(x+3,y)$ , или в точку с координатами  $(x,y+2)$ , или в точку с координатами  $(x,y+4)$ . Выигрывает игрок, после хода которого расстояние от фишки до точки с координатами  $(0,0)$  больше 12 единиц. Кто выигрывает при безошибочной игре обоих игроков – игрок, делающий первый ход, или игрок, делающий второй ход? Каким должен быть первый ход выигрывающего игрока? Ответ обоснуйте.

Выигрывает первый игрок, своим первым ходом он должен поставить фишку в точке с координатами (3,4). Для доказательства рассмотрим неполное дерево игры, оформленное в виде таблицы, где в каждой ячейке координаты фишки на каждом этапе игры.

1 ход	2 ход	3 ход	4 ход	5 ход
Позиция после первого хода	II-й игрок (все варианты хода)	I-й игрок (выигрышный ход)	II-й игрок (все варианты хода)	I-й игрок (один из вариантов)
<u>3,4</u>	6,4	<u>6,6</u>	9,6	<u>12,6</u>
			6,8	<u>9,8</u>
			6,10	<u>9,10</u>
	3,6	<u>6,6</u>	Те же варианты 4-5 хода	
	3,8	<u>3,12</u>	Первый игрок выигрывает ответным ходом	

Таблица содержит *все возможные* варианты ходов второго игрока. Из неё видно, что при любом ответе второго игрока у первого имеется ход, приводящий к победе.