

Нелинейная динамика тяжелого сжимаемого газа в приближении мелкой воды

Петросян А.С, Карельский К.В, Черняк
А.В.

5768687@gmail.com

501 сектор
Институт Космических Исследований
РАН

Таруса, 20 октября 2011

Содержание

1. Введение.
2. Исходная система уравнений движения тяжелого сжимаемого газа со свободной поверхностью.
3. Осредненная система уравнений – мелкая вода.
4. Постановка задачи Римана.
5. Решение Задачи Римана.
6. Анализ результатов.
7. Наклонная поверхность.
8. Заключение.

1. Статическая сжимаемость

Сжимаемость (Gauthier, Creurer):

- динамическая (акустические эффекты)
 $M \geq 1$ или высокочастотные колебания
- статическая (стратификация)

$$H \sim O(H_S), H_S = \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} \right)^{-1} - \text{приведенная высота.}$$

На этой высоте плотностная стратификация становится существенной (Batchelor «Введение в динамику жидкости»)

1. Применение

Сжимаемость (Gauthier, Creurer):

- динамическая (акустические эффекты)
 $M \geq 1$ или высокочастотные колебания
- статическая (стратификация)

$H \sim O(H_S)$, $H_S = \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} \right)^{-1}$ - приведенная высота.

На этой высоте плотностная стратификация становится существенной (Batchelor «Введение в динамику жидкости»)

2. Исходная система уравнений движения тяжелого сжимаемого газа со свободной поверхностью.

- Уравнения движения Эйлера в поле силы тяжести
- Политропный совершенный сжимаемый газ, непрерывные процессы адиабатические.

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} \\ \rho \frac{dw}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p = \rho RT \\ E = c_v T \\ dE = -pd \left(\frac{1}{\rho} \right) \end{array} \right.$$

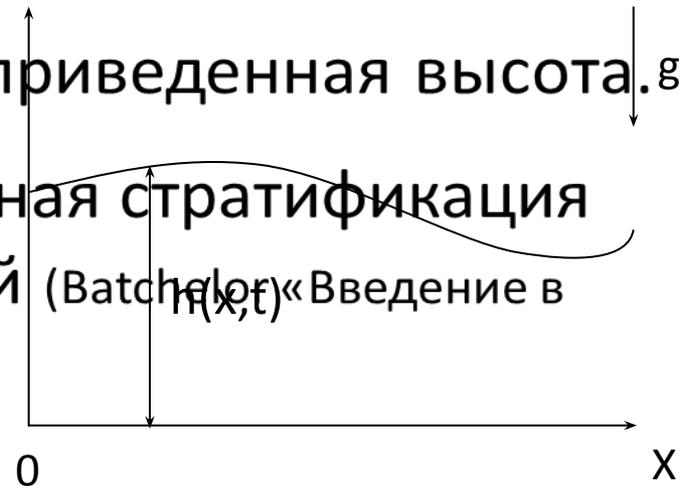
3. Приближение мелкой воды.

Сжимаемость (Gauthier, Creurer):

- динамическая (акустические эффекты)
 $M \geq 1$ или высокочастотные колебания

$$\left\{ \begin{array}{l} w|_{z=0} = 0 \\ w|_{z=h} \neq 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{статическая (стратификация)} \\ H \sim \frac{\partial h}{\partial t} \text{ (Batchelor)}, H_S \equiv \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} \right)^{-1} - \text{приведенная высота.} \end{array}$$

На этой высоте плотностная стратификация становится существенной (Batchelor «Введение в динамику жидкости»)



Сжимаемость (Gauthier, Creurer):

- динамическая (акустические эффекты)
 $M \geq 1$ или высокочастотные колебания
- статическая (стратификация)

$H \sim O(H_S)$, $H_S = \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} \right)^{-1}$ - приведенная высота.
 На этой высоте плотностная стратификация становится существенной (Batchelor «Введение в динамику жидкости»)

3. Осредненные уравнения по высоте

Сжимаемость (Gauthier, Creurer):

- динамическая (акустические эффекты) $M \geq 1$ или высокочастотные колебания $\sqrt{gh_0}$
- статическая (стратификация) $H \approx O(H_s)$, $H_s = \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz}\right)^{-1}$ - приведенная высота. На этой высоте плотностная стратификация становится существенной (Batchelor «Введение в динамику жидкости»)

$$\begin{cases} \frac{\partial l}{\partial t} + \frac{\partial(lu)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{a^2}{l} \frac{\partial l}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} l \equiv \frac{1}{B} \left[\left(1 + h \cdot \frac{B}{A} \right)^A - 1 \right] = h \bar{\rho} \\ a \equiv \sqrt{l \left(1 + l \cdot B \right)^{\frac{1-A}{A}}} \end{cases}$$

$$A = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \quad B = \frac{h_0}{H_s} \quad H_s = \frac{RT_i}{g}$$

4. Постановка задачи Римана.

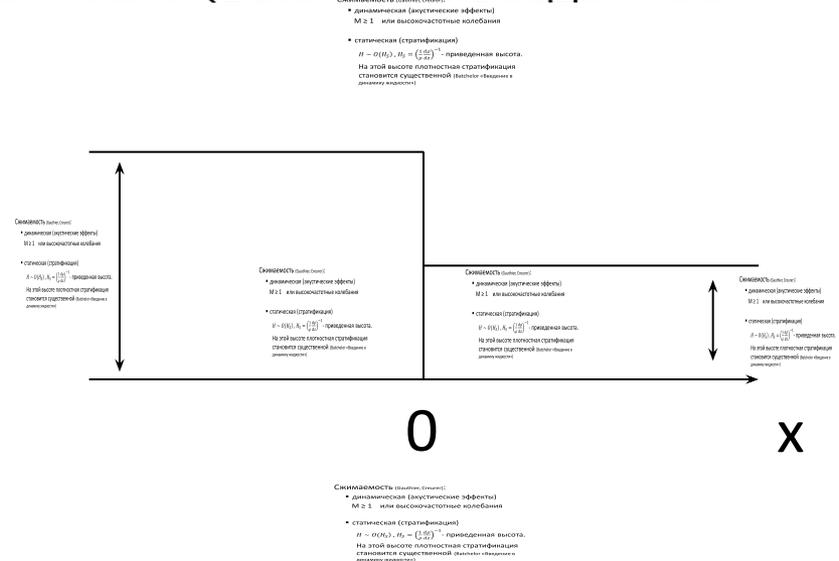
Сжимаемость (Gauthier, Creurer):

- динамическая (акустические эффекты)
 $M \geq 1$ или высокочастотные колебания
- статическая (стратификация)

$$H \sim O(H_S), \quad H_S = \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} \right)^{-1} - \text{приведенная высота.}$$

На этой высоте плотностная стратификация становится существенной (Batchelor «Введение в динамику жидкости»)

$$\begin{cases} \frac{\partial l}{\partial t} + \frac{\partial(lu)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{a^2}{l} \frac{\partial l}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases}$$



5. Решение Задачи Римана.

1. Нахождение всех автомодельных непрерывных решений – центрированные волны Римана.
2. Разрывные решения. Соотношения Ранкина-Гюгонио. Ударные волны.
3. «Конструирование» решения по начальным условиям

5. Непрерывные решения. Простые волны Римана

$$\begin{cases} d(u + \psi(l)) = 0, \frac{dx}{dt} = u + a(l) \\ d(u - \psi(l)) = 0, \frac{dx}{dt} = u - a(l) \end{cases} \quad \psi(x, t) \equiv \psi(l) \equiv \int \frac{a(l)}{l} dl$$

• Инварианты

Римана

Сжимаемость (Gauthier, Creurer):

- динамическая (акустические эффекты)
 $M \geq 1$ или высокочастотные колебания

- статическая (стратификация)

$H \sim O(H_S)$, $H_S = \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz}\right)^{-1}$ - приведенная высота.

На этой высоте плотностная стратификация становится существенной (Batchelor «Введение в динамику жидкости»)

Сжимаемость (Gauthier, Creurer):

- динамическая (акустические эффекты)
 $M \geq 1$ или высокочастотные колебания

- статическая (стратификация)

$H \sim O(H_S)$, $H_S = \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz}\right)^{-1}$ - приведенная высота.

На этой высоте плотностная стратификация становится существенной (Batchelor «Введение в динамику жидкости»)

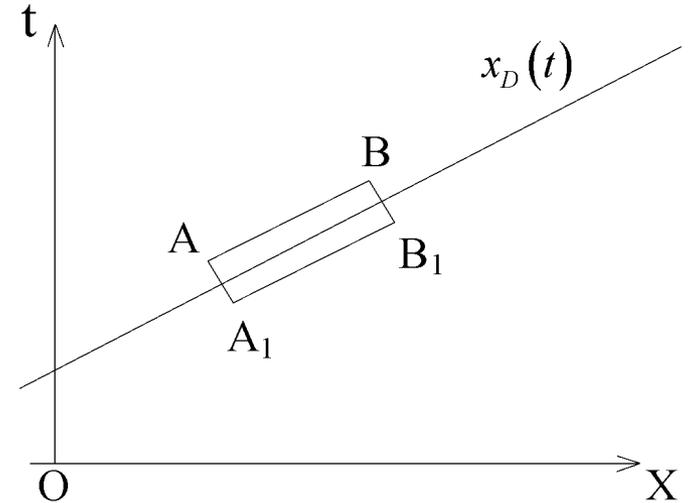
- Волны Римана, прямые характеристики

5. Разрывные решения. Соотношения Ранкина-Гюгонио. Ударные волны.

- У.В. Распространяется по газу с параметрами 1,

оставляя позади газ с параметрами 2

$$\left\{ \begin{array}{l} D = \frac{l_2 u_2 - l_1 u_1}{l_2 - l_1} \\ u_2 = u_1 + \text{Sign}(D - u_1) \sqrt{(\varphi(l_2) - \varphi(l_1)) \left(\frac{1}{l_1} - \frac{1}{l_2} \right)} \\ l_2 \geq l_1 \end{array} \right.$$



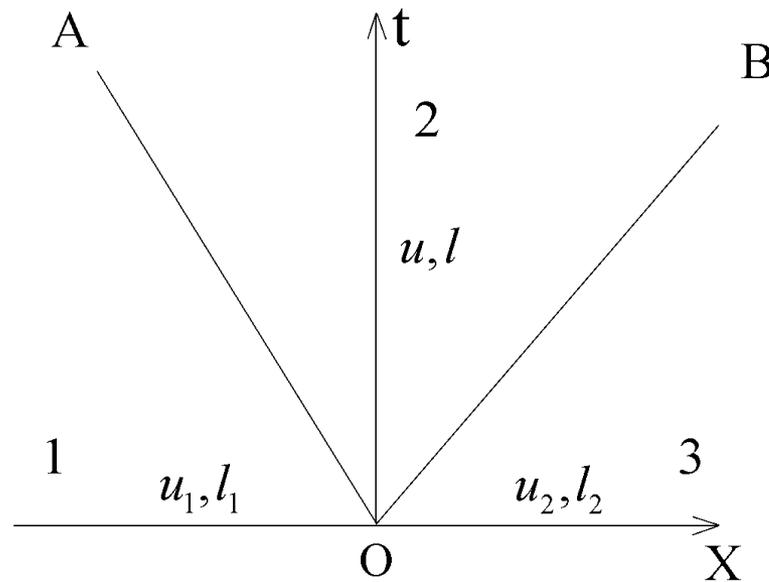
Сжимаемость (Gauthier, Creurer):

- динамическая (акустические эффекты)
 $M \geq 1$ или высокочастотные колебания
- статическая (стратификация)
 $H \sim O(H_S)$, $H_S = \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} \right)^{-1}$ - приведенная высота.
 На этой высоте плотностная стратификация становится существенной (Batchelor «Введение в динамику жидкости»)

5. «Конструирование» решения по начальным условиям

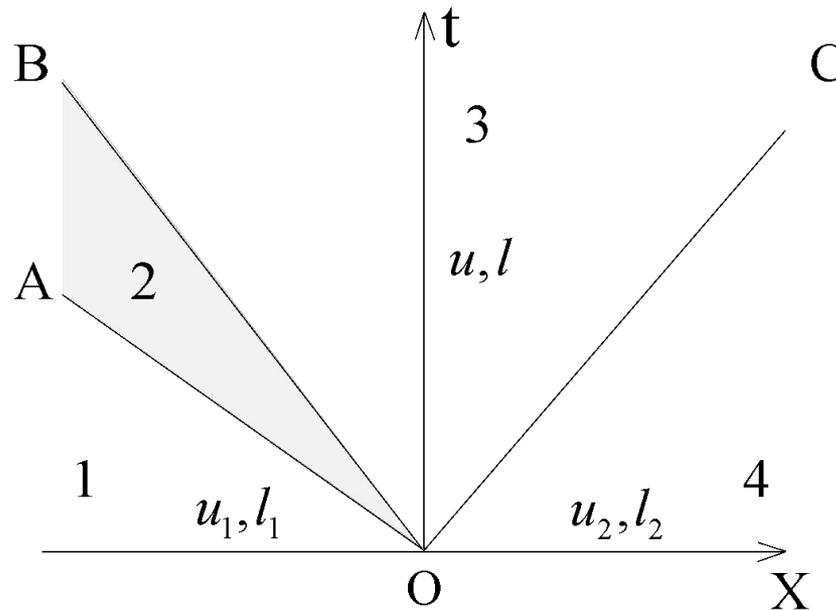
1. Система уравнений и интегральные следствия (соотношения Ранкина-Гюгонио) инвариантны относительно замены
Значит, если решение единственно и существует – то оно автомодельно.
2. Существует автомодельное решение – строим его.

5. Автомодельное решение. две ударные волны



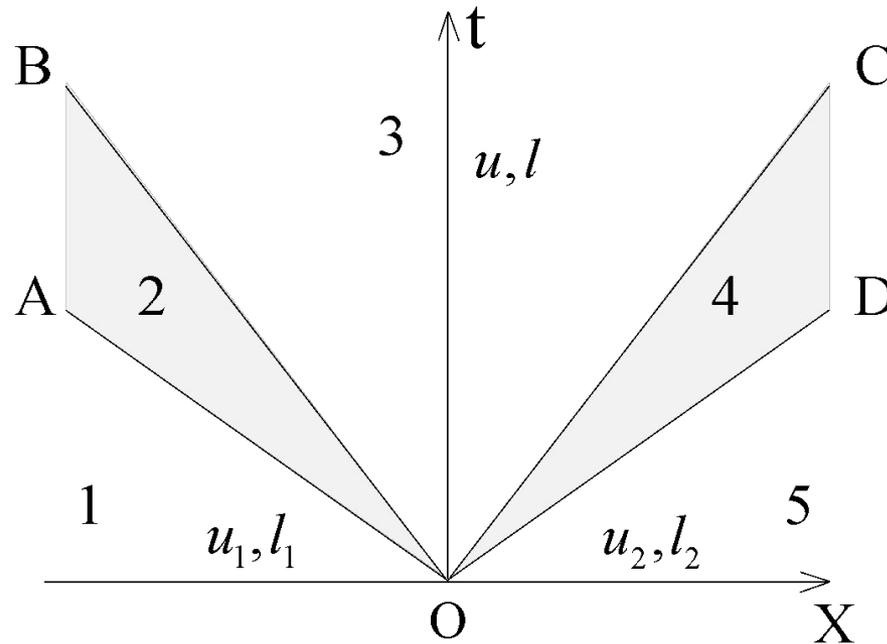
$$u_1 - u_2 \geq \sqrt{(\varphi(l_1) - \varphi(l_2)) \left(\frac{1}{l_2} - \frac{1}{l_1} \right)}$$

5. Автомоделное решение. волна разрежения – ударная волна



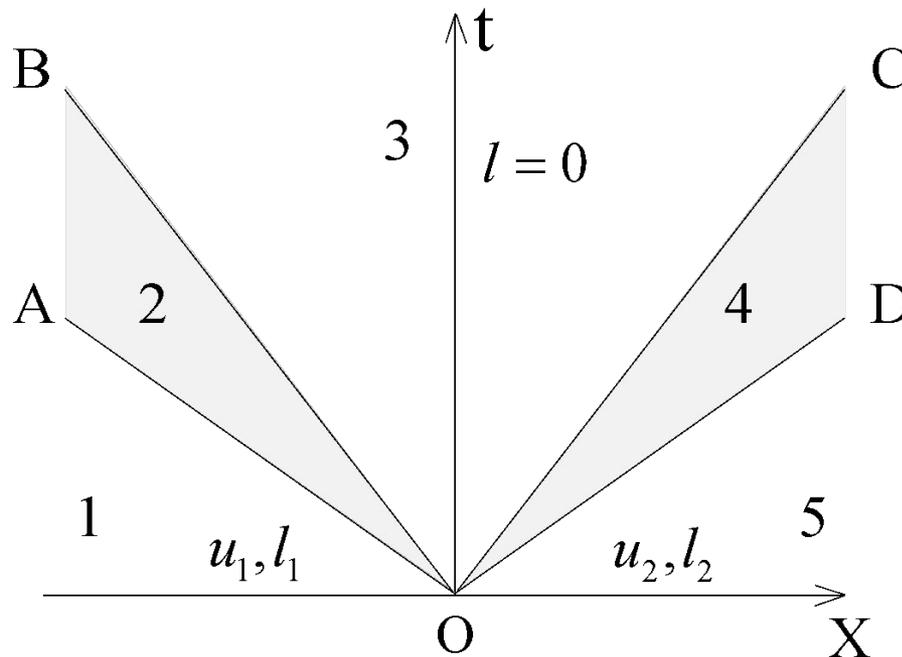
$$-(\psi(l_1) - \psi(l_2)) \leq u_1 - u_2 \leq \sqrt{(\varphi(l_1) - \varphi(l_2)) \left(\frac{1}{l_2} - \frac{1}{l_1} \right)}$$

5. Автомодельное решение. Две волны разрежения



$$-(\psi(l_1) + \psi(l_2)) < u_1 - u_2 \leq -(\psi(l_1) - \psi(l_2))$$

5. Автомодельное решение. Две волны разрежения, зона вакуума



$$u_1 - u_2 \leq -(\psi(l_1) + \psi(l_2))$$

6. Анализ результатов. Сравнение с классической мелкой водой.

$$B = \frac{h_0}{H_s}$$

$$l = h + \frac{(A-1)}{2A} h^2 B + \frac{(A-1)(A-2)}{6A^2} h^3 B^2 + o(B^2), B \rightarrow 0$$

$$a^2 = h - \frac{(A-1)}{2A} h^2 B + \frac{(A^2-1)}{6A^2} h^3 B^2 + o(B^2), B \rightarrow 0$$

$$\varphi(h) = \frac{1}{2} h^2 + \frac{(A-1)}{6A} h^3 B + \frac{(A-1)(A-2)}{24A^2} h^4 B^2 + o(B^2), B \rightarrow 0$$

$$\psi(h) = 2 \cdot h^{\frac{1}{2}} + \frac{(A-1)}{6A} h^{\frac{3}{2}} B - \frac{(A-1)(19A-23)}{240A^2} h^{\frac{5}{2}} B^2 + o(B^2), B \rightarrow 0$$

6. Анализ результатов. Сравнение с классической мелкой водой.

- Уменьшилась область начальных условий, при которых реализуется конфигурация «две волны разрежения, зона вакуума».
- Начальные условия, при которых в случае классической мелкой воды реализуется конфигурация «две волны разрежения, зона вакуума» теперь реализуют конфигурацию «две волны разрежения».

$$\begin{cases} u_1 - u_2 \leq -2(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}) \\ -2(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}) - \frac{(A-1)}{6A} \left(h_1^{\frac{3}{2}} + h_2^{\frac{3}{2}} \right) B + o(B) \leq u_1 - u_2 \end{cases}$$

6. Анализ результатов. Сравнение с классической мелкой водой.

- Увеличилась область начальных условий, при которых реализуется конфигурация «волна разрежения, ударная волна».
- Начальные условия, при которых в случае классической мелкой воды реализуются конфигурация «две волны разрежения»

$$-2\left(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}\right) - \frac{(A-1)}{6A}\left(h_1^{\frac{3}{2}} - h_2^{\frac{3}{2}}\right)B + o(B) \leq u_1 - u_2 \leq -2\left(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}\right)$$

и конфигурация «две ударные

волны»

$$(h_1 - h_2) \sqrt{\frac{(h_1 + h_2)}{2h_1h_2}} \leq u_1 - u_2 \leq (h_1 - h_2) \sqrt{\frac{(h_1 + h_2)}{2h_1h_2}} \left(1 + \frac{(A-1)(h_1^3 - h_2^3)}{6A(h_1^2 - h_2^2)}B\right) + o(B)$$

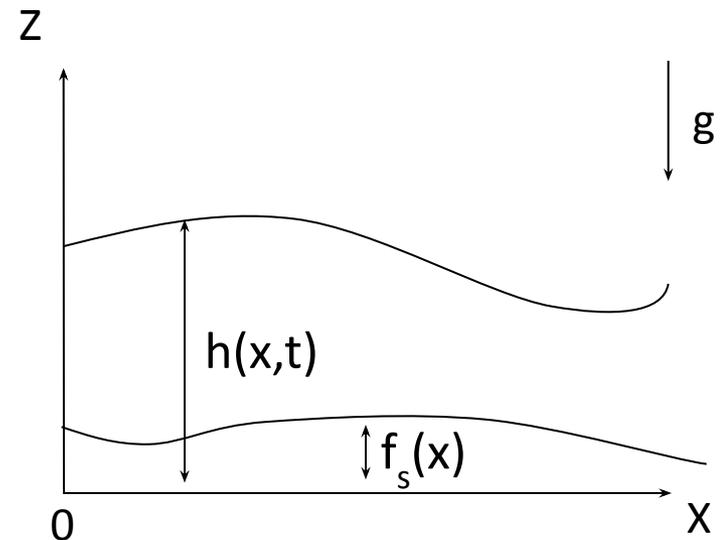
теперь «волна разрежения, ударная

волна»

7. Произвольная поверхность.

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial t} + L \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a^2}{L} \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial f_s}{\partial x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} du + d\psi = -\frac{df_s}{dx} dt, \frac{dx}{dt} = u + a \\ du - d\psi = -\frac{df_s}{dx} dt, \frac{dx}{dt} = u + a \end{cases}$$



7. Простые волны Римана.

$$\left\{ \begin{array}{l} dr = -\frac{df_s}{dx} dt, \frac{dx}{dt} = u + a \\ ds = -\frac{df_s}{dx} dt, \frac{dx}{dt} = u - a \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} r = u + \psi \\ s = u - \psi \end{array} \right.$$

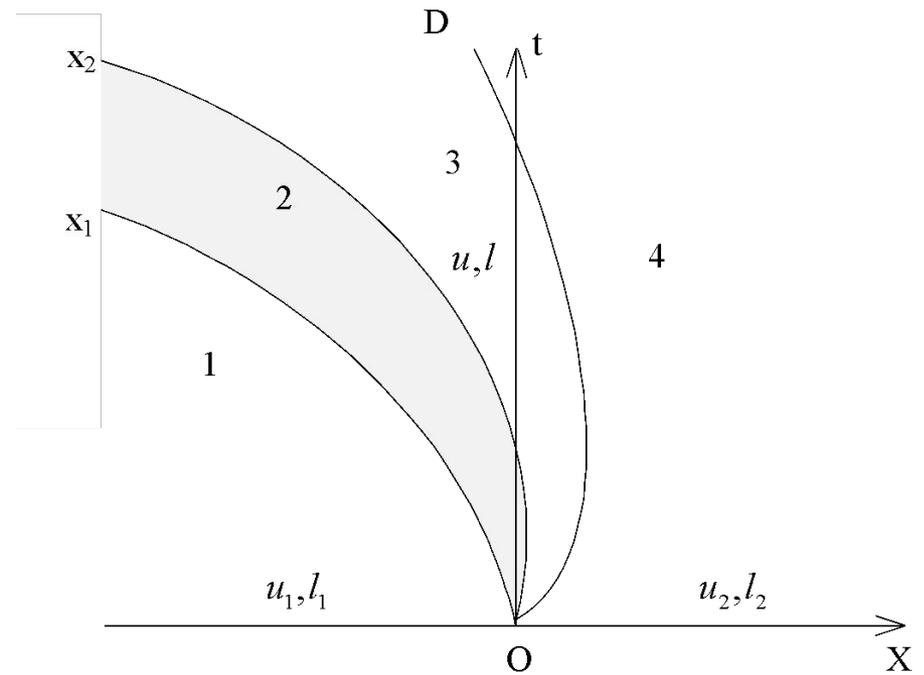
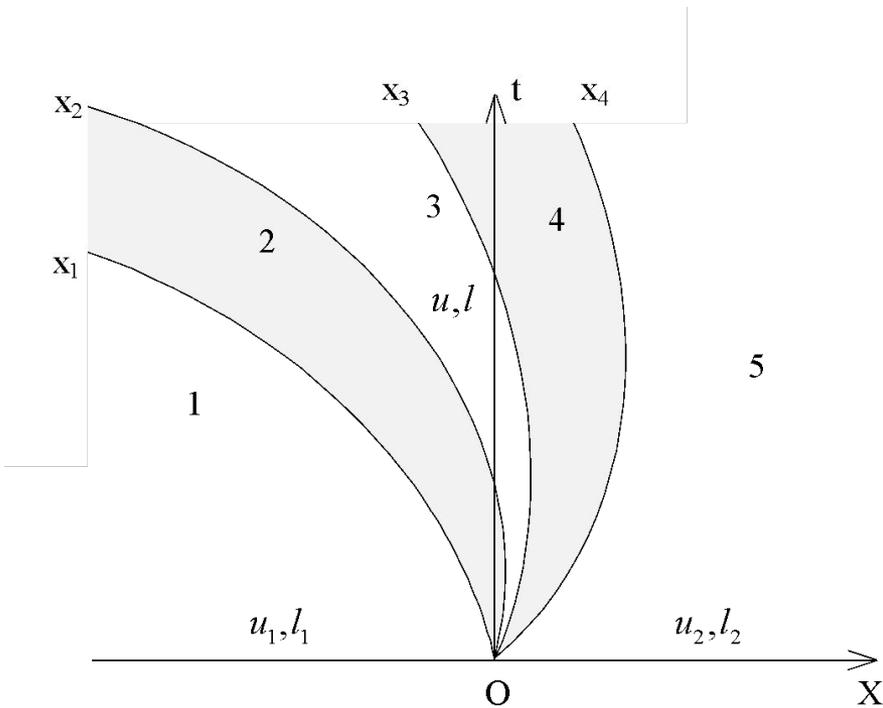
Простая волна – одно из уравнений
выполняется

тождественно во всей области $f_s(x) = kx + f_s(0)$

Откуда следует линейность

$$\left\{ \begin{array}{l} r(x(t), t) = -kt + r(x(0), 0) \\ s = -kt + s_0 \\ x(t) = -\frac{k}{2} \cdot t^2 + \frac{r(x(0), 0) + s_0 + 2a}{2} \cdot t + x(0) \\ a = \text{const} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{- Простая r-} \\ \text{волна} \end{array}$$

8. Задача распада Разрыва



9. Заключение

- Учет сжимаемости в мелкой воде приводит к улучшению предсказаний скорости распространения газового потока с примесью твердых частиц.
- Альтернатива многослойным моделям.
- Решение задачи распада разрыва позволяет использовать численные методы типа Годунова, без выделения разрывов.

Спасибо за внимание!

Газ с твердыми частицами

Сжимаемость (Gauthier, Creurer):

- динамическая (акустические эффекты)
 $M \geq 1$ или высокочастотные колебания
- статическая (стратификация)

$$H \sim O(H_S), H_S = \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} \right)^{-1} - \text{приведенная высота.}$$

На этой высоте плотностная стратификация становится существенной (Batchelor «Введение в динамику жидкости»)

Газ с твердыми частицами

Сжимаемость (Gauthier, Creurer):

динамическая (акустические эффекты)

Сжимаемость (Gauthier, Creurer):

- динамическая (акустические эффекты)
- $M \geq 1$ или высокочастотные колебания

Сжимаемость (Gauthier, Creurer):

- динамическая (акустические эффекты)
- $M \geq 1$ или высокочастотные колебания

- статическая (стратификация)

$$H \sim O(H_S), H_S = \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz}\right)^{-1} \text{ - приведенная высота.}$$

На этой высоте плотностная стратификация становится существенной (Batchelor «Введение в динамику жидкости»)

- статическая (стратификация)

На этой высоте плотностная стратификация становится существенной (Batchelor «Введение в динамику жидкости»)

Сжимаемость (Gauthier, Creurer):

- динамическая (акустические эффекты)
- $M \geq 1$ или высокочастотные колебания

Сжимаемость (Gauthier, Creurer):

- динамическая (акустические эффекты)
- $M \geq 1$ или высокочастотные колебания

- статическая (стратификация)

$H \sim O(H_S), H_S = \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz}\right)^{-1}$ - приведенная высота. На этой высоте плотностная стратификация становится существенной (Batchelor «Введение в динамику жидкости»)

- статическая (стратификация)

$$H \sim O(H_S), H_S = \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz}\right)^{-1} \text{ - приведенная высота.}$$

На этой высоте плотностная стратификация становится существенной (Batchelor «Введение в динамику жидкости»)

статическая (стратификация)

$$\rho_p = 2000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, \rho_g = 0.4 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} (500 \text{ K}), \phi = 0,96 \quad (\text{Woods, 1995})$$

$$H \sim O(H_S), H_S = \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz}\right)^{-1} \text{ - приведенная высота.}$$

Сжимаемость (Gauthier, Creurer):

- динамическая (акустические эффекты)
- $M \geq 1$ или высокочастотные колебания
- статическая (стратификация)

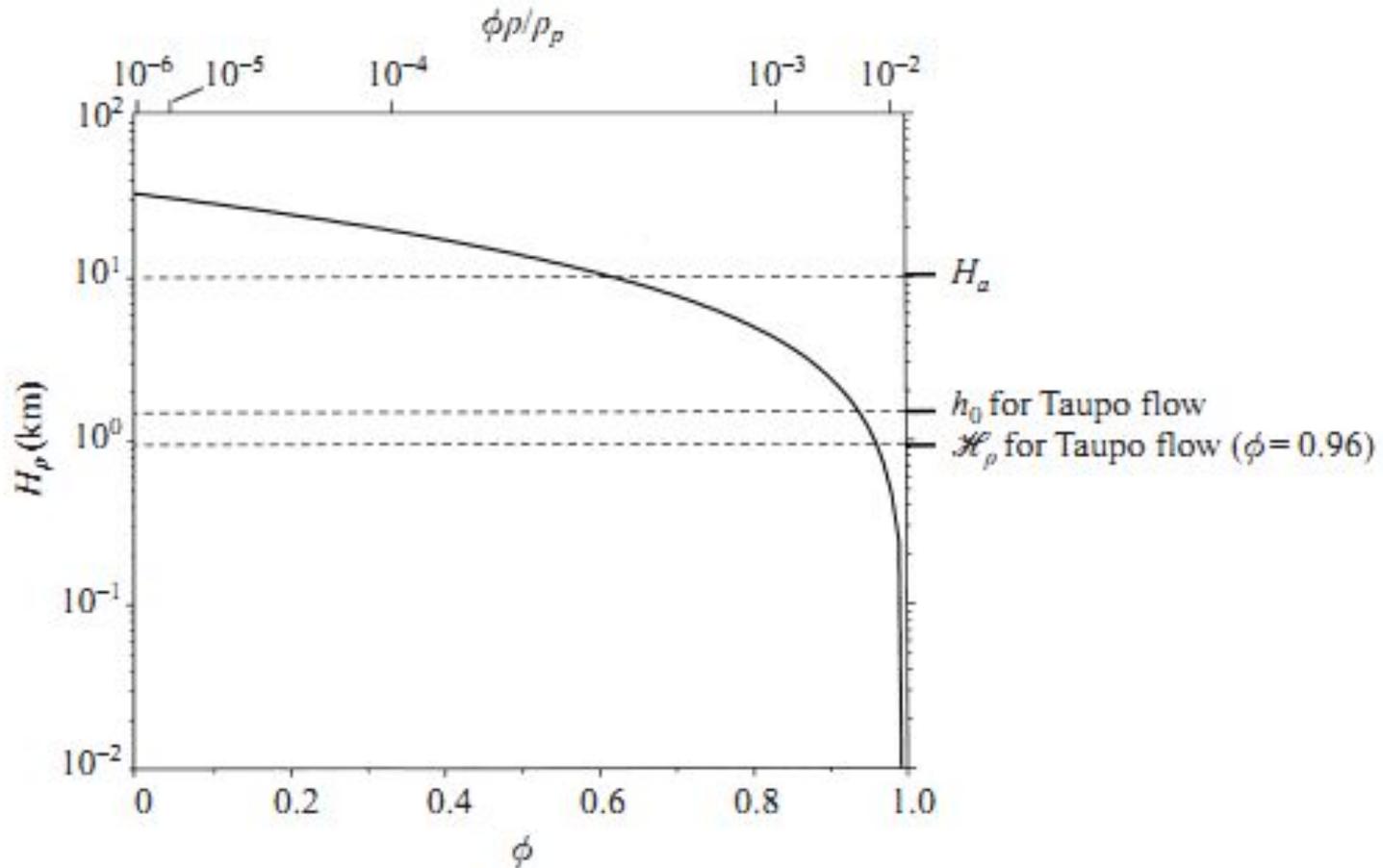
$$H \sim O(H_S), H_S = \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz}\right)^{-1} \text{ - приведенная высота.}$$

На этой высоте плотностная стратификация становится существенной (Batchelor «Введение в динамику жидкости»)

На этой высоте плотностная стратификация становится существенной (Batchelor «Введение в динамику жидкости»)

станвится существенной (Batchelor «Введение в динамику жидкости»)

Газ с твердыми частицами



Атмосфера

