Вероятности исходов единичных испытаний испытаний

Статистическая частота и вероятность

Численную характеристику исходов испытаний назвали *вероятностью*.

Поэтому и наука об испытаниях со случайными исходами называется *теорией вероятностей*.

В основе определения вероятностей исходов испытаний лежит объективный закон природы. Он называется ЗАКОНОМ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ, потому что его действие можно обнаружить при анализе исходов большого количества повторяющихся одинаковых испытаний.

Будем называть повторяющиеся при одних и тех же условиях испытания ***повторными испытаниями***, а информацию об исходах повторных испытаний – ***статистикой***.

Пусть проводят многократные повторные испытания, в каждом из которых возможны n исходов: $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Например, игральный кубик (n = 6). С увеличением количества бросков все грани кубика должны рано или поздно выпасть. То, как часто выпадают грани кубика, можно характеризовать частотой их появления.

Если при количестве бросков N=1000 грань с четырьмя очками выпала 170 раз, то частота ее появления равна

$$P_{1000}\{4\} = \frac{170}{1000} = 0{,}17.$$

Статистическая частота появления грани

Количество бросков

Условное обозначение исхода, для которого посчитана частота (исход e_4 – 4)

Для любого N справедливо, что $m_1+m_2+m_3+m_4+m_5+m_6 = N$,
где m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6 – сколько раз за N бросков выпали соответственно грани с одним, двумя очками, …, шестью очками.

В общем случае, когда в испытании n исходов $m_1+m_2+\ldots+m_n = N$,

а **статистическая частота любого исхода** e_k из множества исходов

испытания $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ определяется по формуле $P_N\{e_k\} = \frac{m_k}{N}$

где, m_k – сколько раз в N повторных испытаниях появился исход e_k.

В процессе повторных испытаний статистические частоты их исходов постоянно меняются. Если статистика испытаний невелика, можно наблюдать сильные изменения статистических частот исходов с увеличением N. Оказывается, что с увеличением количества повторных испытаний изменения статистических частот становятся незначительными и сосредотачиваются вблизи некоторого числа p.

В этом и заключается проявление закона больших чисел

Под вероятностью исхода испытания e_k понимают число p_k, вблизи которого сосредотачиваются колебания значений статистической частоты исхода e_k с увеличением количества повторных испытаний.

Для любого случайного исхода испытания e_k существует вероятность p_k, причем $0 < p_k < 1$

Сумма вероятностей всех случайных исходов испытания равна единице $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$

$$P_1\{e_1\} + P_2\{e_2\} + \ldots + P_N\{e_n\} = \frac{m_1}{N} + \frac{m_2}{N} + \ldots + \frac{m_n}{N} =$$

$$= \frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}{N} = \frac{N}{N} = 1$$

Равновероятные исходы единичных испытаний

Если вероятности всех исходов испытаний равны между собой, то их значение равно единице, деленной на количество исходов испытания.

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p$$

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = \underbrace{p + p + \ldots + p}_{\text{n слагаемых}} = np = 1$$

$$p = \frac{1}{n}$$

Симметричная монета

При броске монеты обе стороны монеты имеют одинаковые шансы выпасть. Поэтому два исхода броска (орел или решка) считаются равновероятными, и

$p_1 = p_2 = 0{,}5$

Опыт показывает, что реальные монеты можно считать симметричными

Симметричный игральный кубик

Игральные кубики изготавливаются симметричными. Симметрия граней обеспечивает равную вероятность выпадения любой из граней при броске кубика. Вероятности исходов броска равны между собой.

$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = \frac{1}{6}$

Гипотеза о равновероятности исходов броска игрального кубика подтверждается экспериментально.

Этот рисунок является наглядной иллюстрацией закона больших чисел

$\frac{1}{6}$

По горизонтальной оси отложено количество бросков игрального кубика N (количество испытаний), а по вертикальной – соответствующие им статистические частоты.

С увеличением количества испытаний статистическая частота появления одной грани сосредотачивается вблизи ее вероятности.

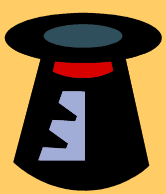
Гипотеза о равновероятности исходов броска игрального кубика подтверждается экспериментально

Единичные урновые испытания

К равновероятным относятся исходы испытаний, в которых из какой-то совокупности схожих предметов выбирается один. Такие испытания называют урновыми.

Например, в закрытом ящике находится n шаров.
Извлекают наугад один шар.
Шансы быть извлеченными у всех шаров одинаковые, поэтому и вероятности исходов испытания равны между собой и рассчитываются

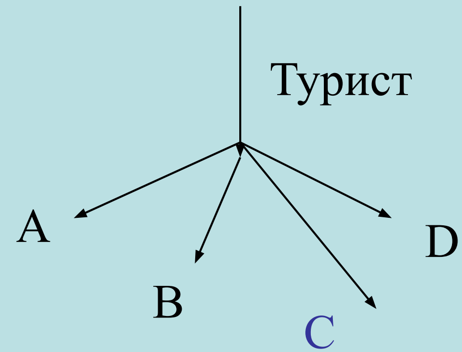
как $$p = \frac{1}{n}$$



Выбор маршрута наугад

Исходы выбора маршрута наугад будем считать равновероятными. Значит каждый вариант продолжения движения может быть выбран с одинаковым успехом.

Какова вероятность, что турист направится в пункт С?



Ответ: Вероятность попадания туриста в пункт С равна $\frac{1}{4}$

Проверь себя!

1

2

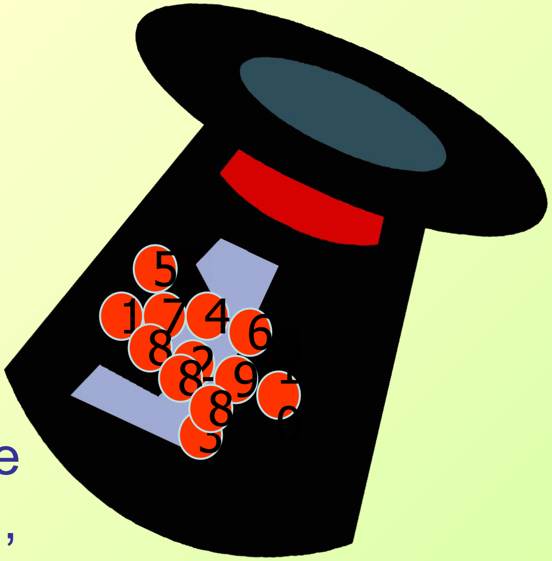
3

4

5

6

В урне лежат десять пронумерованных шаров (у них номера с первого по десятый).
Извлекают один шар наугад.
Какова вероятность, что извлекли шар с номером «1»?

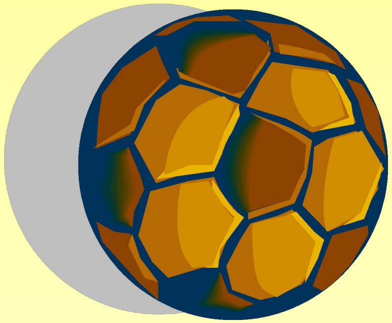


Решение:

В испытании возможно 10 исходов.
Все эти исходы равновероятны, и по формуле «единичного урнового испытания», находим, что $p_1=1/10$

Ответ: $P_1=1/10$

Капитаны двух футбольных команд подбрасывали монеты разыгрывают право выбора ворот.
Какова вероятность выиграть право выбора ворот у каждого из них ?



У такого единичного испытания два равновероятных исхода, значит вероятность выиграть право выбора ворот у каждого капитана равна ½.

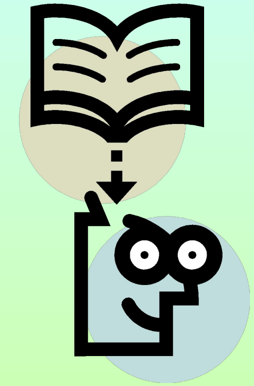
Бросок монеты

O e_1

P e_2

Ответ: 1/2

Школьник загадал какое-то число от одного до пяти.
Какова вероятность того, что он загадал число три.



Возможны четыре исхода: $e_1=1$; $e_2=2$;……; $e_5=5$.
Все исходы равновероятны, и, следовательно, вероятность того, что школьник загадал число три равна одной пятой.

Ответ:
Вероятность того, что школьник загадал число три равна одной пятой.

Шахматисты Иванов и Петров играют между собой одну партию. Шансы у каждого шахматиста на победу и ничью в партии одинаковы.
Какова вероятность того, что победит Иванов?

Решение:

В партии возможны три исхода:
победа Иванова,
победа Петрова,
ничья.

Все исходы партии равновероятны. Поэтому вероятность победы Иванова равна 1/3.

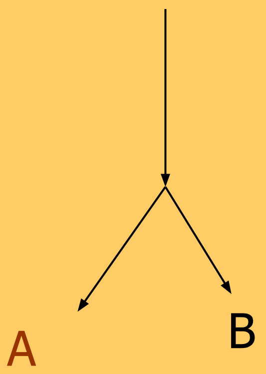
Ответ:

Вероятность того, что в партии победит Иванов равна 1/3.

Группа туристов на развилке выбирает дальнейший маршрут движения наугад.

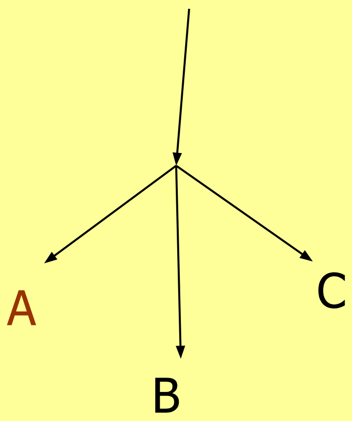
Какова вероятность их прихода в пункт А для случаев, показанных ниже.

1



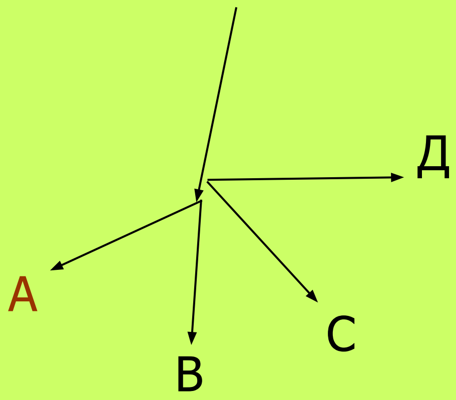
Ответ: 1/2

2



Ответ: 1/3

3



Ответ: 1/4

Неравновероятные исходы единичных испытаний

Если нет оснований считать исходы испытаний равновероятными, то их вероятности определяют теоретическими расчетами или экспериментально.

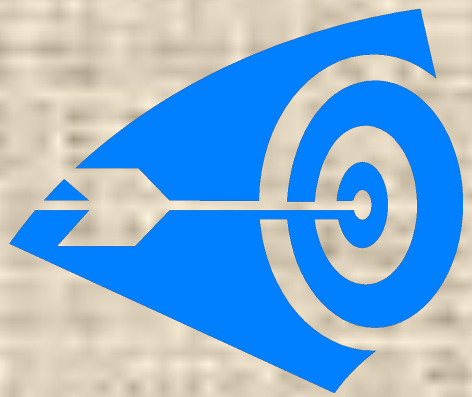
Точность и надежность определения вероятности зависит от количества повторных испытаний. Оценка этой точности является одной из задач, решаемых теорией вероятностей.

При экспериментальном подходе за вероятность исхода испытания принимают значение его статистической частоты за все проведенные N повторных испытаний.

$$p_k = P_N\{e_k\}$$

Примеры:

1. Стрелок сделал 200 выстрелов по мишени и попал в неё 180 раз. Чему равны вероятности попадания и промаха при одном выстреле стрелка?



Решение:

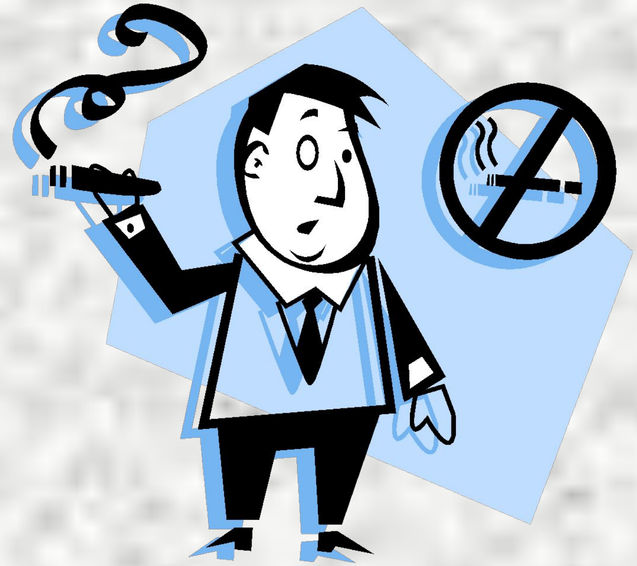
При одном выстреле лучника возможно два исхода: e_1=П (лучник попал), e_2=Н(лучник не попал).

Лучник сделав 200 выстрелов попал всего 180 раз и, соответственно, 20 раз он не попал по мишени. Вероятность исхода e_1 и e_2 оцениваем из равенства $p_1=P_{200}$ {П}= 180/200=0,9; $p_2=P_{200}$ {Н}=20/200=0,1.

Ответ:

Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,9, а вероятность промаха при одном выстреле равен 0,1.

2. Опрос 300 учеников школы №1959 показал, что 198 из них не курят.
Оцените вероятность, что взятый наугад ученик школы №1959 курит?



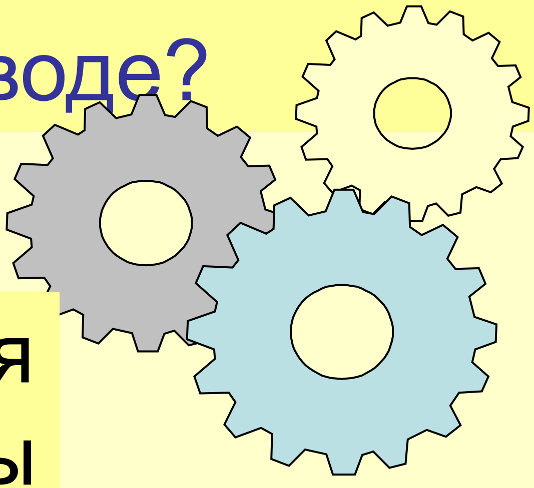
Решение:

Вероятность того, что взятый наугад ученик курит равна

$p_1 = P_{300}\{К\} = 198/300 = 0{,}66.$

Ответ:
Вероятность того, что взятый наугад ученик курит 0,66.

3. В партии из 1700 деталей 51 деталь оказалась бракованной. Оцените вероятность изготовления бракованной детали на заводе?



Решение:

Вероятность изготовления бракованной детали мы можем найти по формуле:

$p_1 = P_{1700}\{Б\} = 51/1700 = 0{,}03$

Ответ:

Вероятность изготовления бракованной детали на заводе равна 0,03.

4. Оцените вероятности исходов испытания, если при 1000 повторных испытаний оказалось, что:

1. В испытании три исхода e_1, e_2, e_3, исход e_1 появился 350 раз, а исход e_2 – в 40% испытаний.

$p_1=0,35$
$p_2=0,4$
$p_3=0,25$

2. В испытании пять исходов: e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, исход e_5 зафиксирован 250 раз, исход e_2 зафиксирован в 12% случаев, а исходы e_1, e_3, e_4 появились одинаковое количество раз.

Сумма всех вероятностей равна 1, поэтому

$p_1= 0,21$
$p_2= 0,12$
$p_3= 0,21$
$p_4= 0,21$
$p_5= 0,25$

Телефонный номер

- Набирая номер телефона, абонент забыл последние три цифры и, помнил лишь, что эти цифры разные, набрал их наугад. Найти вероятность того что набраны нужные цифры.

Решение

Чтобы найти вероятность того, что набраны нужные три цифры, надо знать количество исходов такого испытания. Нужно выбрать три цифры из десяти возможных, при том, что порядок цифр важен.

Число размещенй из n элементов по m вычисляется по формуле

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

В нашем случае m = 10, а n = 3, значит $A_{10}^{3} = \frac{10!}{(10-3)!} = 720$

Значит существует 720 равновероятных исходов, а, следовательно, вероятность набрать нужный номер равна

$$\frac{1}{720}$$