

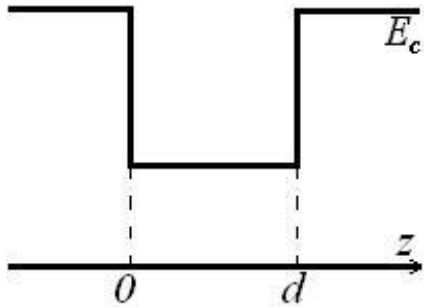


Образовательный семинар аспирантов и студентов

Обменное усиление g -фактора в двумерном электронном газе

Криштопенко С.С.

Одноэлектронная задача в параболической зоне



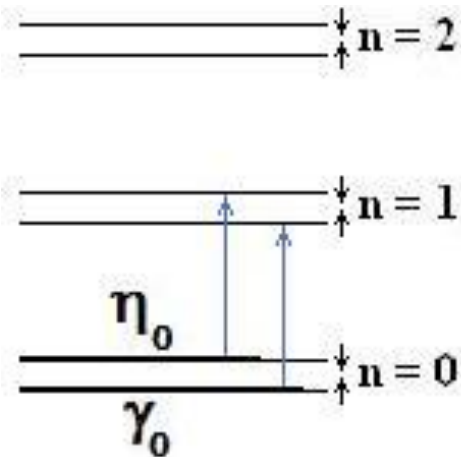
$$\hat{H}_0 = p_z \frac{1}{2m^*} p_z + \frac{1}{2m^*} \left(p_x^2 + \left(p_y - \frac{eB}{c} x \right)^2 \right) + V(z) + \mu_B g^* B \hat{\sigma}_z$$

$$\varphi_{n_z, n, k}^{(\sigma_z)}(x, y, z) = c(z) \chi_{\sigma_z} |n, k\rangle$$

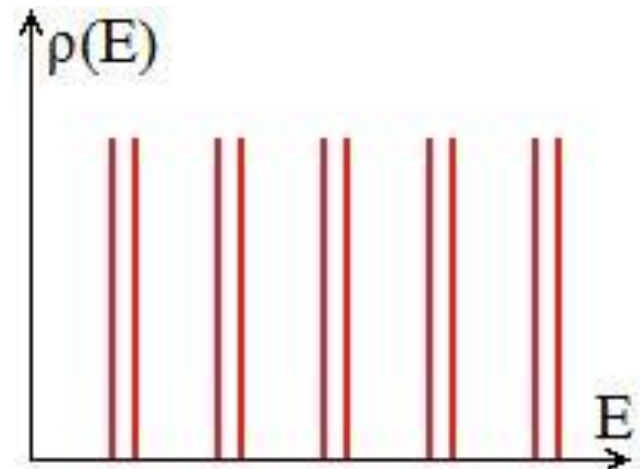
$$|n, k\rangle = \begin{cases} 0, n < 0 \\ \frac{\exp(iky)}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi} a_H L}} \exp\left(-\frac{\tilde{x}^2}{2a_H^2}\right) H_n\left(\frac{\tilde{x}}{a_H}\right), n \geq 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} \tilde{x} &= x - ka_H^2 \\ a_H^2 &= \frac{\hbar c}{eB} \end{aligned}$$

$$E_0 = E_{n_z} + \hbar \omega_c \left(n + \frac{1}{2}\right) + \mu_B g^* B \sigma_z$$

$$\rho(E) = \frac{1}{2\pi a_H^2} \delta\left(E - \hbar \omega_c \left(n + \frac{1}{2}\right) - \mu_B g^* B \sigma_z\right)$$



$$\omega_c = \frac{eB}{m^* c}$$



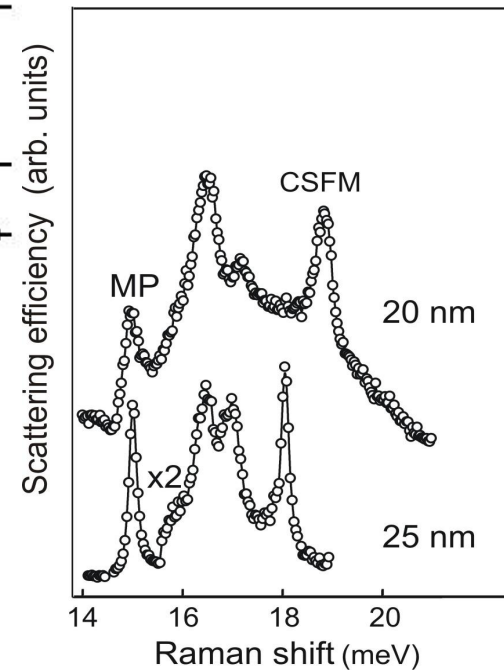
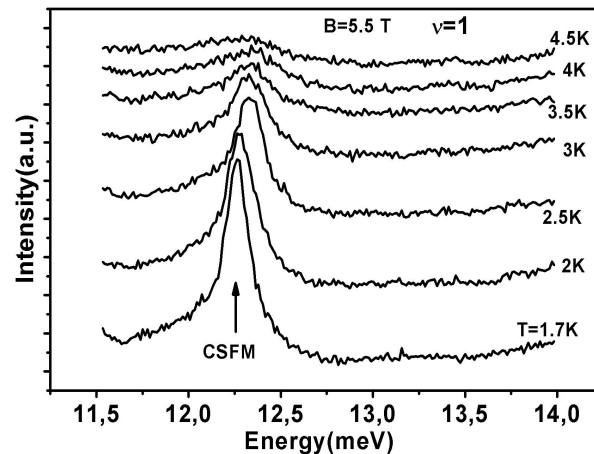
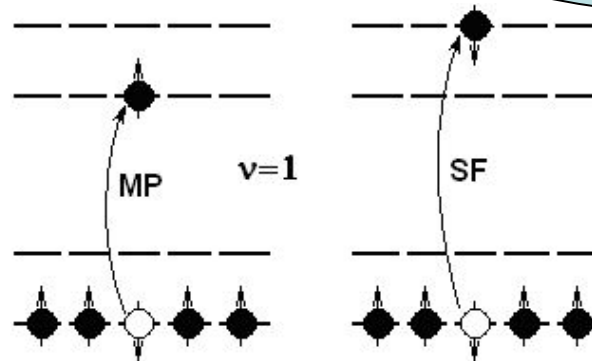
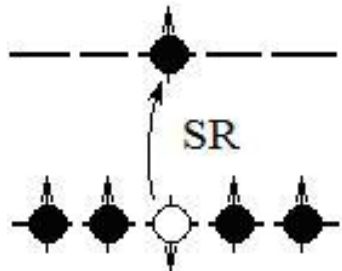
Методы измерения g-фактора в 2D электронном газе

Магнитооптические
методы

Магнитотранспортные
методы

Электронный
спиновый резонанс

Циклотронные возбуждения
с переворотом спина



Обменное усиление g-фактора в 2D электронном газе

PHYSICAL REVIEW

VOLUME 178, NUMBER 3

15 FEBRUARY 1969

g Factor of the Two-Dimensional Interacting Electron Gas

J. F. JANAK

IBM Watson Research Center, Yorktown Heights, New York 10598

(Received 27 September 1968)

PHYSICAL REVIEW

VOLUME 174, NUMBER 3

15 OCTOBER 1968

Effects of a Tilted Magnetic Field on a Two-Dimensional Electron Gas*

F. F. FANG AND P. J. STILES

IBM Watson Research Center, Yorktown Heights, New York

(Received 23 May 1968)

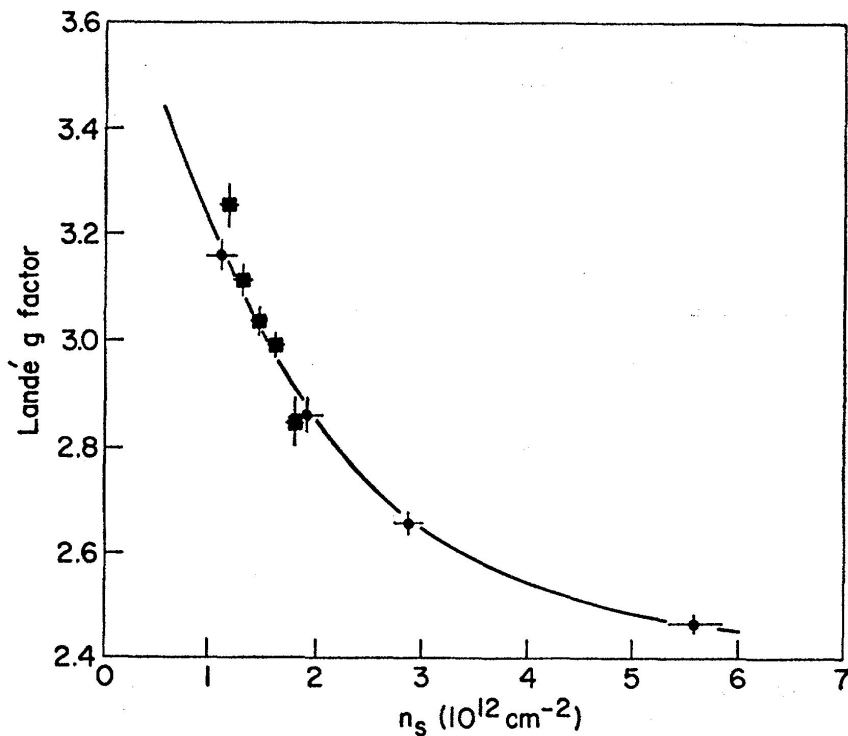


FIG. 8. Landé g factor as a function of the surface-electron concentration.

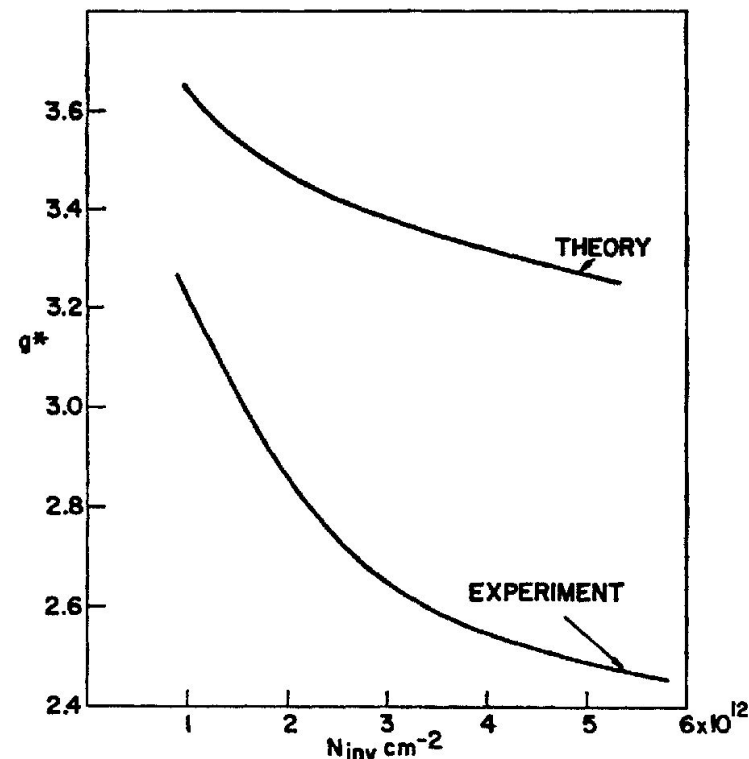


FIG. 1. Quasiparticle g -factor g^* .

$$\begin{aligned}
 g_k^* \mu_B H &\equiv E_{k\uparrow} - E_{k\downarrow} \\
 &= g \mu_B H + \Sigma_{\uparrow}(k, E_{k\uparrow}) - \Sigma_{\downarrow}(k, E_{k\downarrow})
 \end{aligned}$$

Обменное усиление g-фактора в 2D электронном газе

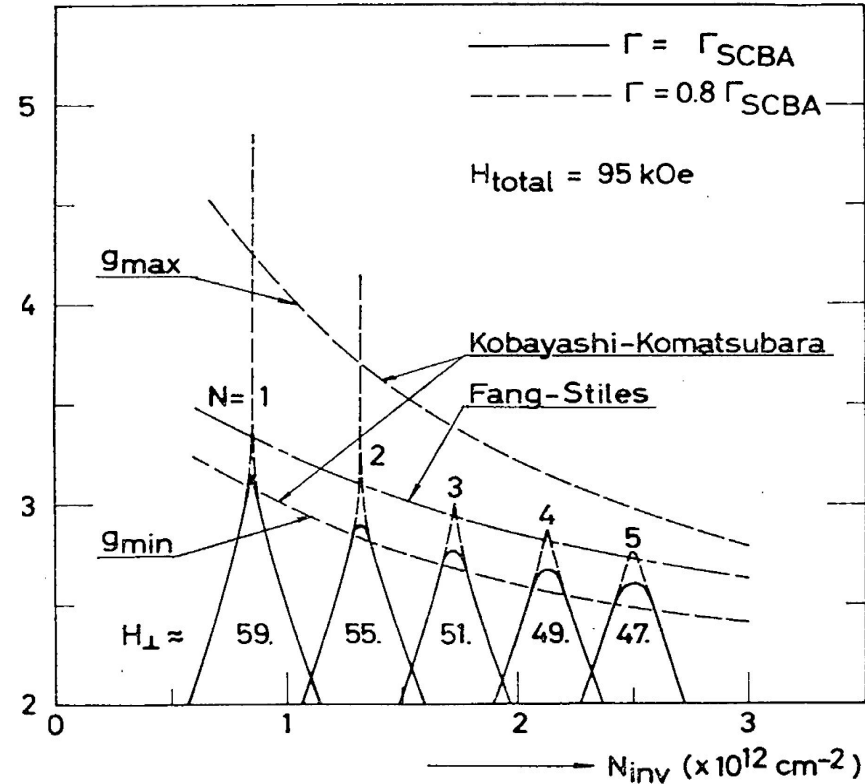
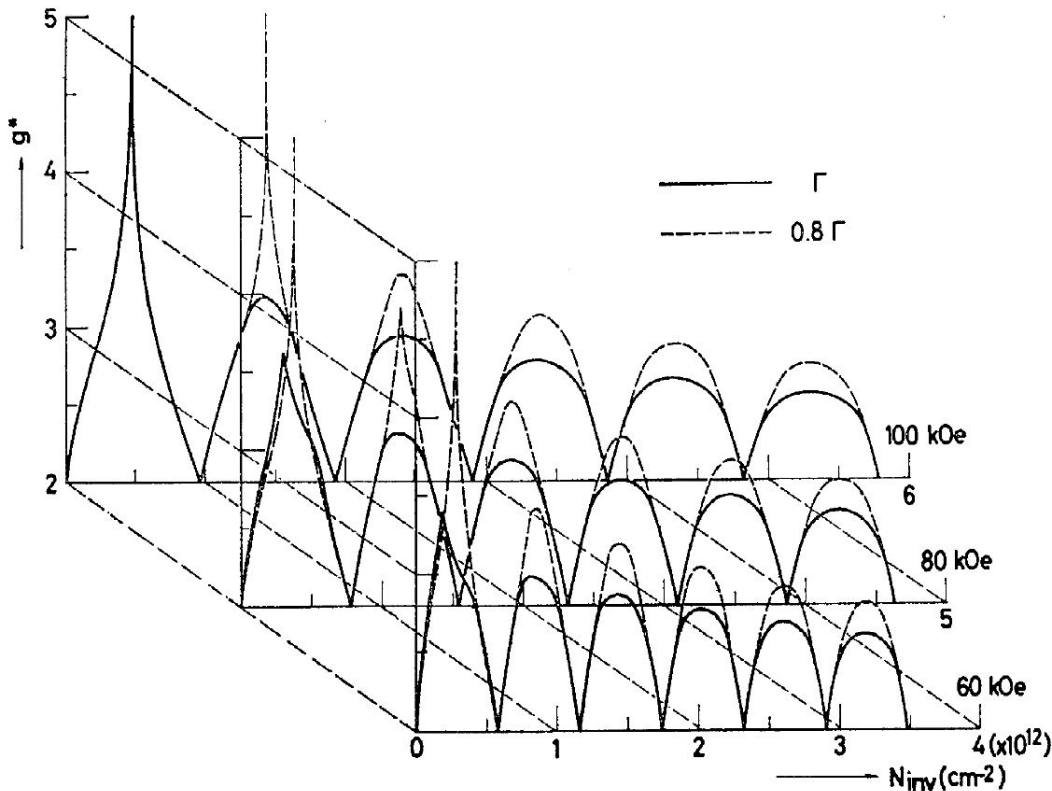
JOURNAL OF THE PHYSICAL SOCIETY OF JAPAN, Vol. 37, No. 4, OCTOBER, 1974

Theory of Oscillatory g Factor in an MOS Inversion Layer under Strong Magnetic Fields*

Tsuneya ANDO and Yasutada UEMURA

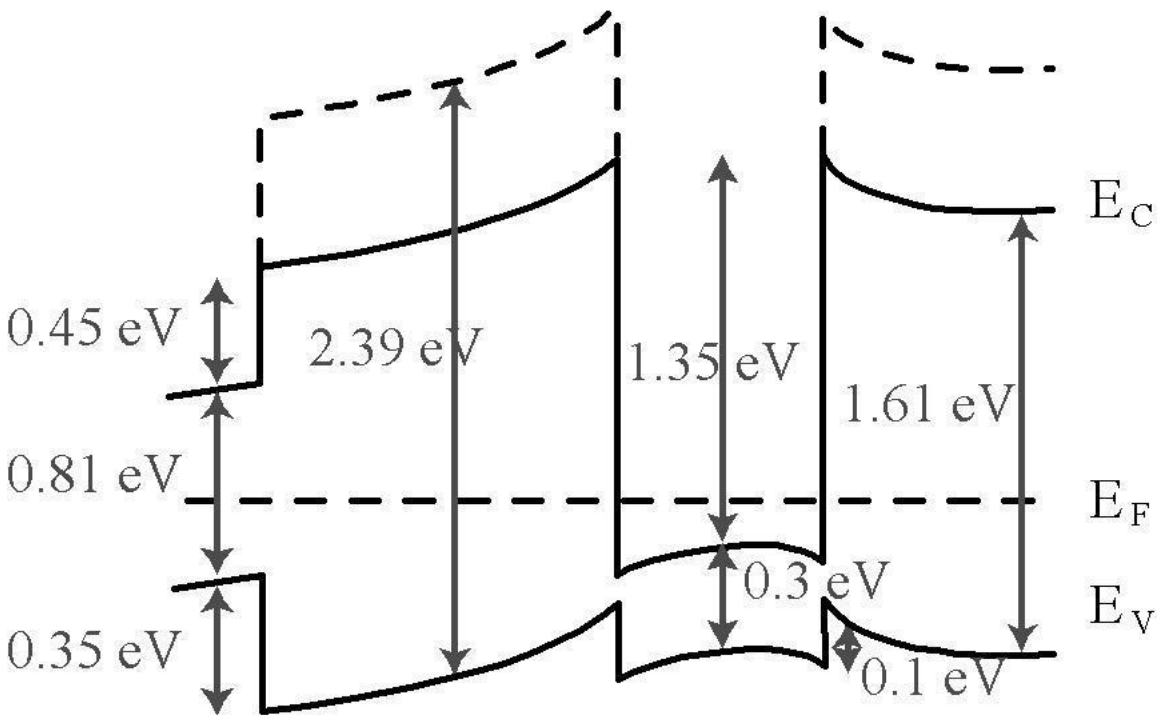
Department of Physics, University of Tokyo, Bunkyo-ku, Tokyo 113

(Received May 14, 1974)



$$g^* \mu_B H = 2 \mu_B H + \sum_q \frac{V(q)}{\epsilon(q, 0)} \cdot (n_{N\uparrow} - n_{N\downarrow}) \cdot J_{NN}(q)^2$$

Зонная структура номинально нелегированных образцов InAs / AlSb

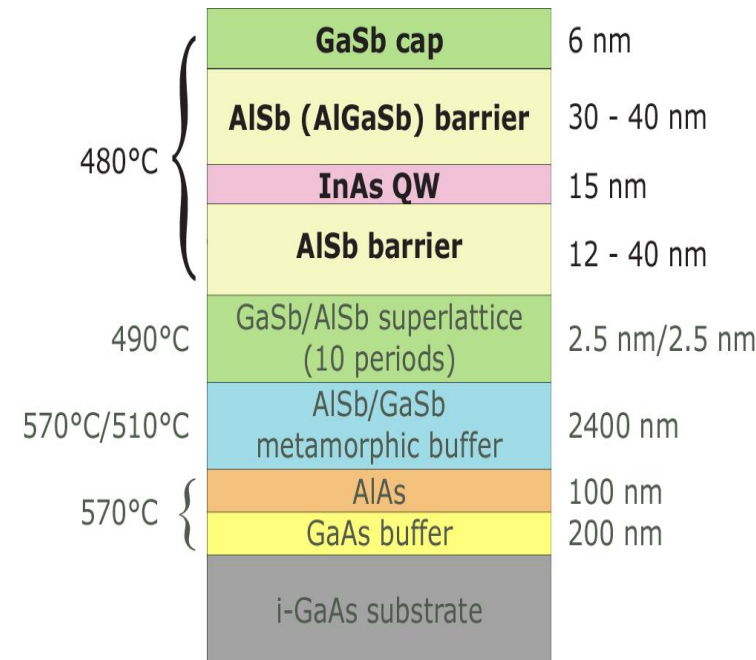


5 nm GaSb 30 nm AlGaSb 15 nm InAs 12 nm AlSb

2D электронный газ в КЯ InAs возникает вследствие ионизации доноров на поверхности покрывающего слоя GaSb и глубоких доноров в барьерах AlSb, что приводит к возникновению встроенного электрического поля. Пунктирной линией показано положение Γ -долины в зоне проводимости AlSb.

$$m_c \sim 0.03m_0$$

$$\mu \sim 9 \cdot 10^5 \text{ см}^2/\text{В}\cdot\text{с}$$



Мотивации для теоретического исследования обменного усиления g -фактора в гетероструктурах InAs/AlSb

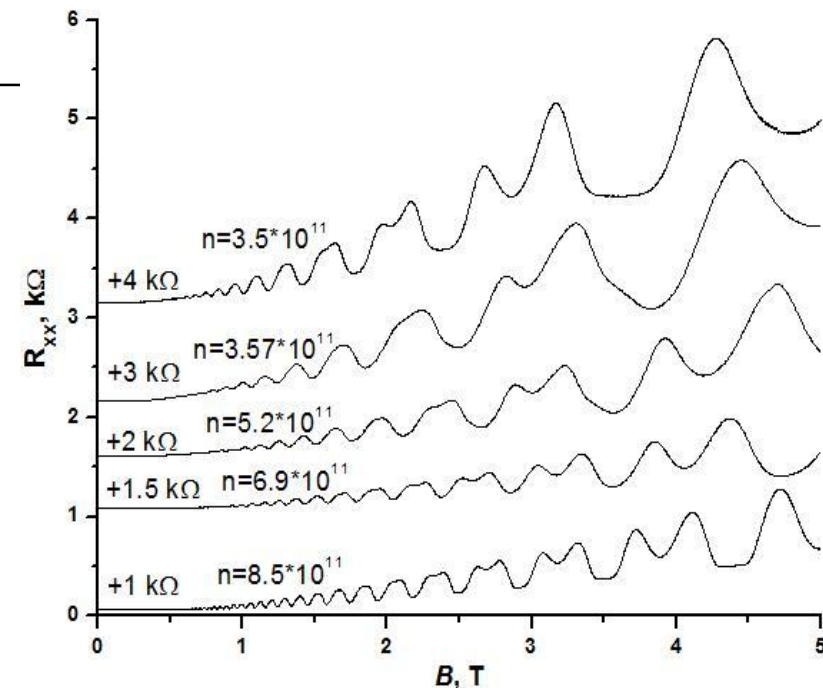
Физика и техника полупроводников, 2008, том 42, вып. 7

Обменное усиление g -фактора в гетероструктурах InAs/AlSb

© В.Я. Алешкин, В.И. Гавриленко, А.В. Иконников, С.С. Криштопенко, Ю.Г. Садофьев, К.Е. Спиригин¹

Институт физики микроструктур Российской академии наук,
603950 Нижний Новгород, Россия

Концентрация носителей n , 10^{12} см^{-2}	Номер уровня Ландау	B_- , Тл	B_+ , Тл	g^*
0.85	3	4.72	5.4	24.7 (*)
	4	3.73	4.11	23.1 (*)
	5	3.1	3.32	22.2 (*)
	6	2.63	2.78	19.9
	7	2.3	2.39	16
0.69	4	3.85	4.37	26 (*)
	5	3.05	3.35	24.2 (*)
	6	2.53	2.71	21.8
	7	2.17	2.27	17.3
0.52	2	3.92	4.69	26.5 (*)
	3	2.89	3.23	23.2 (*)
	4	2.31	2.45	15.7
0.35	1	4.28	5.93	29.9 (*)
	2	2.67	3.16	26.7 (*)
	3	1.97	2.17	21.3



Осцилляции г-фактора 2D электронов в квантующих магнитных полях

RAPID COMMUNICATIONS

PHYSICAL REVIEW B

VOLUME 47, NUMBER 20

15 MAY 1993-II

Oscillatory Landé factor of two-dimensional electrons under high magnetic fields

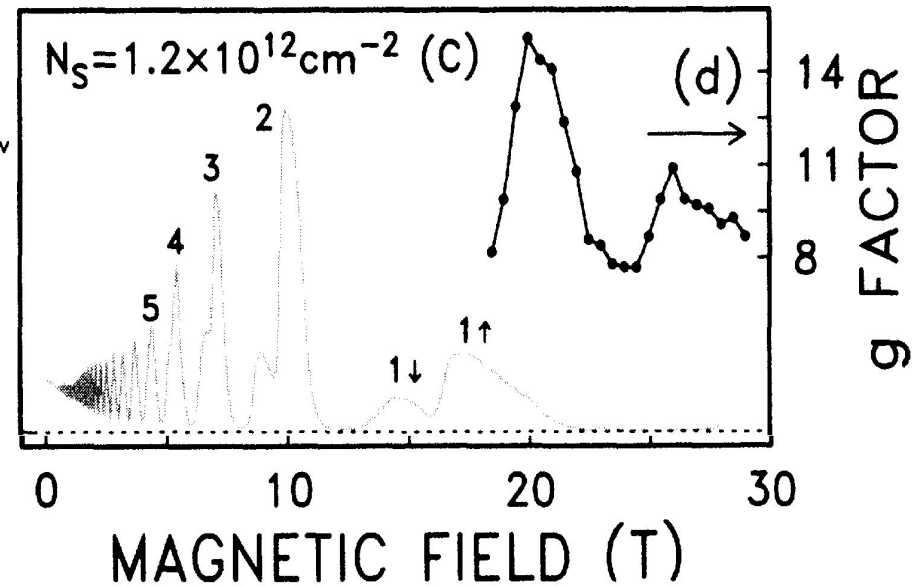
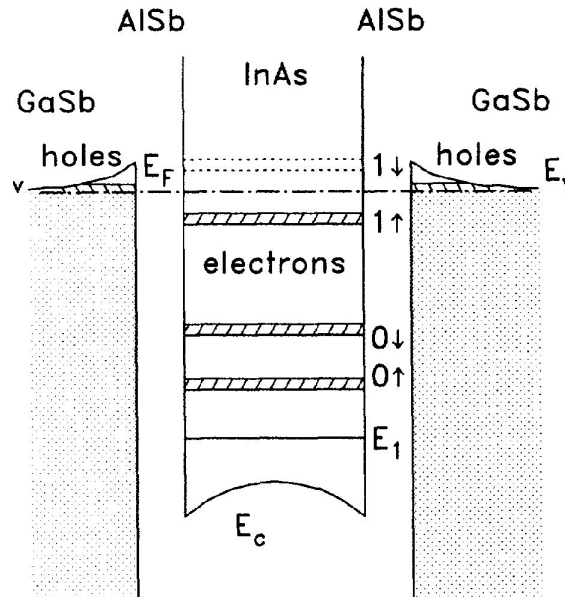
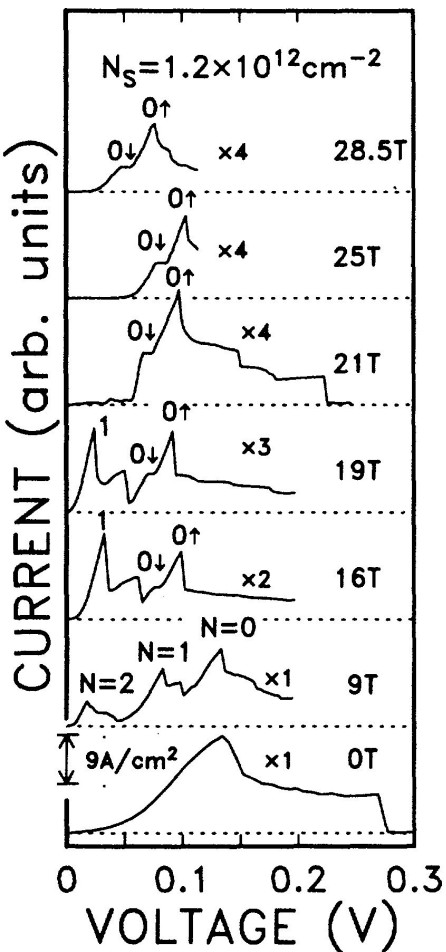
E. E. Mendez and J. Nocera

IBM Research Division, Thomas J. Watson Research Center, P.O. Box 218, Yorktown Heights, New York 10598

W. I. Wang

Department of Electrical Engineering, Columbia University, New York, New York 10027

(Received 1 March 1993)



Приближение Хартри и модель Кейна

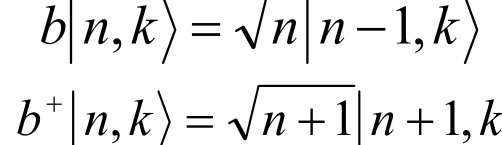
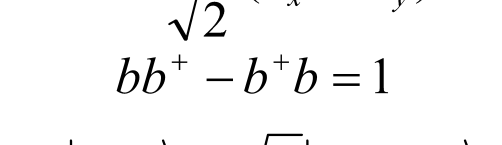
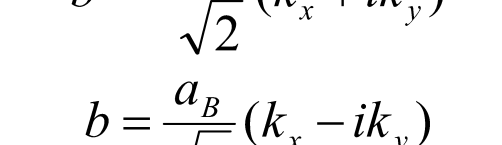
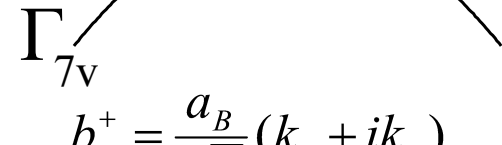
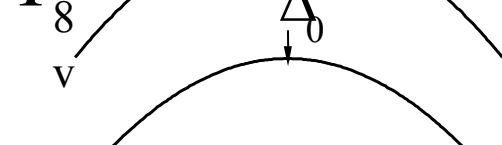
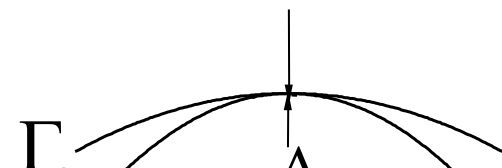
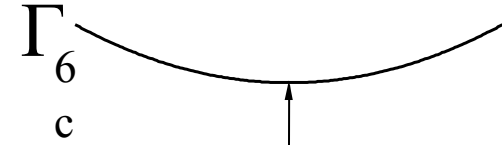
$$H_{(1e)}(\vec{r}, z)\Psi_N(\vec{r}, z) = E_N\Psi_N(\vec{r}, z)$$

$$H_{(1e)} = H_{8 \times 8}^{k \cdot p} - E_{Donors}(z) \cdot z + e\varphi_{e-e}$$

$$\nabla(\varepsilon \nabla \varphi_{e-e}) = -4\pi e \sum_{N'} \Psi_{N'}^+ \Psi_{N'}$$

$$H_{8 \times 8}^{k \cdot p} = H_{b, b^+} + H_Z + H_\varepsilon$$

$$H_{b, b^+} = \begin{pmatrix} E_C(z) & 0 & -\frac{Pb^+}{a_B} & \frac{\{Pk_z\}}{\sqrt{6a_B}} & \frac{Pb}{\sqrt{3a_B}} & 0 & -\frac{\{Pk_z\}}{2\sqrt{3a_B}} & -\frac{\sqrt{2} Pb}{\sqrt{3} a_B} \\ 0 & E_C(z) & 0 & -\frac{Pb^+}{\sqrt{3a_B}} & \frac{\{Pk_z\}}{\sqrt{6a_B}} & \frac{Pb}{a_B} & -\frac{\sqrt{2} Pb^+}{\sqrt{3} a_B} & \frac{\{Pk_z\}}{2\sqrt{3a_B}} \\ -\frac{Pb}{a_B} & 0 & E_V(z) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\{Pk_z\}}{\sqrt{6a_B}} & -\frac{Pb}{\sqrt{3a_B}} & 0 & E_V(z) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{Pb^+}{\sqrt{3a_B}} & \frac{\{Pk_z\}}{\sqrt{6a_B}} & 0 & 0 & E_V(z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Pb^+}{a_B} & 0 & 0 & 0 & E_V(z) & 0 & 0 \\ -\frac{\{Pk_z\}}{2\sqrt{3a_B}} & -\frac{\sqrt{2} Pb}{\sqrt{3} a_B} & 0 & 0 & 0 & 0 & E_V(z) - \Delta & 0 \\ -\frac{\sqrt{2} Pb^+}{\sqrt{3} a_B} & \frac{\{Pk_z\}}{2\sqrt{3a_B}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_V(z) - \Delta \end{pmatrix}$$



$$b^+ = \frac{a_B}{\sqrt{2}}(k_x + ik_y)$$

$$b = \frac{a_B}{\sqrt{2}}(k_x - ik_y)$$

$$bb^+ - b^+b = 1$$

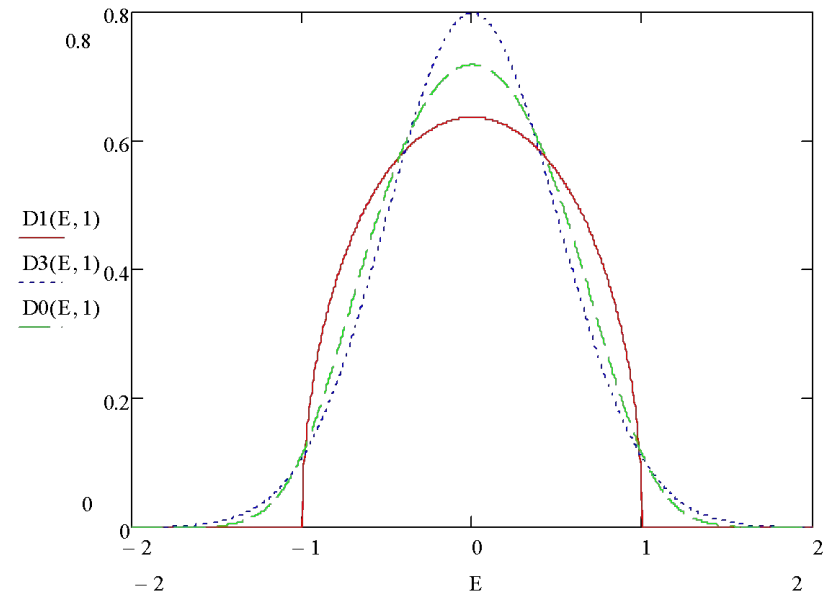
$$b|n, k\rangle = \sqrt{n}|n-1, k\rangle$$

$$b^+|n, k\rangle = \sqrt{n+1}|n+1, k\rangle$$

Учёт уширения уровней Ландау

$$\Psi_{n_z, n, k}^{(i)}(x, y, z) = \begin{pmatrix} c_1^{(i)}(z, n_z, n) \cdot |n, k\rangle \\ c_2^{(i)}(z, n_z, n) \cdot |n+1, k\rangle \\ c_3^{(i)}(z, n_z, n) \cdot |n-1, k\rangle \\ c_4^{(i)}(z, n_z, n) \cdot |n, k\rangle \\ c_5^{(i)}(z, n_z, n) \cdot |n+1, k\rangle \\ c_6^{(i)}(z, n_z, n) \cdot |n+2, k\rangle \\ c_7^{(i)}(z, n_z, n) \cdot |n, k\rangle \\ c_8^{(i)}(z, n_z, n) \cdot |n+1, k\rangle \end{pmatrix} \quad |n, k\rangle = \begin{cases} 0, n < 0 \\ \frac{\exp(iky)}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi} a_H L}} \exp\left(-\frac{\tilde{x}^2}{2a_H^2}\right) H_n\left(\frac{\tilde{x}}{a_H}\right), n \geq 0 \end{cases}$$

$$\tilde{x} = x - ka_B^2$$



$D1(E, 1)$
 $D3(E, 1)$
 $D0(E, 1)$

$$D(E) = \frac{1}{2\pi a_B^2} \frac{2}{\sqrt{2\pi}\Gamma} \exp\left(-2\frac{E^2}{\Gamma^2}\right)$$

$$\Gamma = \Gamma_0 \sqrt{\frac{B}{B_0}}$$

$$H_{(1e)}(\mathbf{r}, z) \Psi_{n,k}^{(i)}(\mathbf{r}, z) = E_n^{(i)} \Psi_{n,k}^{(i)}(\mathbf{r}, z)$$

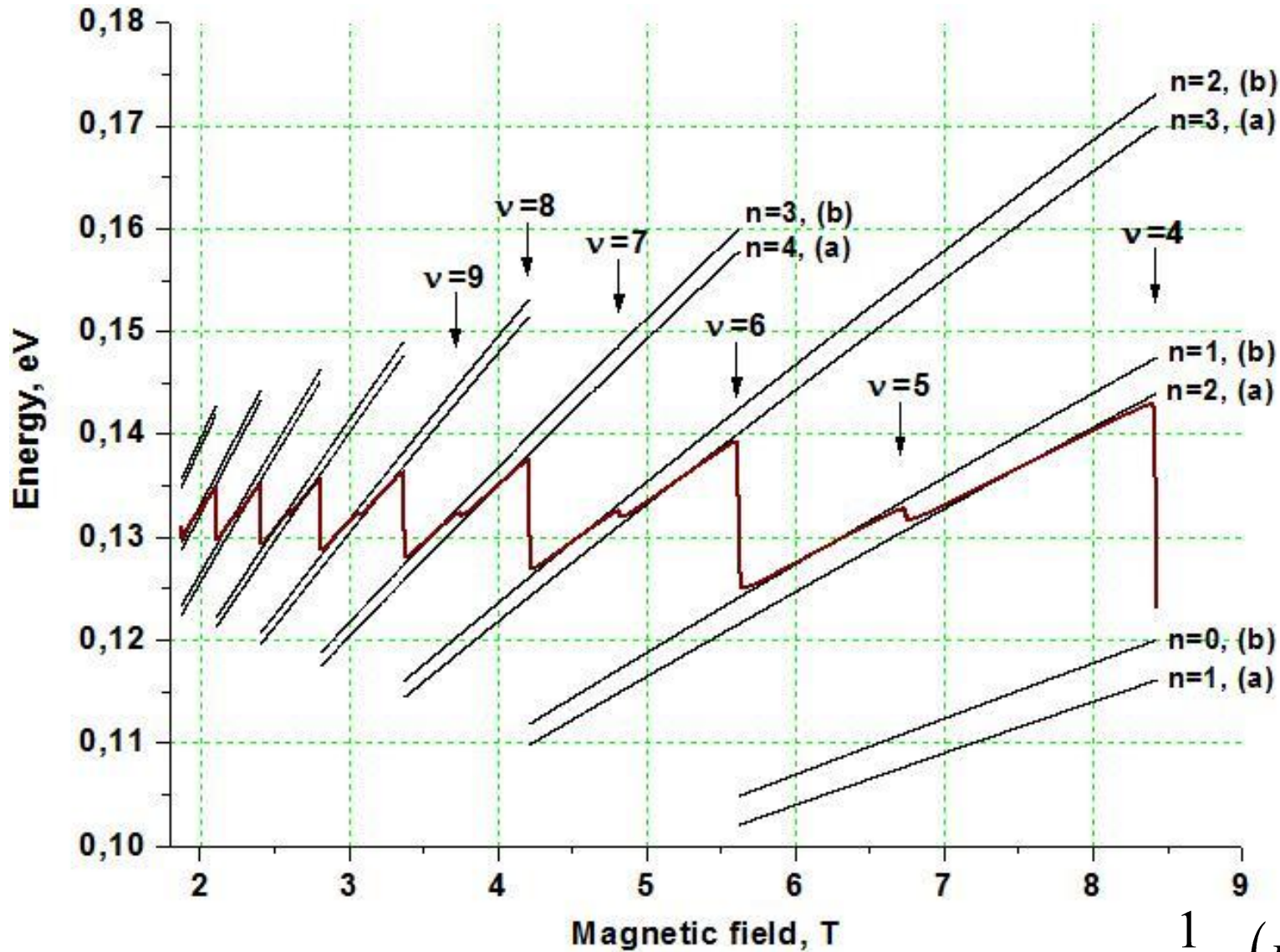
$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \varphi_{e-e} \right) = -4\pi e \sum_{n', i'} \sum_{p=1}^8 \int_{-\infty}^{E_F} D(E - E_{n'}^{(i)}) |c_p^{(i)}(z, n')|^2 dE$$

$$D_\Sigma(E) = \sum_{n, i} D(E - E_n^{(i)})$$

Энергия Ферми определяется из нормировки полной плотности состояний:

$$n_S = \int_{-\infty}^{E_F} D_\Sigma(E) dE$$

Уровни Ландау и положение уровня Ферми в приближении Хартри



$$g_{(1e)} = \frac{1}{\mu_B B} \left(E_{n_F-1}^{(b)} - E_{n_F}^{(a)} \right)$$

Поправки, связанные с обменным взаимодействием

$$\Sigma_n^{(i)} = - \sum_{n', i'} v_{n'}^{(i')} \int \frac{q dq}{(2\pi)^2} \left(\frac{a_B^2 q^2}{2} \right)^{|n-n'|} e^{-\frac{a_B^2 q^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \int_{-\infty}^{+\infty} dz \tilde{D}(q, z, z') \tilde{L}_{n, n'}^{(i, i')} \left(\frac{a_B^2 q^2}{2}, z, z \right) \tilde{L}_{n', n}^{(i', i)} \left(\frac{a_B^2 q^2}{2}, z', z' \right)$$

$$v_n^{(i)} = 2\pi a_B^2 \int_{-\infty}^{E_F} D(E - E_n^{(i)}) dE$$

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{n, n'}^{(i, i')}(\vec{q}, z, z') &= \left(c_1^{(i)}(z, n) c_1^{(i')}(z', n') + c_4^{(i)}(z, n) c_4^{(i')}(z', n') + c_7^{(i)}(z, n) c_7^{(i')}(z', n') \right) \sqrt{\frac{\min(n, n')!}{\max(n, n')!}} L_{\min(n, n')}^{|n-n'|} \left(\frac{q^2 a_B^2}{2} \right) + \\ &+ \left(c_2^{(i)}(z, n) c_2^{(i')}(z', n') + c_5^{(i)}(z, n) c_5^{(i')}(z', n') + c_8^{(i)}(z, n) c_8^{(i')}(z', n') \right) \sqrt{\frac{\min(n+1, n'+1)!}{\max(n+1, n'+1)!}} L_{\min(n, n')+1}^{|n-n'|} \left(\frac{q^2 a_B^2}{2} \right) + \\ &+ \left(c_3^{(i)}(z, n) c_3^{(i')}(z', n') \right) \sqrt{\frac{\min(n-1, n'-1)!}{\max(n-1, n'-1)!}} L_{\min(n, n')-1}^{|n-n'|} \left(\frac{q^2 a_B^2}{2} \right) + \left(c_6^{(i)}(z, n) c_6^{(i')}(z', n') \right) \sqrt{\frac{\min(n+2, n'+2)!}{\max(n+2, n'+2)!}} L_{\min(n, n')+2}^{|n-n'|} \left(\frac{q^2 a_B^2}{2} \right) \end{aligned}$$

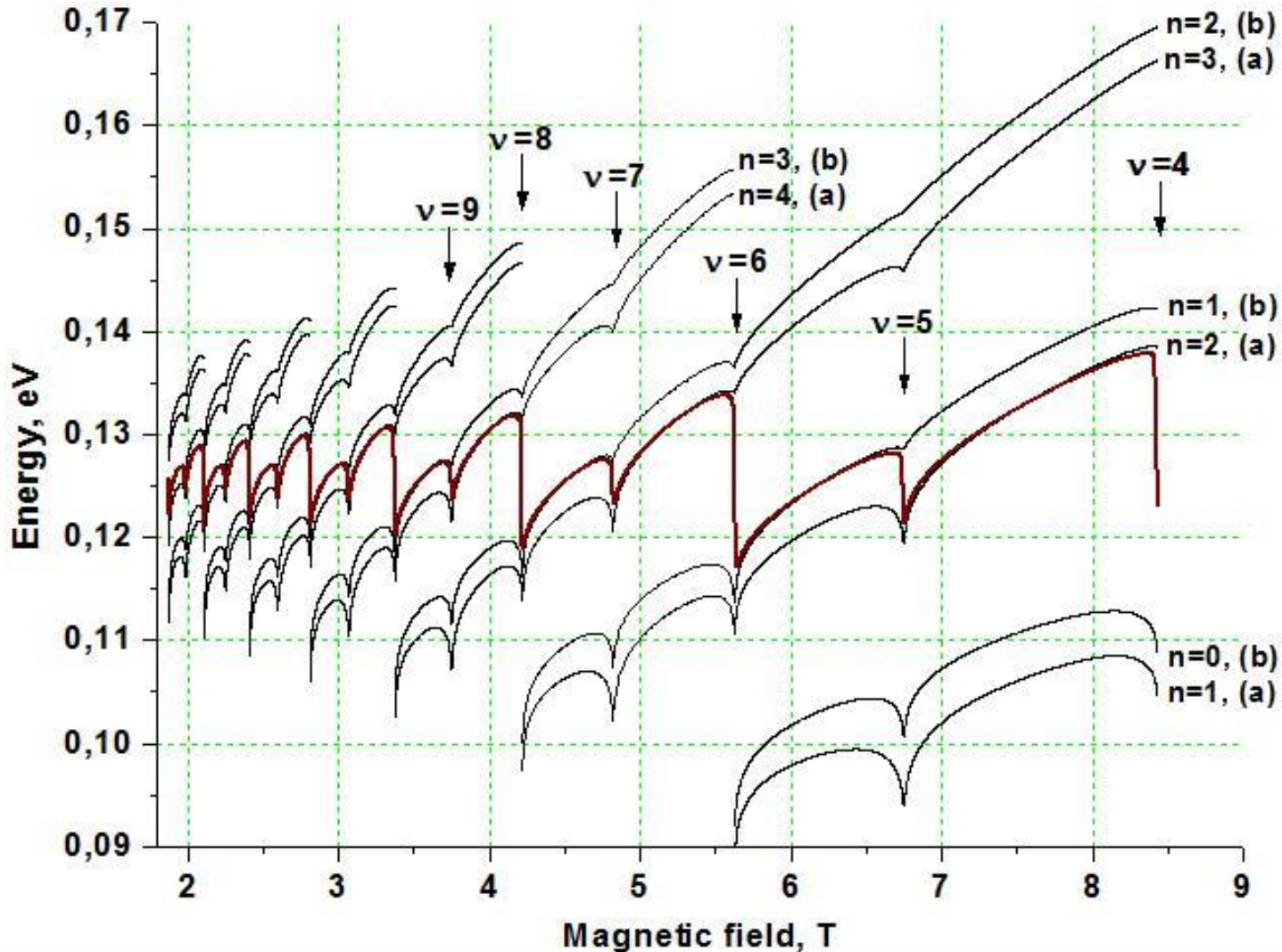
Кулоновская функция Грина

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} \varepsilon(z) \frac{\partial}{\partial z} - \varepsilon(z) q^2 \right) \tilde{D}(q, z, z') = -4\pi e \delta(z - z')$$

Экранировка в приближении Томаса-Ферми:

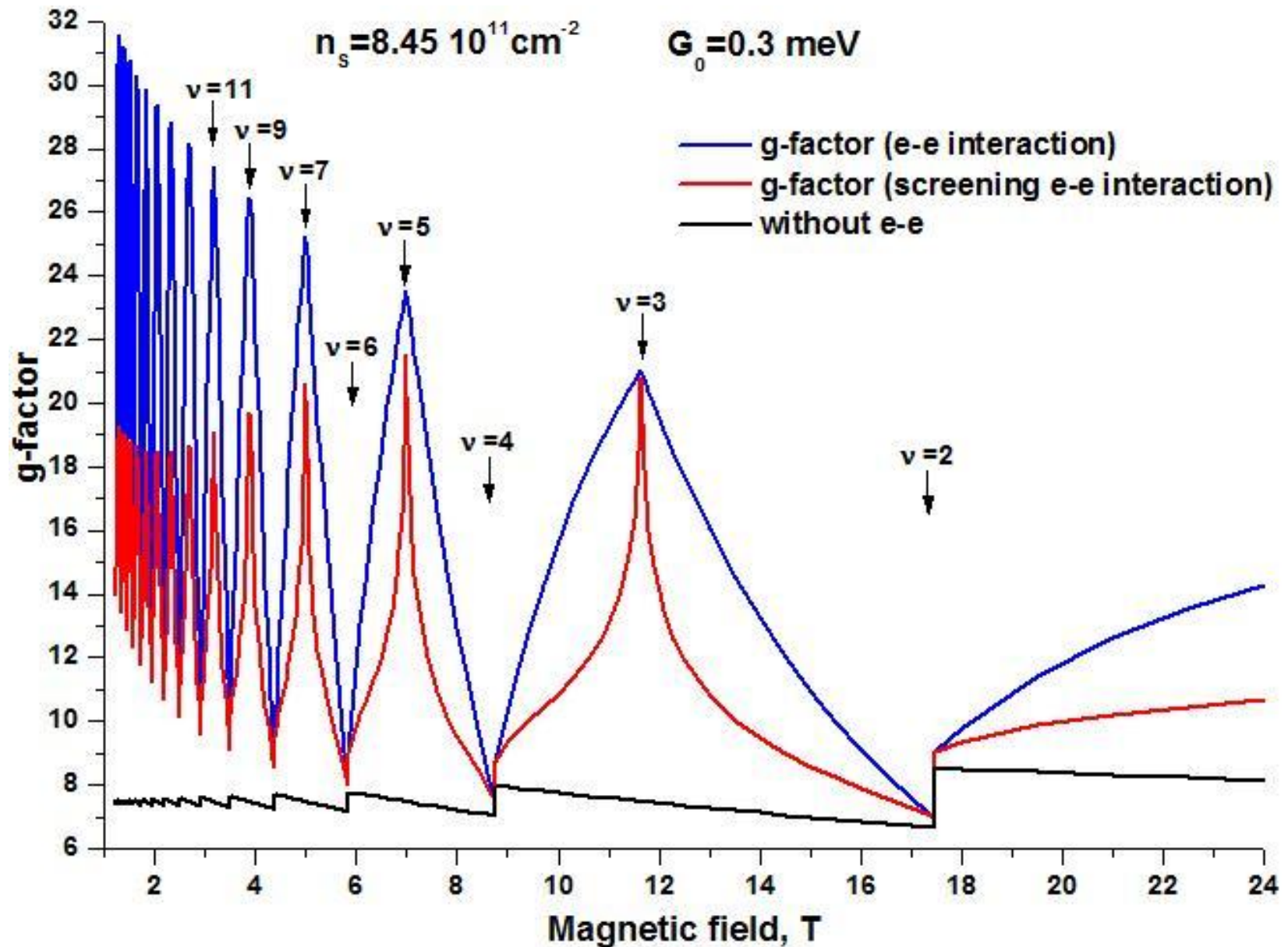
$$\tilde{D}(q, z, z') \rightarrow \frac{\tilde{D}(q, z, z')}{\tilde{\varepsilon}(q)} \quad \tilde{\varepsilon}(q) = 1 + \sum_{n, i} \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \int_{-\infty}^{+\infty} dz \tilde{D}(q, z, z') \tilde{L}_{n, n}^{(i, i)}(0, z, z) \tilde{L}_{n, n}^{(i, i)}(0, z', z') D_n^{(i)}(E_F)$$

Уровни Ландау квазичастиц и положение уровней Ферми в приближении Хартри-Фока

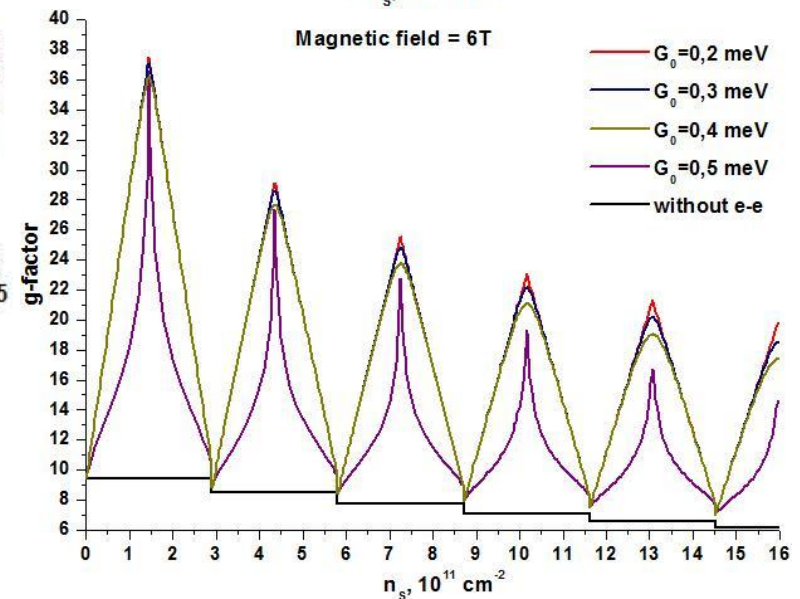
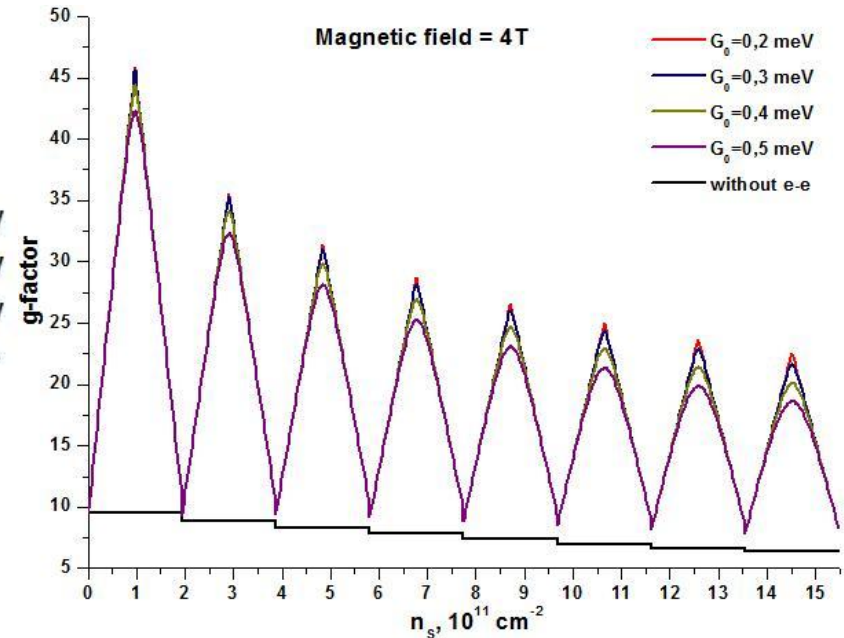
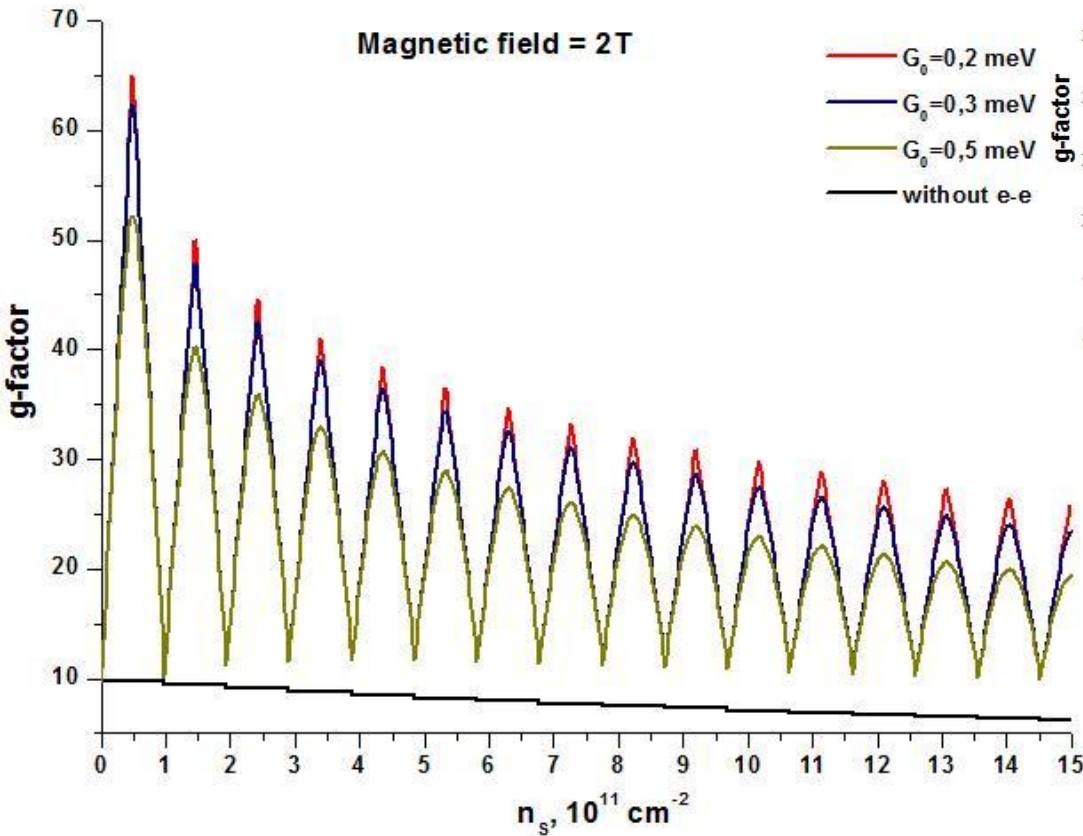


$$g^* = \frac{1}{\mu_B B} (\tilde{E}_{n_F-1}^{(b)} - \tilde{E}_{n_F}^{(a)}) = g_{(1e)} + \frac{1}{\mu_B B} (\Sigma_{n_F-1}^{(b)} - \Sigma_{n_F}^{(a)})$$

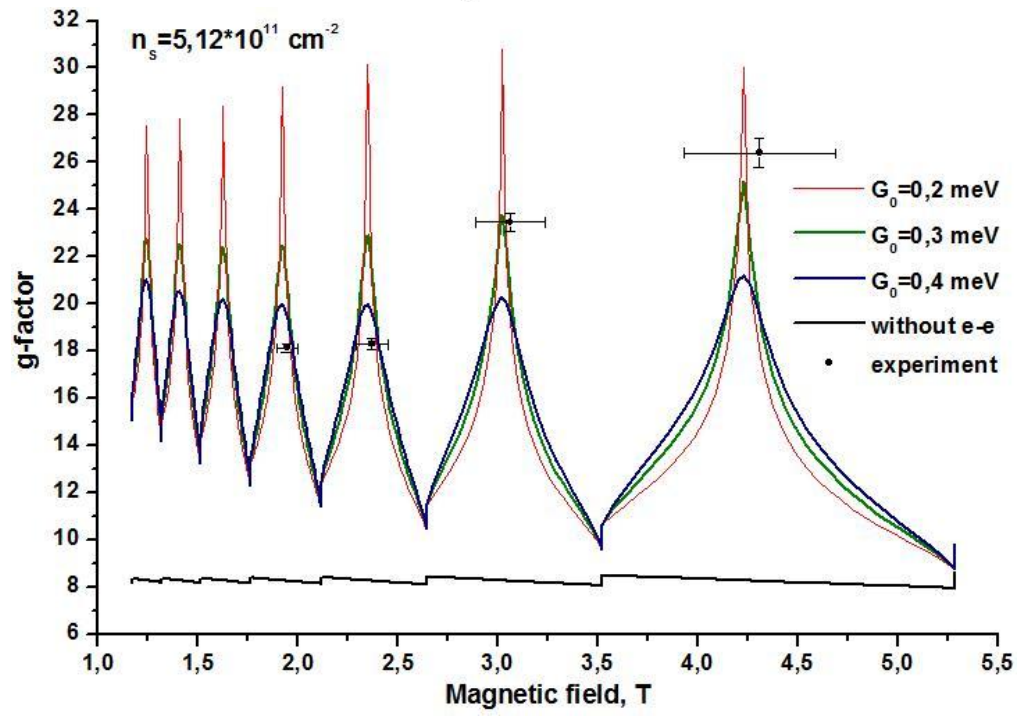
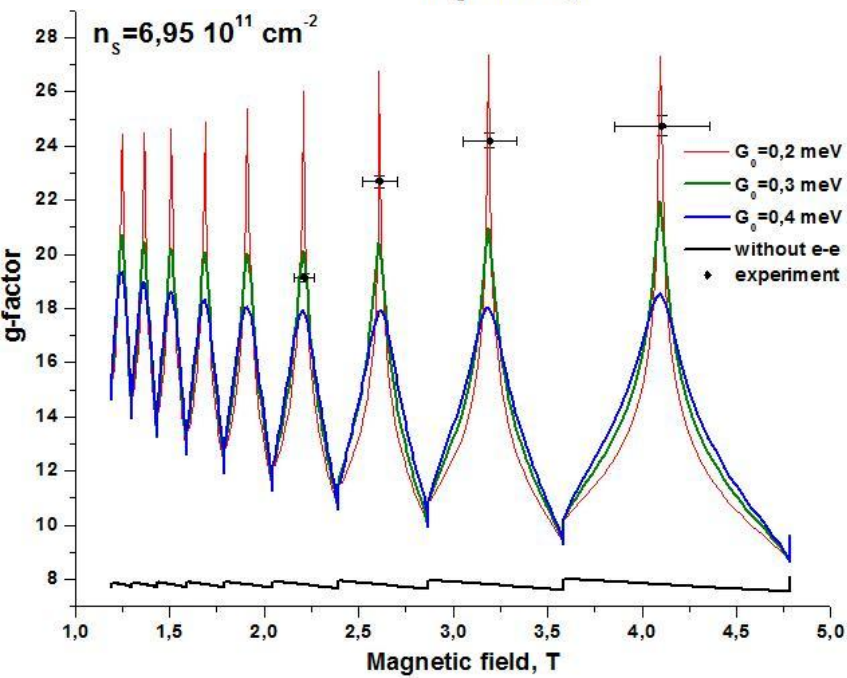
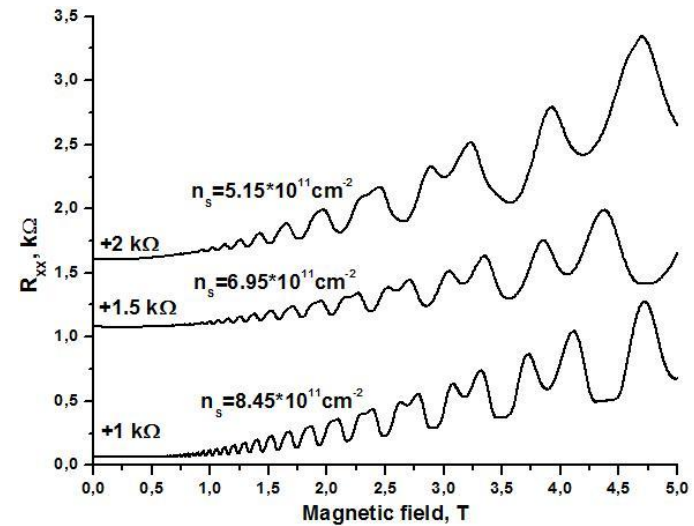
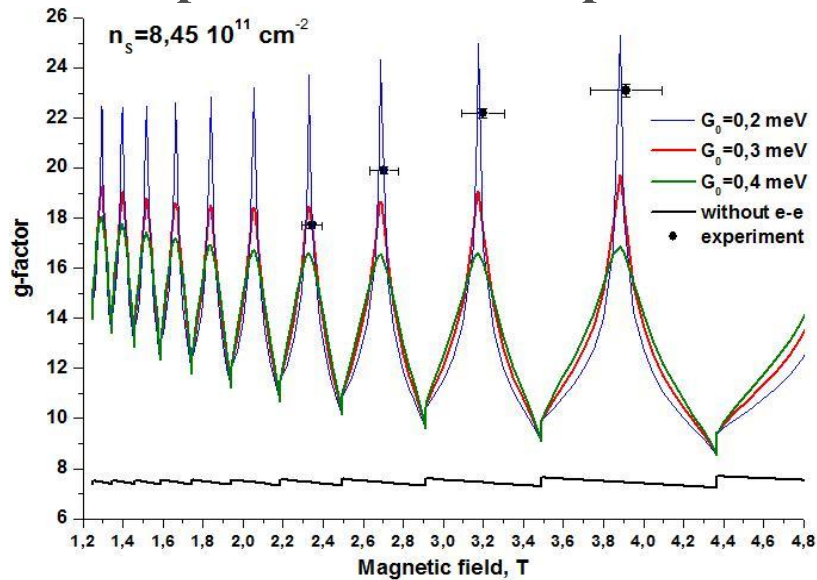
Осцилляции g-фактора в КЯ InAs/AlSb от магнитного поля



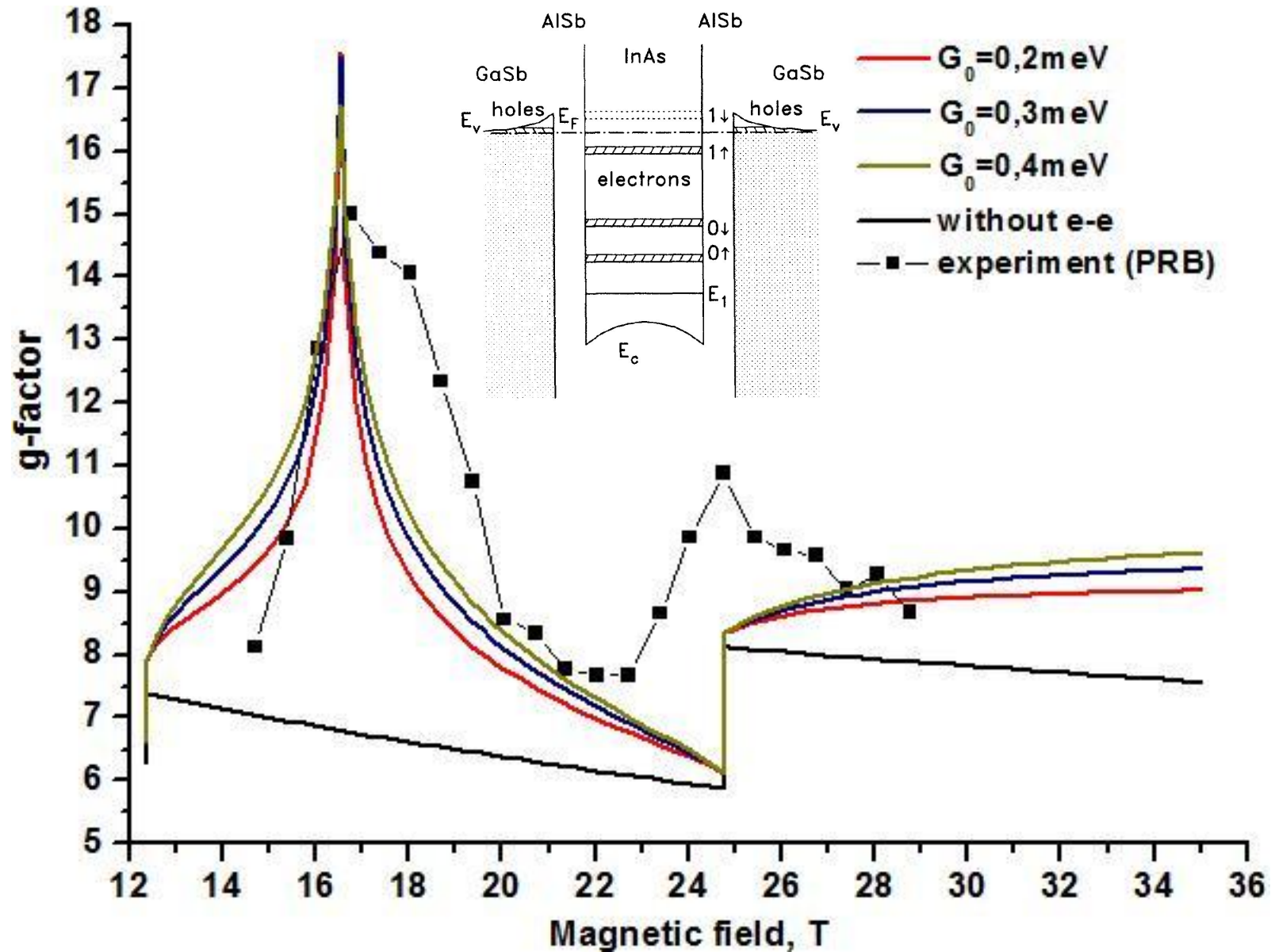
Обменное усиление g-фактора в 2D электронном газе в КЯ InAs/AlSb



Сравнение с экспериментом в умеренных магнитных полях



Сравнение с экспериментом в Phys. Rev. B 47, 13937 (1993).

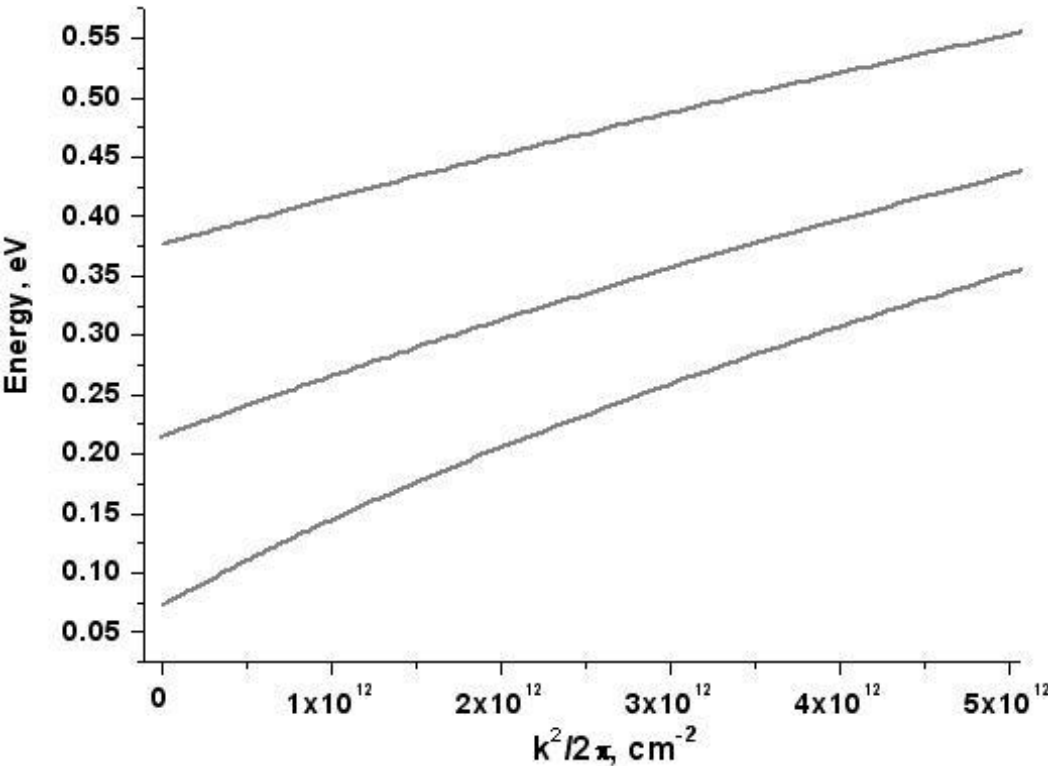




Основные результаты работы

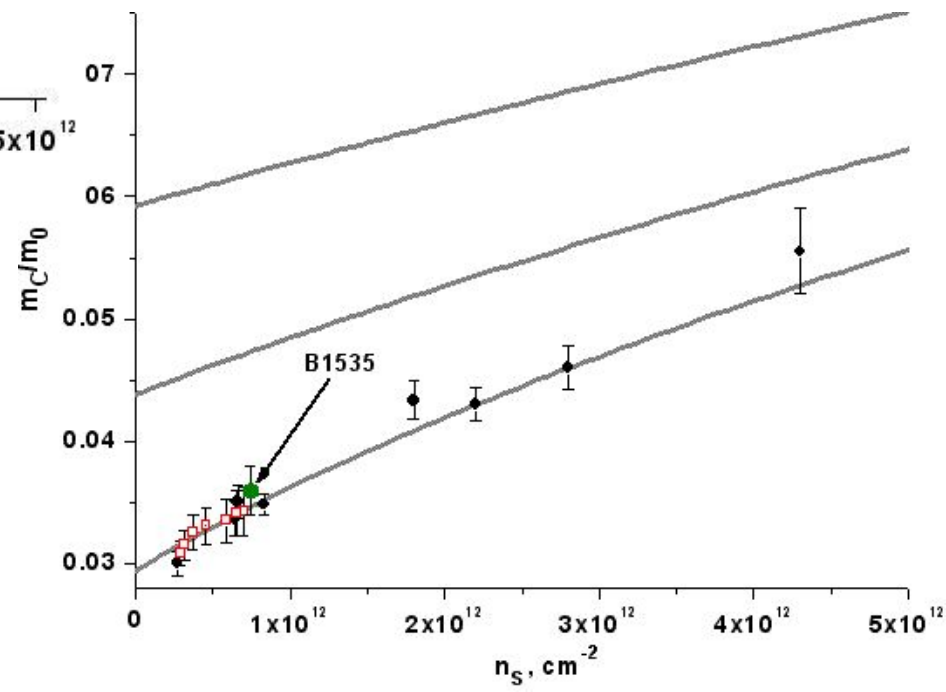
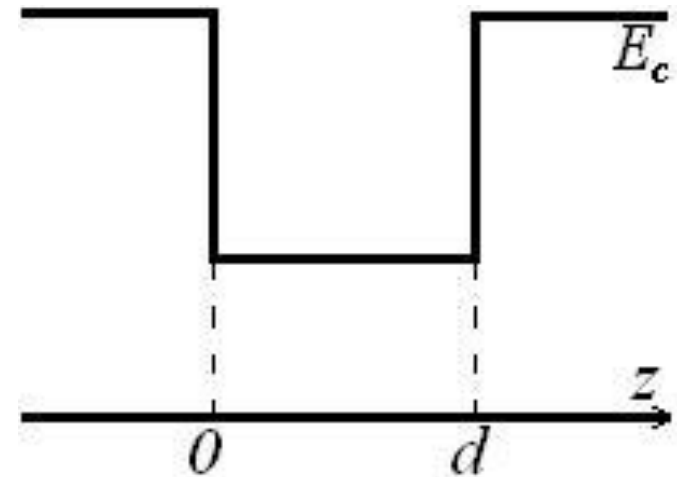
- ❑ Впервые в рамках модели Кейна в «экранированном» приближении Хартри-Фока с учётом уширения уровней Ландау выполнены количественные расчёты обменного усиления g -фактора квазичастиц в КЯ AlSb/InAs/AlSb с непараболическим законом дисперсии в зоне проводимости.
- ❑ Впервые показано, что обменное взаимодействие, приводит к усилению g -фактора как при *нечётных* так и при *чётных* факторах заполнения уровней Ландау.
- ❑ Впервые продемонстрировано, что амплитуда и форма осцилляций усиленного g -фактора квазичастиц определяется не только *электрон-электронным взаимодействием*, но и *величиной уширения уровней Ландау* вследствие случайного потенциала.

Спектр и циклотронная масса в модели прямоугольной КЯ AlSb/InAs/AlSb.



$$n_s = \frac{2}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2 \vec{k}}{\exp\left(\frac{E(\vec{k}) - E_F}{k_B T}\right) + 1} \approx \frac{k_F^2}{2\pi}$$

$$m_c(k) = \hbar^2 k \left(\frac{d\varepsilon}{dk} \right)^{-1}$$



Учёт электрон - электронного взаимодействия

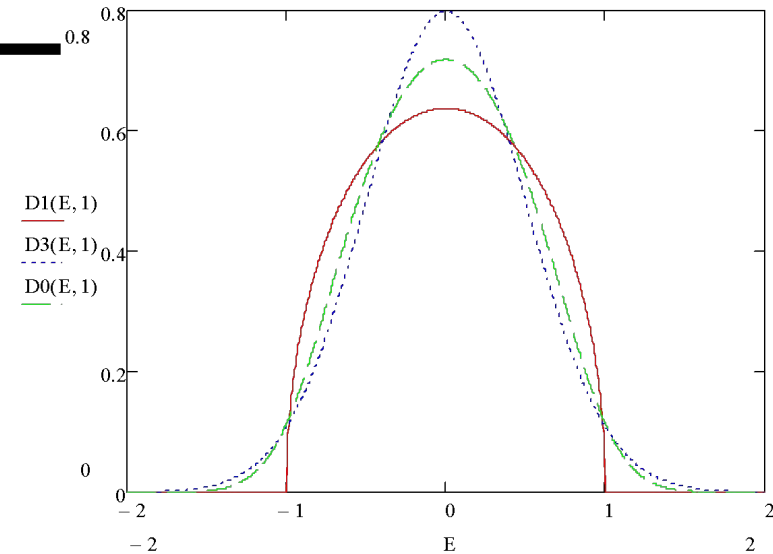
$$\mathbf{G} \equiv \text{---} = \text{---} + \text{---} \circ \Sigma \text{---}$$

$$\Sigma \equiv \Sigma = \text{---} + \text{---} + \text{---}$$

$$\text{---} = \text{---} + \text{---} \Pi_{TF} \text{---}$$

Задача о нахождении кулоновской функции Грина в плоскостой среде

$$\text{---} = \text{---} + \text{---} + \text{---} + \text{---} + \text{---} + \text{---} + \dots$$



$$D(E) = \frac{1}{2\pi a_B^2} \frac{2}{\sqrt{2\pi}\Gamma} \exp\left(-2\frac{E^2}{\Gamma^2}\right)$$

$$D_\Sigma(E) = \sum_{n,i} D(E - E_n^{(i)}) \quad \Gamma = \Gamma_0 \sqrt{\frac{B}{B_0}}$$

$$n_S = \int_{-\infty}^{E_F} D_\Sigma(E) dE$$

Восьмизонный гамильтониан Кейна

	$S\alpha$	$S\beta$	$3/2, 3/2$	$3/2, 1/2$	$3/2, -1/2$	$3/2, -3/2$	$1/2, 1/2$	$1/2, -1/2$
$S\alpha$	E_{ct} $\hbar^2/2m_c$	0	$\frac{Pk_+}{\sqrt{2}}$	$-i\sqrt{\frac{2}{3}}Pk_z$	$\frac{Pk_-}{\sqrt{6}}$	0	$\frac{Pk_z}{\sqrt{3}}$	$\frac{-iPk_-}{\sqrt{3}}$
$S\beta$	0	E_{ct} $\hbar^2/2m_c$	0	$\frac{iPk_+}{\sqrt{6}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}Pk_z$	$\frac{iPk_-}{\sqrt{2}}$	$\frac{Pk_+}{\sqrt{3}}$	$\frac{iPk_z}{\sqrt{3}}$
$3/2, 3/2$	$\frac{Pk_-}{\sqrt{2}}$	0	F	H	I	0	$\frac{iH}{\sqrt{2}}$	$-iI\sqrt{2}$
$3/2, 1/2$	$i\sqrt{\frac{2}{3}}Pk_z$	$\frac{-iPk_-}{\sqrt{6}}$	H^*	G	0	I	$\frac{i(G-F)}{\sqrt{2}}$	$iH\sqrt{\frac{3}{2}}$
$3/2, -1/2$	$\frac{Pk_+}{\sqrt{6}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}Pk_z$	I^*	0	G	-H	$-iH^*\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\frac{i(G-F)}{\sqrt{2}}$
$3/2, -3/2$	0	$\frac{-iPk_+}{\sqrt{2}}$	0	I^*	-H*	F	$-iI^*\sqrt{2}$	$\frac{-iH}{\sqrt{2}}$
$1/2, 1/2$	$\frac{Pk_z}{\sqrt{3}}$	$\frac{Pk_-}{\sqrt{3}}$	$\frac{-iH^*}{\sqrt{2}}$	$\frac{-i(G-F)}{\sqrt{2}}$	$iH\sqrt{\frac{3}{2}}$	$iI\sqrt{2}$	$\frac{F+G}{2} - \Delta$	0
$1/2, -1/2$	$\frac{iPk_+}{\sqrt{3}}$	$\frac{-iPk_z}{\sqrt{3}}$	$iI^*\sqrt{2}$	$iH^*\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\frac{-i(G-F)}{\sqrt{2}}$	$\frac{iH}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{F+G}{2} - \Delta$

$$P = \frac{\hbar}{m} \langle S|p_x|X \rangle = \frac{\hbar}{m} \langle S|p_y|Y \rangle = \frac{\hbar}{m} \langle S|p_z|Z \rangle,$$

$$F = f + E_v + \frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(A + \frac{B}{2} \right) (k_x^2 + k_y^2) + (A - B) k_z^2 \right],$$

$$G = g + E_v + \frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(A - \frac{B}{2} \right) (k_x^2 + k_y^2) + (A + B) k_z^2 \right],$$

$$H = -i \frac{\hbar^2}{2m} Dk_x k_z,$$

$$I = \frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} B(k_x^2 - k_y^2) - i Dk_x k_y \right\},$$

$$k_{\pm} = k_x \pm ik_y,$$

$$f = (2a + b)\varepsilon_{xx} + (a - b)\varepsilon_{zz}$$

$$g = (2a - b)\varepsilon_{xx} + (a + b)\varepsilon_{zz}$$

$$Pk_z \Rightarrow 0.5\{Pk_z\} = 0.5\{Pk_z + k_z P\}$$

Гетероструктуры InAs/AlSb выращиваются на плоскости (001), при росте на этой плоскости тензор деформации может иметь только три отличные от нуля компоненты: $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy}$, ε_{zz} . Оси x, y, z направлены вдоль [100], [010], [001] соответственно.

Поправки, связанные с обменным взаимодействием

$$\Sigma_n^{(i)} = - \sum_{n', i'} \sum_{n, k'} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \int d^2 \vec{r} \int d^2 \vec{r}' (\Psi_{n, k}^{(i)}(\vec{r}, z))^+ (\Psi_{n', k'}^{(i')}(\vec{r}', z'))^+ V(\vec{r} - \vec{r}', z, z') \Psi_{n', k'}^{(i')}(\vec{r}, z) \Psi_{n, k}^{(i)}(\vec{r}', z')$$

$$V(\vec{r} - \vec{r}', z, z') = \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \tilde{D}(q, z, z') e^{iq(\vec{r} - \vec{r}')}$$

$$\langle n_1, k_1 | e^{iq\vec{r}} | n_2, k_2 \rangle = \delta_{k_1 - k_2, q_x} e^{i \frac{k_1 + k_2}{2} \cdot q_y a_B^2} \sqrt{\frac{n_2!}{n_1!}} \left[\frac{(q_y + iq_x) a_B}{\sqrt{2}} \right]^{n_1 - n_2} L_{n_2}^{n_1 - n_2} \left(\frac{q^2 a_B^2}{2} \right) e^{-\frac{q^2 a_B^2}{4}} \quad n_1 \geq n_2$$

Кулоновская функция Грина

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} \varepsilon(z) \frac{\partial}{\partial z} - \varepsilon(z) q^2 \right) \tilde{D}(q, z, z') = -4\pi e \delta(z - z')$$

Кулоновская функция Грина

$$\tilde{\varepsilon}(q) = 1 + \sum_{n, i} \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \int_{-\infty}^{+\infty} dz \tilde{D}(q, z, z') \tilde{L}_{n, n}^{(i, i)}(0, z, z) \tilde{L}_{n, n}^{(i, i)}(0, z', z') D_n^{(i)}(E_F)$$

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{n, n'}^{(i, i')}(\vec{q}, z, z') &= (c_1^{(i)}(z, n)^* c_1^{(i')}(z', n') + c_4^{(i)}(z, n)^* c_4^{(i')}(z', n') + c_7^{(i)}(z, n)^* c_7^{(i')}(z', n')) \sqrt{\frac{\min(n, n')!}{\max(n, n')!}} L_{\min(n, n')}^{|n - n'|} \left(\frac{q^2 a_B^2}{2} \right) + \\ &+ (c_2^{(i)}(z, n)^* c_2^{(i')}(z', n') + c_5^{(i)}(z, n)^* c_5^{(i')}(z', n') + c_8^{(i)}(z, n)^* c_8^{(i')}(z', n')) \sqrt{\frac{\min(n+1, n'+1)!}{\max(n+1, n'+1)!}} L_{\min(n, n')+1}^{|n - n'|} \left(\frac{q^2 a_B^2}{2} \right) + \\ &+ (c_3^{(i)}(z, n)^* c_3^{(i')}(z', n')) \sqrt{\frac{\min(n-1, n'-1)!}{\max(n-1, n'-1)!}} L_{\min(n, n')-1}^{|n - n'|} \left(\frac{q^2 a_B^2}{2} \right) + (c_6^{(i)}(z, n)^* c_6^{(i')}(z', n')) \sqrt{\frac{\min(n+2, n'+2)!}{\max(n+2, n'+2)!}} L_{\min(n, n')+2}^{|n - n'|} \left(\frac{q^2 a_B^2}{2} \right) \end{aligned}$$