

# История формализации математических оснований



CAN ANYONE TELL  
ME WHY EVERYONE  
IS ALWAYS LATE  
FOR MY STAFF  
MEETINGS?



BECAUSE THE FIRST  
TEN MINUTES ARE  
ALWAYS STUPID  
STUFF LIKE "WHY  
ARE PEOPLE LATE?"



# Некоторые апории (парадоксы)

---

## □ Апории Зенона

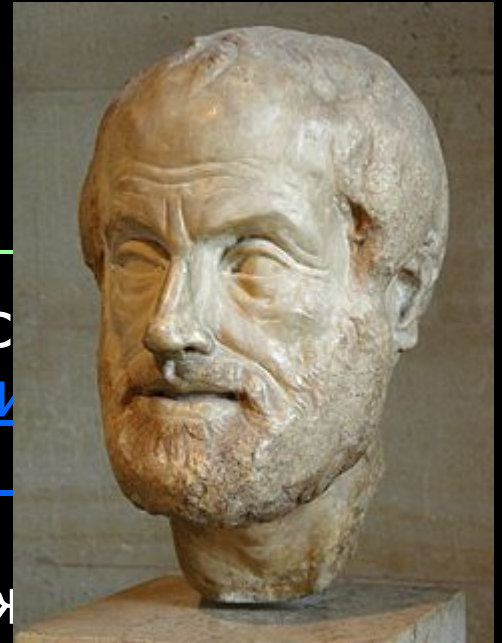
- Быстроногий Ахиллес Быстроногий Ахиллес никогда не догонит черепаху, если в начале движения черепаха находилась на некотором расстоянии от него.
- Летящая стрела неподвижна, так как в каждый момент времени она занимает равное себе положение, т. е. покоится; поскольку она покоится в каждый момент времени, то она покоится во все моменты времени, то есть, покоится всегда.
- Пусть Гомер должен пройти путь из А в В. Для того чтобы это сделать он сначала должен пройти половину, перед тем как пройти половину – он должен преодолеть половину от половины и т.д. (Дихотомия)

# Парадокс лжеца

---

- Платон: *«Следующее высказывание Сократа будет ложным».*
  - Сократ: *«То, что сказал Платон, истинно».*
- 
- Закон исключаящего третьего
  - Предложения такого рода принципиально не могут быть ни доказаны, ни опровергнуты в пределах того языка, на котором они изложены.

# Аристотель



- называемый также *Стагирит* по месту рождения (384, Стагир — 322 до н. э., полуостров Халкидика в Македонии)
- Органон
  - Логическую дедукцию можно выразить посредством правил построения вывода (*силлогизм*)
    - Всякое В есть А
    - С есть В
    - С есть А

*Все люди смертны.*

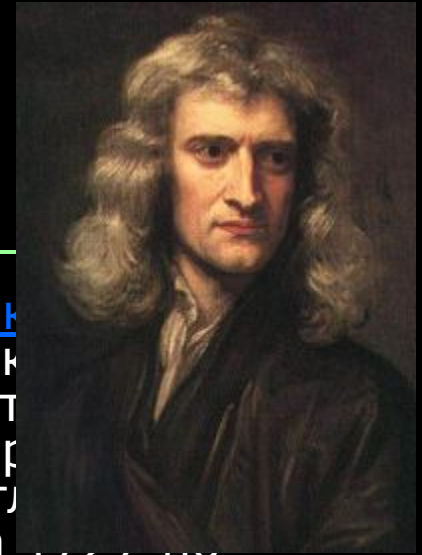
*Гёдель человек.*

# ЕВКЛИД



- или **Эвклид**, ([др.-греч.](#), (др.-греч. Ευκλείδης) — древнегреческий [математик](#), (др.-греч. Ευκλείδης) — древнегреческий математик, живший, согласно Проклу, во время правления [Птолемея I](#), (др.-греч. Ευκλείδης) — древнегреческий математик, живший, согласно Проклу, во время правления Птолемея I, он моложе учеников [Платона](#), (др.-греч. Ευκλείδης) — древнегреческий математик, живший, согласно Проклу, во время правления Птолемея I, он моложе учеников Платона и старше [Архимеда](#), (др.-греч. Ευκλείδης) — древнегреческий математик, живший, согласно Проклу, во время правления Птолемея I, он моложе учеников Платона и старше Архимеда и [Эратосфена](#), (др.-греч. Ευκλείδης) — древнегреческий математик, живший, согласно Проклу, во время правления Птолемея I, он моложе учеников Платона и старше Архимеда и

# НЬЮТОН



- ▣ **Сэр Исаак Ньютон** ([англ. Sir Isaac Newton](#), [25 декабря 1642](#), 25 декабря 1642 — [20 марта 1727](#), 25 декабря 1642 — 20 марта [1727](#), по [юлианскому календарю](#), 25 декабря 1642 — 20 марта 1727 по юлианскому календарю, использовавшемуся в Англии в то время; или [4 января 1643](#), 25 декабря 1642 — 20 марта 1727 по юлианскому календарю, использовавшемуся в Англии в то время; или 4 января [1643](#), 25 декабря 1642 — 20 марта 1727 по юлианскому календарю, использовавшемуся в Англии в то время; или 4 января 1643 — [31 марта 1727](#), 25 декабря 1642 — 20 марта 1727 по юлианскому календарю, использовавшемуся в Англии в то время; или 4 января 1643 — 31 марта [1727](#), 25 декабря 1642 — 20 марта 1727 по юлианскому календарю, использовавшемуся в Англии в то время; или 4 января 1643 — 31 марта 1727 по [григорианскому календарю](#), 25 декабря 1642 — 20 марта 1727 по юлианскому календарю, использовавшемуся в Англии в то время; или 4 января 1643 — 31 марта 1727 по григорианскому календарю) — великий [английский](#), 25 декабря 1642 — 20 марта 1727 по юлианскому календарю, использовавшемуся в Англии в то время; или 4 января 1643 — 31 марта 1727 по григорианскому календарю) — великий английский [физик](#), 25 декабря 1642 — 20 марта 1727 по юлианскому календарю, использовавшемуся в Англии в то время; или 4 января 1643 — 31 марта 1727 по

# Демон Лапласа

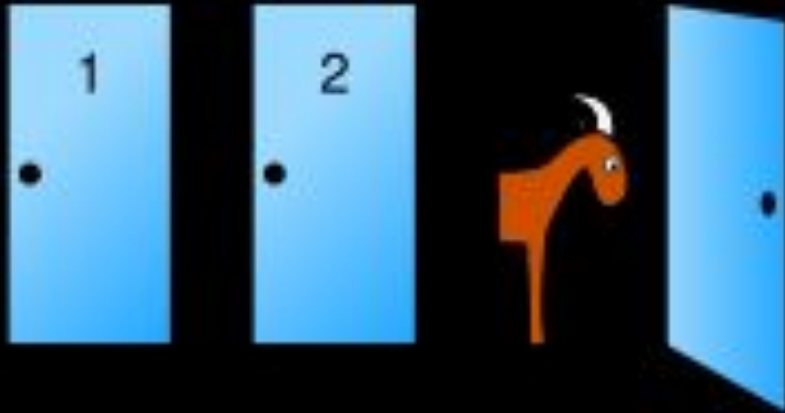
---

- **Демон Лапласа** — мысленный эксперимент — мысленный эксперимент 1814 — мысленный эксперимент 1814 года математика — мысленный эксперимент 1814 года математика Пьера-Симона Лапласа — мысленный эксперимент 1814 года математика Пьера-Симона Лапласа, вымышленный демон — мысленный эксперимент 1814 года математика Пьера-Симона Лапласа, вымышленный демон, обладающий способностью, восприняв в любой данный момент времени — мысленный эксперимент 1814 года математика Пьера-Симона Лапласа, вымышленный демон, обладающий способностью, восприняв в любой данный момент времени положение — мысленный эксперимент 1814 года математика Пьера-Симона Лапласа, вымышленный демон, обладающий способностью, восприняв в любой данный момент времени положение и скорость — мысленный эксперимент 1814 года математика Пьера-Симона Лапласа, вымышленный демон, обладающий способностью, восприняв в любой данный момент времени положение и скорость каждой частицы — мысленный эксперимент 1814 года математика Пьера-Симона Лапласа, вымышленный демон, обладающий способностью, восприняв в любой данный момент времени положение и скорость каждой частицы во Вселенной — мысленный эксперимент 1814 года математика Пьера-Симона Лапласа, вымышленный демон, обладающий способностью, восприняв в любой данный момент времени положение и скорость каждой частицы во Вселенной, узнавать её эволюцию — мысленный эксперимент 1814 года математика Пьера-Симона Лапласа, вымышленный демон, обладающий способностью, восприняв в любой данный момент времени положение и скорость каждой частицы во Вселенной, узнавать её эволюцию как в будущем — мысленный эксперимент 1814 года математика Пьера-Симона Лапласа, вымышленный демон, обладающий способностью, восприняв в любой данный момент времени положение и скорость каждой частицы во Вселенной, узнавать её эволюцию как в будущем, так и в прошлом. Лаплас придумал это вымышленное существо для наглядной демонстрации степени нашей неосведомленности и необходимости в статистическом описании некоторых реальных



# Парадокс Монти Холла

- ▣ Представьте, что вы стали участником игры, в которой вам нужно выбрать одну из трех дверей. За одной из дверей находится автомобиль, за двумя — козы. Представьте, что вы выбрали дверь номер 1, ведущую к козе. Ведущий, который знает, где находится автомобиль, а где — козы, открывает одну из оставшихся дверей, например, номер 3, за которой находится коза. После этого он спрашивает вас, не желаете ли вы изменить свой выбор и выбрать дверь номер 2. Увеличатся ли ваши шансы выиграть автомобиль, если вы примете предложение ведущего и измените свой выбор ?



- 
- после того, как ведущий открыл дверь, за которой находится коза, автомобиль может быть только за одной из двух оставшихся дверей. Поскольку игрок не может получить никакой дополнительной информации о том, за какой дверью находится автомобиль, то вероятность нахождения автомобиля за каждой из дверей одинакова, и изменение первоначального выбора двери не дает игроку никаких преимуществ. Однако такой ход рассуждений неверен. Если ведущий всегда знает, за какой дверью что находится, всегда открывает ту из оставшихся дверей, за которой находится коза, и всегда предлагает игроку изменить свой выбор, то вероятность того, что автомобиль находится за выбранной игроком дверью, равна  $1/3$ , и, соответственно, вероятность того, что автомобиль находится за оставшейся дверью, равна  $2/3$ . Таким образом, изменение первоначального выбора увеличивает шансы игрока выиграть автомобиль в 2 раза. Этот вывод противоречит интуитивному восприятию ситуации большинством людей, поэтому описанная задача и называется *парадоксом Монти Холла*.

# Парадокс Рассела

---

- Пусть  $K$  — множество всех множеств, которые не содержат себя в качестве своего элемента. Содержит ли  $K$  само себя в качестве элемента? Если да, то, по определению  $K$ , оно не должно быть элементом  $K$  — противоречие. Если нет — то, по определению  $K$ , оно должно быть элементом  $K$  — вновь противоречие.

- 
- теория Цермело — Френкеля ZF, теория Неймана — Бернаиса — Гёделя NBG и др.
  - ни для одной из этих теорий до настоящего момента не найдено доказательства непротиворечивости

# Решение по Гёделю

---

Все полные аксиоматические формализации теории чисел включают неразрешимые предложения.

# Что же такое числа?

---

- Бесконечные числа:  $1+a=a$
- Континуум
- Кардинальные и ординальные числа
- Конструктивизм и интуитивизм математики (философии)
- Как можно описать *детерминизм* в вычислительных машинах?

# Давид Гильберт

---



## 23 Проблемы Гильберта : 1-ая

---

Проблема Кантора о мощности континуума (Континуум-гипотеза) = **нет консенсуса**

Результаты Гёделя и Коэна (Cohen) показывают, что ни континуум-гипотеза, ни её отрицание не противоречит системе аксиом Цермело — Френкеля (стандартной системе аксиом теории множеств). Таким образом, континуум-гипотезу в этой системе аксиом невозможно ни доказать, ни опровергнуть. Ведутся споры о том, является ли результат Коэна полным решением задачи.



# 2-ая: Непротиворечивость аксиом арифметики

---

## нет консенсуса

Курт Гёдель Курт Гёдель доказал что непротиворечивость аксиом арифметики нельзя доказать исходя из самих аксиом арифметики (теорема о неполноте - 1931)

# 8-ая :Проблема простых чисел

---

- ▣ Проблема Гольдбаха
- ▣ Гипотеза Римана

# Курт Гёдель

---

- ▣ **ГЁДЕЛЬ, КУРТ** (Gödel, Kurt) (1906–1978), австрийский математик. Родился 28 апреля 1906 в Брно, поступил в Венский университет, в 1930 защитил докторскую диссертацию по математике. В 1933–1938 – приват-доцент Венского университета; в 1940 эмигрировал в США. С 1953 и до конца жизни – профессор Принстонского института перспективных исследований.



- 1931: публикует *Über unentscheidbare Sätze* (*Mathematica und ver...*)
- 1939: покидает Бер...
- Institute for Advanc...



- 
- В 18 лет Гёдель поступил в [Венский университет](#). Там он два года изучал физику, но затем переключился на математику.
  - Обычно Гёделя считают австрийцем, но за свою жизнь он неоднократно менял гражданство. Рождённый подданным Австро-Венгрии, он в 12 лет принял гражданство [Чехословакии](#) Обычно Гёделя считают австрийцем, но за свою жизнь он неоднократно менял гражданство. Рождённый подданным Австро-Венгрии, он в 12 лет принял гражданство Чехословакии после того, как Австро-Венгерская империя прекратила своё существование. В 23 года Гёдель стал гражданином [Австрии](#) Обычно Гёделя считают австрийцем, но за свою жизнь он неоднократно менял гражданство. Рождённый подданным Австро-Венгрии, он в 12 лет принял гражданство Чехословакии после того, как Австро-Венгерская империя прекратила своё существование. В 23 года Гёдель стал гражданином Австрии, а в 32 года, после захвата Австрии [Гитлером](#) Обычно Гёделя считают австрийцем, но за свою жизнь он неоднократно менял гражданство. Рождённый подданным Австро-Венгрии, он в 12 лет принял гражданство Чехословакии после того, как Австро-Венгерская империя прекратила своё существование. В 23 года Гёдель стал гражданином Австрии, а в 32 года, после захвата Австрии Гитлером автоматически стал подданным [германского Рейха](#) Обычно Гёделя считают австрийцем, но за свою жизнь он неоднократно менял

# Первая теорема Гёделя о неполноте

---

Во всякой достаточно богатой непротиворечивой теории первого порядка (в частности, во всякой непротиворечивой теории, включающей формальную арифметику), существует такая замкнутая формула  $F$ , что ни  $F$ , ни  $\neg F$  не являются выводимыми в этой теории.

## Вторая теорема Гёделя о неполноте

---

Во всякой достаточно богатой непротиворечивой теории первого порядка (в частности, во всякой непротиворечивой теории, включающей формальную арифметику), формула, утверждающая непротиворечивость этой теории, не является выводимой в ней.

# Аксиома выбора

---

- «Для каждого семейства  $A$  непустых непересекающихся множеств существует множество  $B$ , имеющее один и только один общий элемент с каждым из множеств  $X$ , принадлежащих  $A$ »



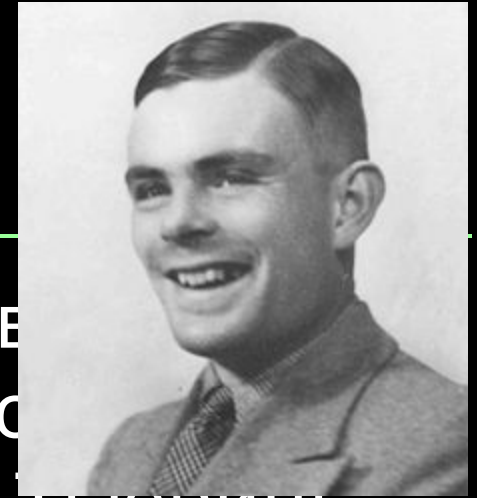
# Континуум-гипотеза

---

- Любое бесконечное подмножество континуума является либо счётным Любое бесконечное подмножество континуума является либо счётным, либо континуальным
- **Обобщённая континуум-гипотеза** утверждает, что для любого бесконечного множества  $S$  не существует таких множеств, кардинальное число которых больше, чем у  $S$ , но меньше, чем у множества всех его подмножеств  $2^S$ .

# Тьюринг

---



- Мемориальная доска, установленная на стене одной из лондонских школ гласит: "Здесь родился Алан Тьюринг (1912 — 1954), взломщик кодов [*Code-breaker*] и пионер информатики [*computer science*] «
- Машина Тьюринга
- "Minds and Computers", AI: Turing test

# Джон фон Нейман

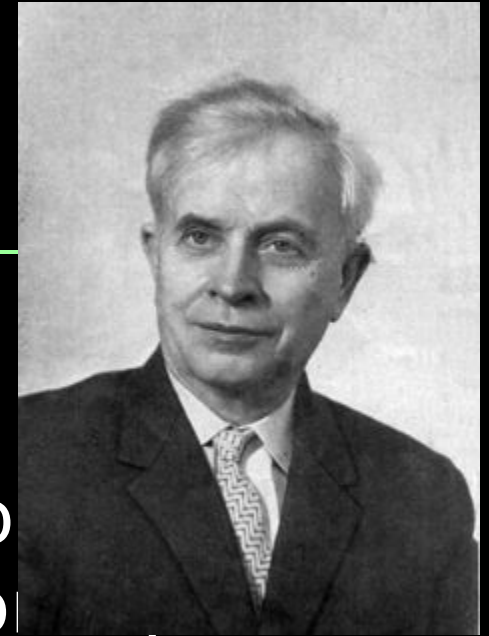
---



сделавший важный вклад в квантовую механику, сделавший важный вклад в квантовую механику, функциональный анализ сделавший важный вклад в квантовую физику, функциональный анализ, теорию множеств сделавший важный вклад в квантовую физику, функциональный анализ, теорию множеств, информатику сделавший важный вклад в квантовую физику, функциональный анализ, теорию множеств, информатику, экономику сделавший важный вклад в квантовую физику, функциональный анализ, теорию множеств, информатику, экономику и другие отрасли науки. Наиболее известен как праотец современной

# А. А. Марков (младший)

---



- Основные труды по теории динамических систем, топологии Основные труды по динамических систем, топологии, топологической алгебре, теории алгоритмов Основные труды по теории динамических систем, топологии, топологической алгебре, теории алгоритмов и конструктивной математике
- **LOGIC and COMPUTABILITY**

# А. Н. Колмогоров



- Современная ТВ; результаты топологии Современная Т топологии, математической логике Современная ТВ; р топологии, математической логике, теории турбулентности Современная ТВ; результаты в топологии, математической логике, теории турбулентности, теории сложности алгоритмов и пр.

- Аксиоматика Колмогорова
- Двойственность Колмогорова
- Неравенство Колмогорова

# В.А. Успенский

- **Владимир Андреевич Успенский** (род. 27 ноября [1930](#)) — российский математик, лингвист, физико-математических наук, специалист по математической логике, философская проза. Инициатор реформы образования в России.
- Окончил механико-математический факультет МГУ (1952), ученик [А. Н. Колмогорова](#). Окончил механико-математический факультет МГУ (1952), ученик А. Н. Колмогорова. Зав. кафедрой математической логики и теории алгоритмов механико-математического факультета МГУ (1966). Один из организаторов [Отделения теоретической и прикладной лингвистики](#) МГУ, где также преподаёт.

