«ПАРАДОКС МОНТИ-ХОЛЛА»

«Let’s Make a Deal»

- Парадо́кс Мо́нти Хо́лла — одна из известных задач теории вероятностей, решение которой, на первый взгляд, противоречит здравому смыслу. Задача формулируется как описание гипотетической игры, основанной на американском телешоу «Let’s Make a Deal», и названа в честь ведущего этой передачи.

Формулировка задачи:

Представьте, что вы стали участником игры, в которой вам нужно выбрать одну из трех дверей. За одной из дверей находится автомобиль, за двумя другими дверями — козы. Вы выбираете одну из дверей, например, номер 1, после этого ведущий, который знает, где находится автомобиль, а где — козы, открывает одну из оставшихся дверей, например, номер 3, за которой находится коза. После этого он спрашивает вас, не желаете ли вы изменить свой выбор и выбрать дверь номер 2. Увеличатся ли ваши шансы выиграть автомобиль, если вы примете предложение ведущего и измените свой выбор

Решение по теореме Байеса

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{N} P(B|A_j)P(A_j)}$$

где
***P*(*A*$_j$) — априорная вероятность гипотезы *A*$_j$;**
P*(*A*$_j$ | *B*) — вероятность гипотезы *A*$_j$ при наступлении события *B
***P*(*B* | *A*$_j$) — вероятность наступления события *B* при истинности гипотезы *A*$_j$.**
При этом подразумевается, что *N* гипотез *A*$_j$ являются взаимоисключающими

$$\forall j \in \{1, \ldots, N\} \forall k \in \{1, \ldots, N\}, j \neq k$$

$$P(A_j \cap A_k) = 0$$

и образуют полную совокупность:

$$\sum_{j=1}^{N} P(A_j) = 1$$

- В данной задаче $N = 3$, гипотезы:
- A_1 — «автомобиль за дверью 1»;
- A_2 — «автомобиль за дверью 2»;
- A_3 — «автомобиль за дверью 3».
- Событие B — «первый выбор игрока — дверь 1; ведущий открыл дверь 3, где оказалась коза». Это совокупность двух событий: , где C — «первый выбор игрока — дверь 1», D — «ведущий открыл дверь 3, где оказалась коза».

Ход решения

- По формуле условной вероятности

$$P(B|A_j) = P(C \cap D|A_j) = P(D|C \cap A_j)P(C|A_j)$$

- Подставим это выражение в формулу Байеса

$$P(A_i|B) = \frac{P(D|C \cap A_i)P(C|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{3} P(D|C \cap A_j)P(C|A_j)P(A_j)}$$

- Условие задачи подразумевает, что изначальный выбор игрока не связан с тем, за какой дверью на самом деле находится автомобиль (игрок не знает, где он), то есть C и — независимые пары событий.

- *Это означает, что*
- $P(C \mid A_1) = P(C \mid A_2) = P(C \mid A_3) = P(C)$
- **Подставив в нашу формулу и сократив дробь на $P(C)$, получим**

$$P(A_i|B) = \frac{P(D|C \cap A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{3} P(D|C \cap A_j)P(A_j)}$$

- **Если игрок выбрал дверь 1, а автомобиль находится за дверью 2, то ведущий обязан открыть дверь 3, то есть . Если игрок выбрал дверь 1, а автомобиль находится за дверью 3, то ведущий не может открыть дверь 3, то есть .**

Допущения:

- Первое: если игрок выбрал дверь 1, и автомобиль находится за дверью 1, то мы считаем, что ведущий открывает с равной вероятностью одну из дверей 2 и 3, то есть   (именно это следует считать проявлением «честности» ведущего).
- Второе: мы считаем, что априори автомобиль может находиться с равной вероятностью за любой дверью, то есть $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$

- **Второе допущение позволяет сократить дробь и получить формулу**

$$P(A_i|B) = \frac{P(D|C \cap A_i)}{\sum_{j=1}^{3} P(D|C \cap A_j)}$$

- **В согласии с первым допущением получаем результат:**

$$P(A_1|B) = \frac{P(D|C \cap A_1)}{\sum_{j=1}^{3} P(D|C \cap A_j)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + 1 + 0} = \frac{1}{3}$$

$$P(A_2|B) = \frac{P(D|C \cap A_2)}{\sum_{j=1}^{3} P(D|C \cap A_j)} = \frac{1}{\frac{1}{2} + 1 + 0} = \frac{2}{3}$$

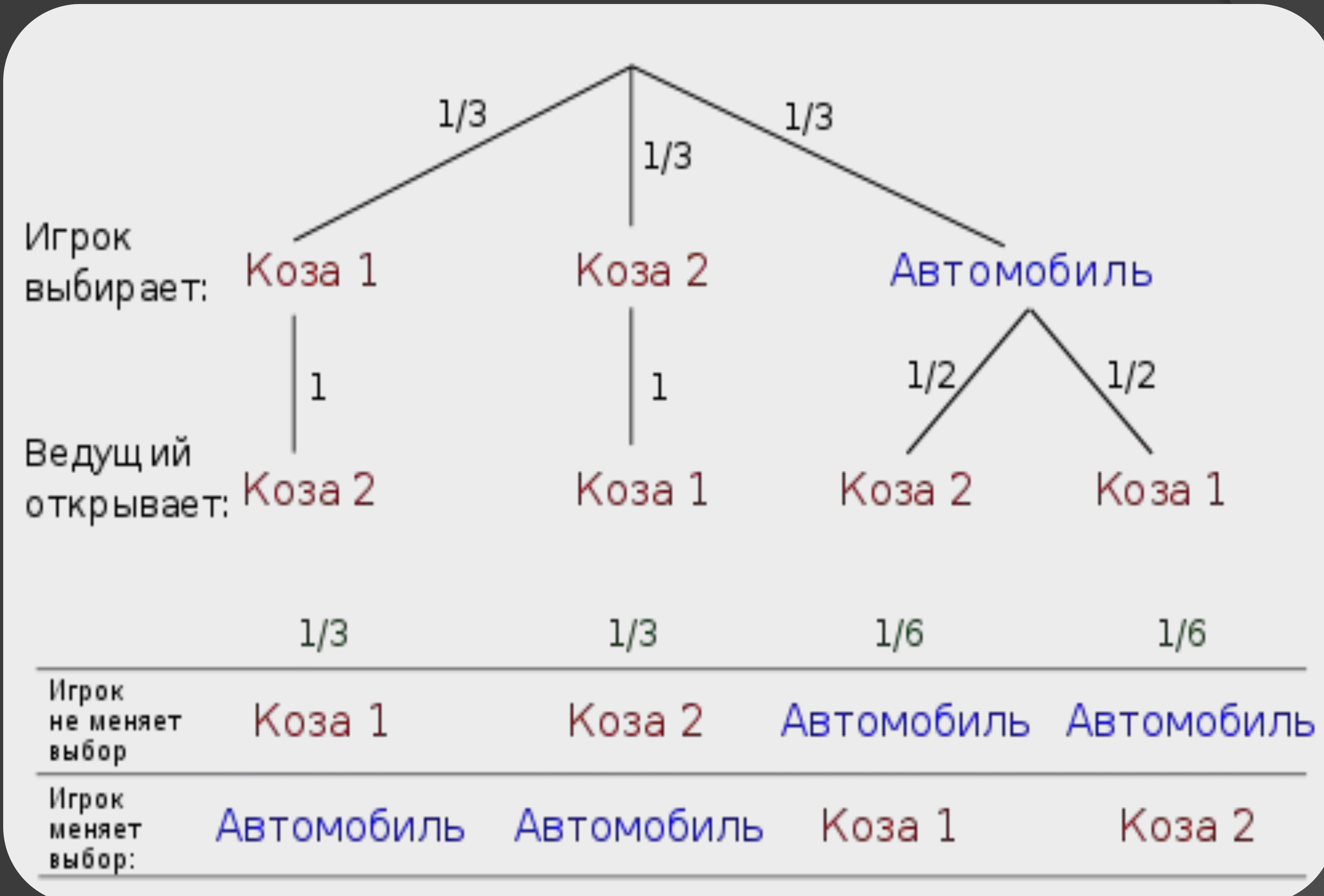
$$P(A_3|B) = \frac{P(D|C \cap A_3)}{\sum_{j=1}^{3} P(D|C \cap A_j)} = \frac{0}{\frac{1}{2} + 1 + 0} = 0$$

Ответ к задаче

- Правильным ответом к этой задаче является следующее: да, шансы выиграть автомобиль увеличиваются в два раза, если игрок будет следовать совету ведущего и изменит свой первоначальный выбор.

- Более интуитивно понятное рассуждение: Пусть игрок действует по стратегии «изменить выбор». Тогда проиграет он только в том случае, если изначально выберет автомобиль. А вероятность этого — одна треть. Следовательно, вероятность выигрыша: 1-1/3=2/3. Если же игрок действует по стратегии «не менять выбор», то он выиграет тогда и только тогда, когда изначально выбрал автомобиль. А вероятность этого — одна треть.

Дерево возможных решений игрока и ведущего, показывающее вероятность каждого исхода



THE END