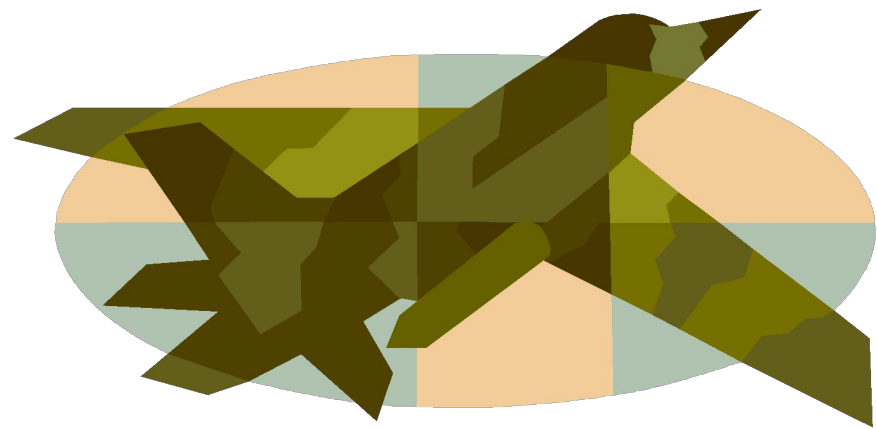
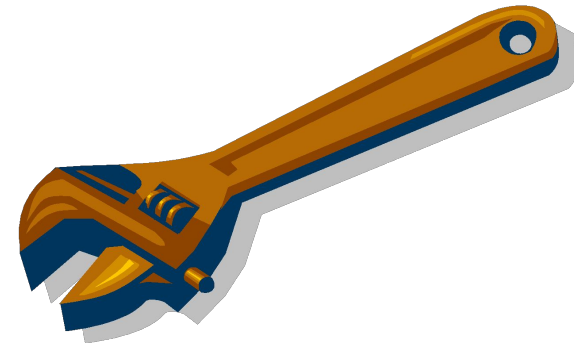


Тема 10. Механика твердого тела

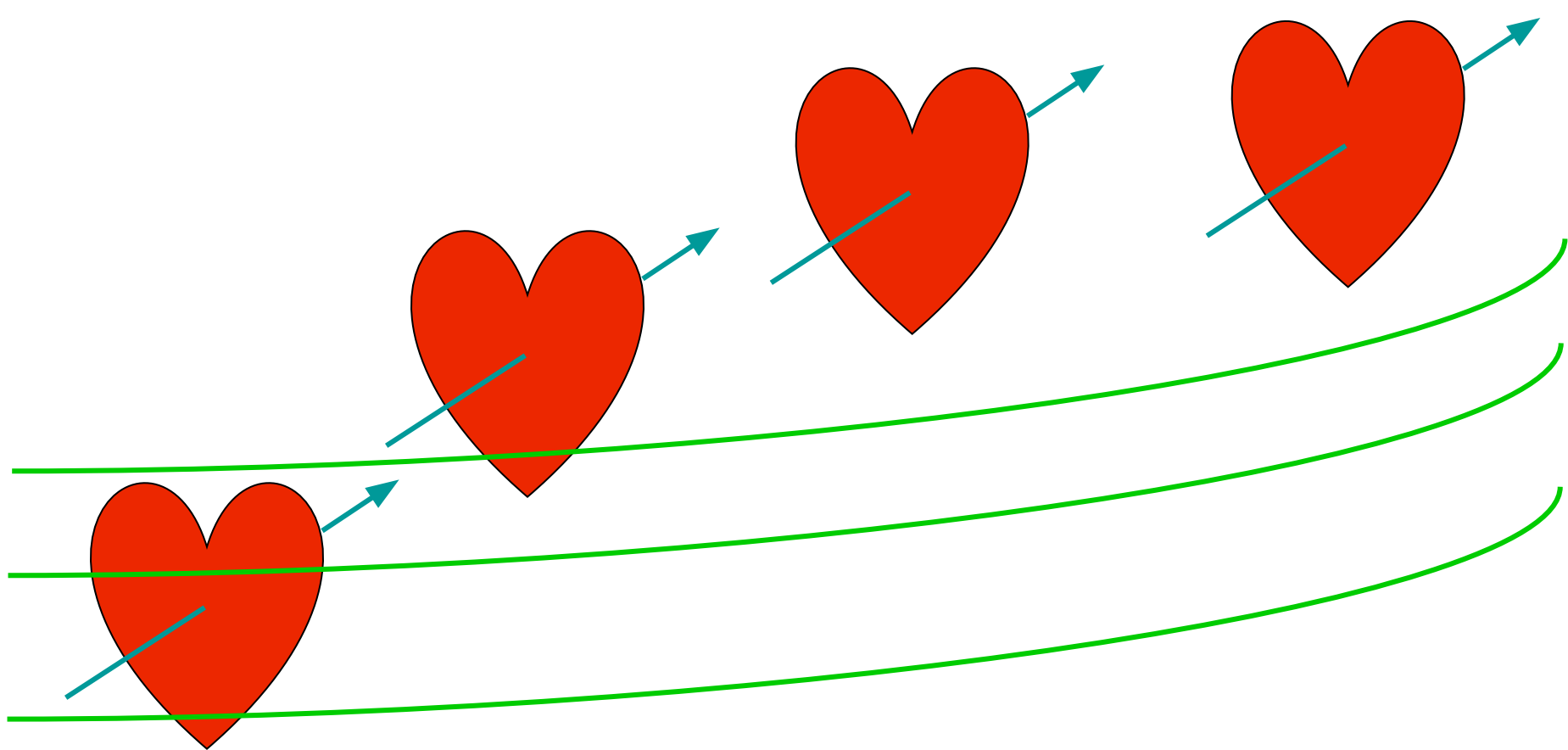


Абсолютно твердое тело (АТТ)-

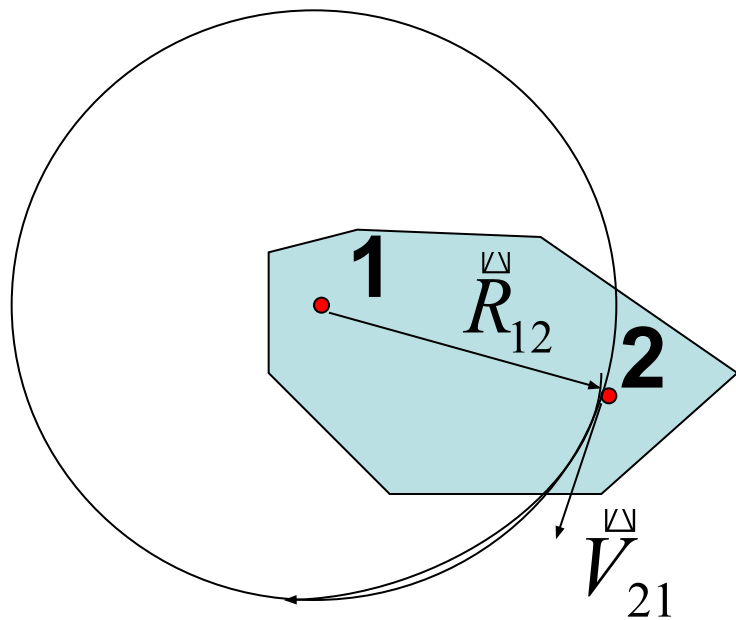
Система материальных точек с
неизменным взаимным
расположением



Поступательное движение



Неизменное взаимное расположение материальных точек в абсолютно твердом теле означает, что движение одной МТ относительно другой может быть **только вращательным**



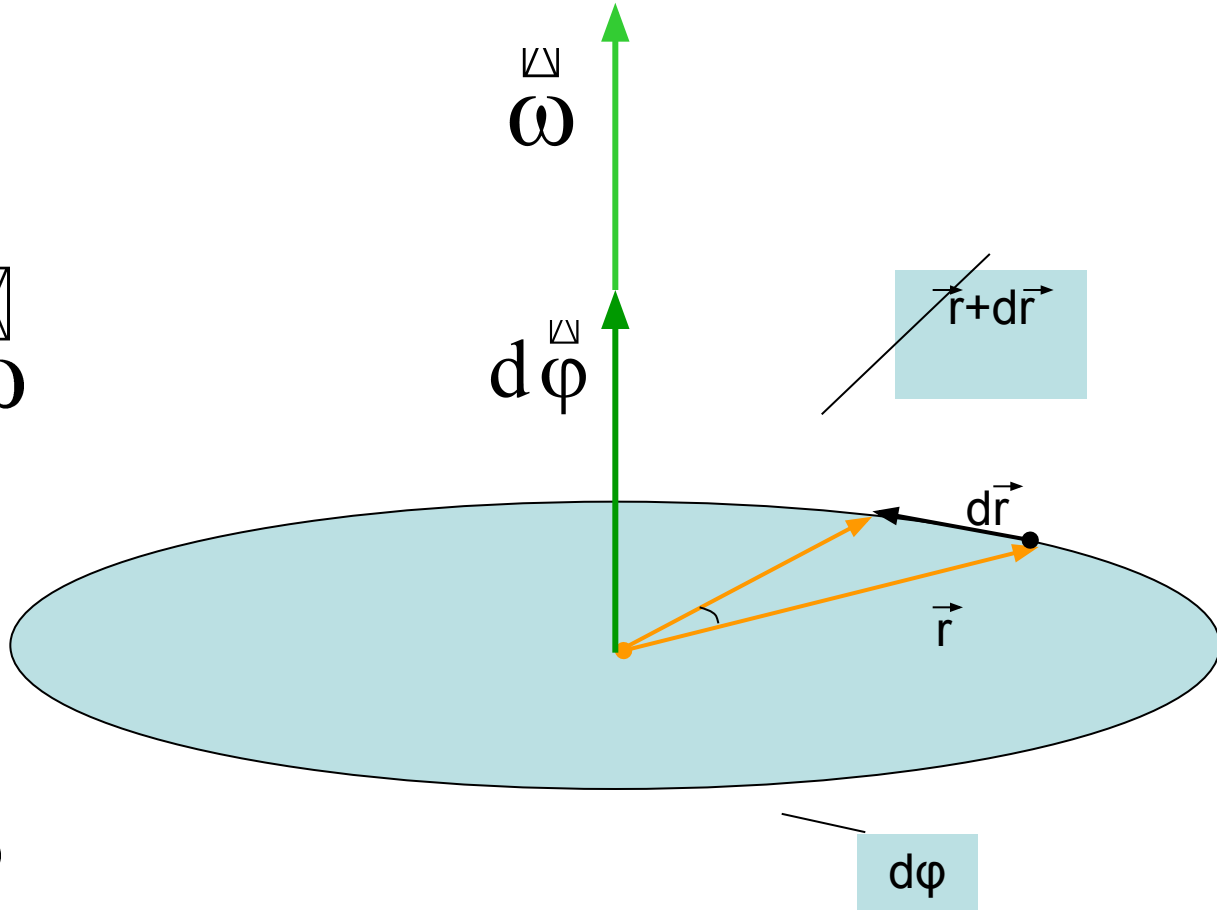
$$l = \varphi r$$

$$dl = d\varphi r$$

$$d\vec{r} = d\vec{\varphi} \times \vec{r}$$

$$\frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \vec{\omega}$$

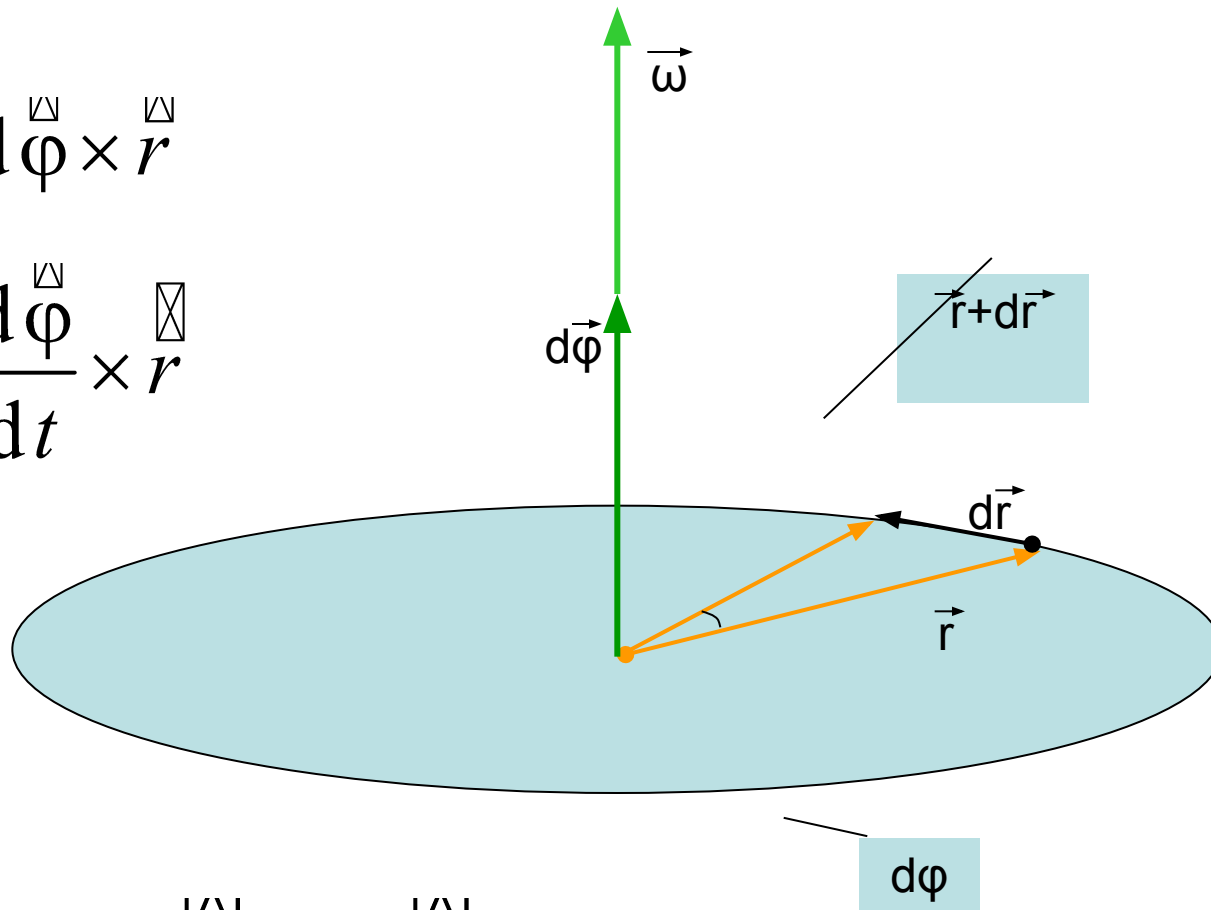
$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\beta}$$



Линейная и угловая скорости

$$d\vec{r} = d\vec{\varphi} \times \vec{r}$$

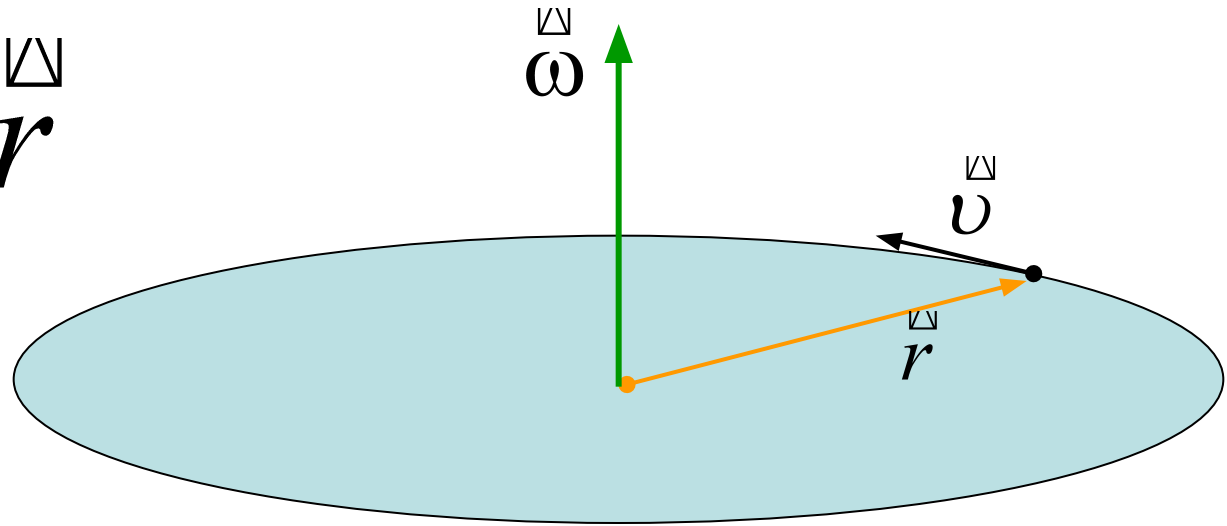
$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{r}$$



$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Линейное и угловое ускорения

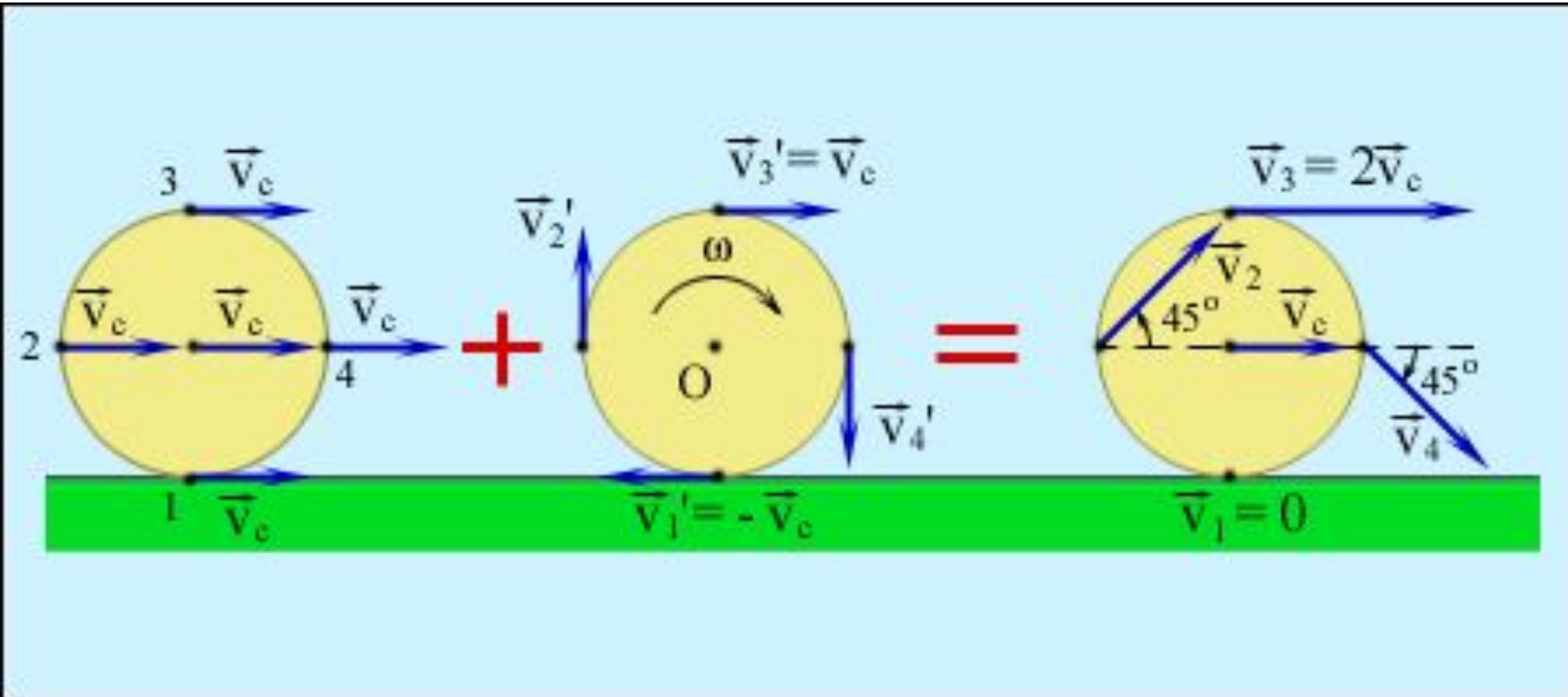
$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$



$$\vec{a} = \vec{\beta} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

$$\vec{a}_\tau = \vec{\beta} \times \vec{r} \quad \vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v}$$

Качение колеса как сумма поступательного движения (1) со скоростью v и вращения (2) с угловой скоростью ω относительно оси O , проходящей через центр масс.

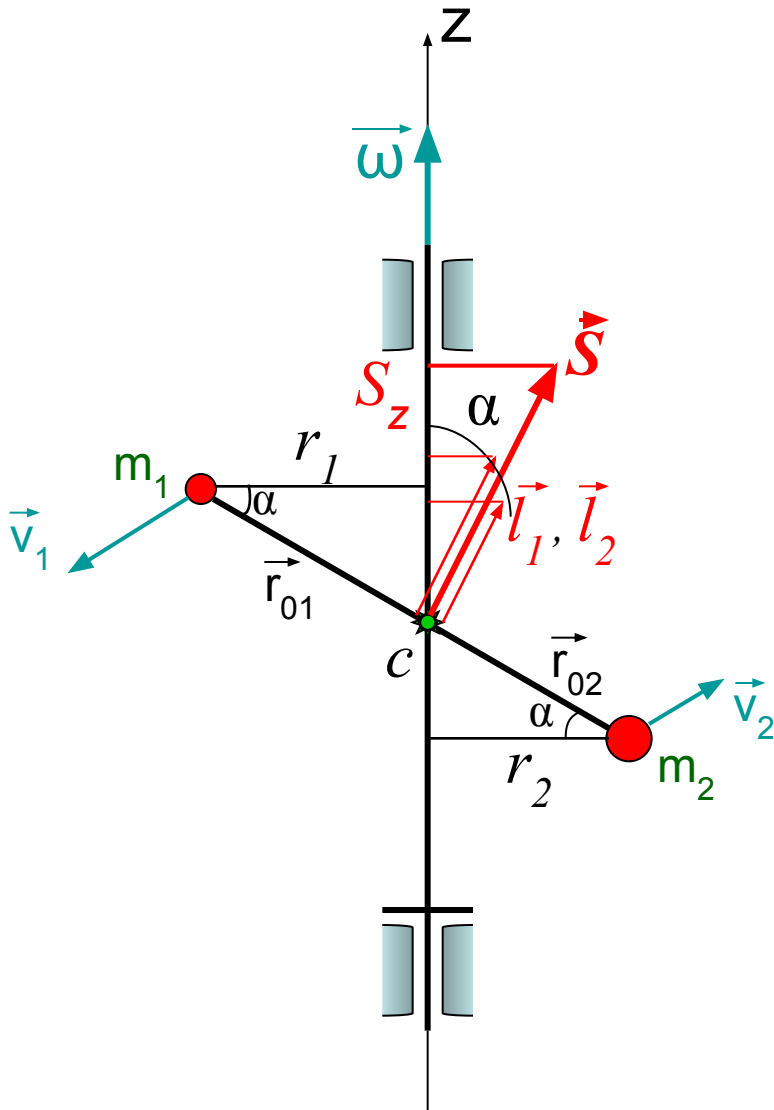


$$m_c \overset{\boxminus}{a}_c = \sum_i \overset{\boxminus}{F}_i$$

$$\overset{\boxminus}{p}_c = m_c \overset{\boxminus}{v}_c$$

$$\overset{\boxminus}{J} = \overset{\boxminus}{S} + \overset{\boxminus}{L}$$

Модель АТТ на примере двух жестко связанных материальных точек



$$S_z = l_{1z} + l_{2z} = l_1 \cos \alpha + l_2 \cos \alpha =$$

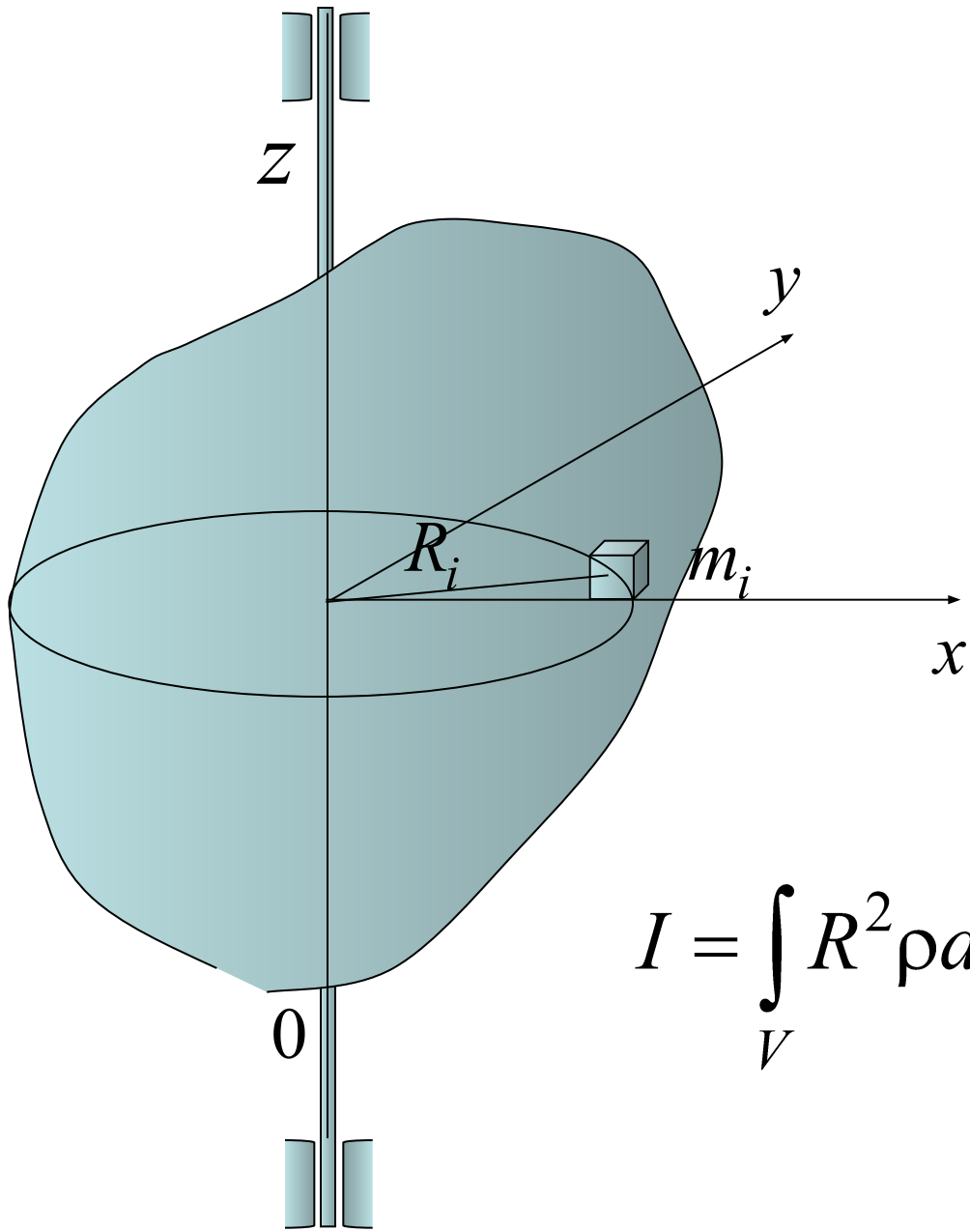
$$= m_1 v_1 r_{01} \cos \alpha + m_2 v_2 r_{02} \cos \alpha =$$

$$= (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2) \omega = I_z \omega$$

$$I_z = \sum_i m_i r_i^2$$

$$S_z = I_z \omega$$

$$S_\omega = I_\omega \omega$$



$$I_z = \sum_i m_i R_i^2$$

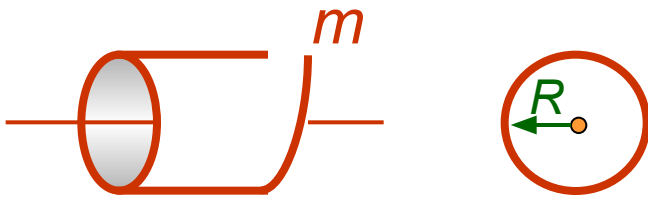
$$I = \int_m R^2 dm$$

$$I = \int_V R^2 \rho dV = \int_V (x^2 + y^2) \rho dV$$

Вычисление момента инерции

$$I_z = \sum_i m_i R_i^2$$

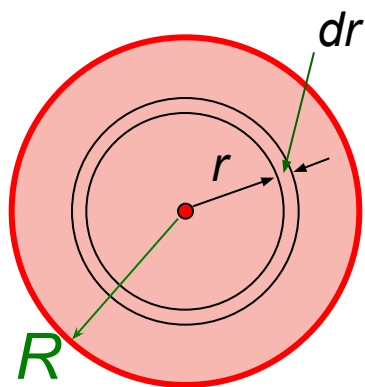
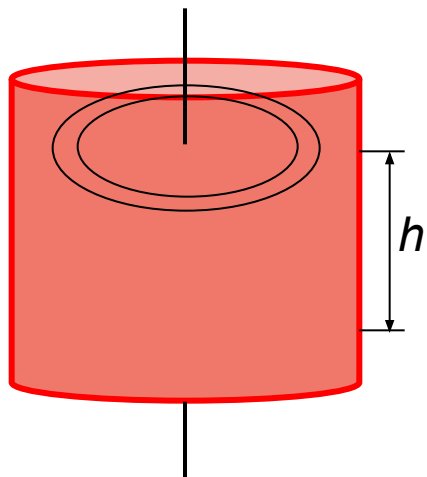
1. Тонкий обруч, тонкостенный цилиндр



$$I = \sum_i m_i R_i^2 \approx R^2 \sum_i m_i = mR^2$$

$$I = m R^2$$

2. Сплошной диск, сплошной цилиндр



$$I_{\bar{z}} = \sum_i m_i r_i^2$$

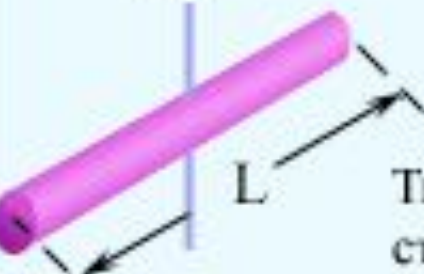





$$I = \int_V r^2 \rho dV \quad dV = h \cdot 2\pi r \cdot dr$$

$$I = 2\pi\rho h \int_0^R r^3 dr = 2\pi\rho h \frac{R^4}{4} =$$

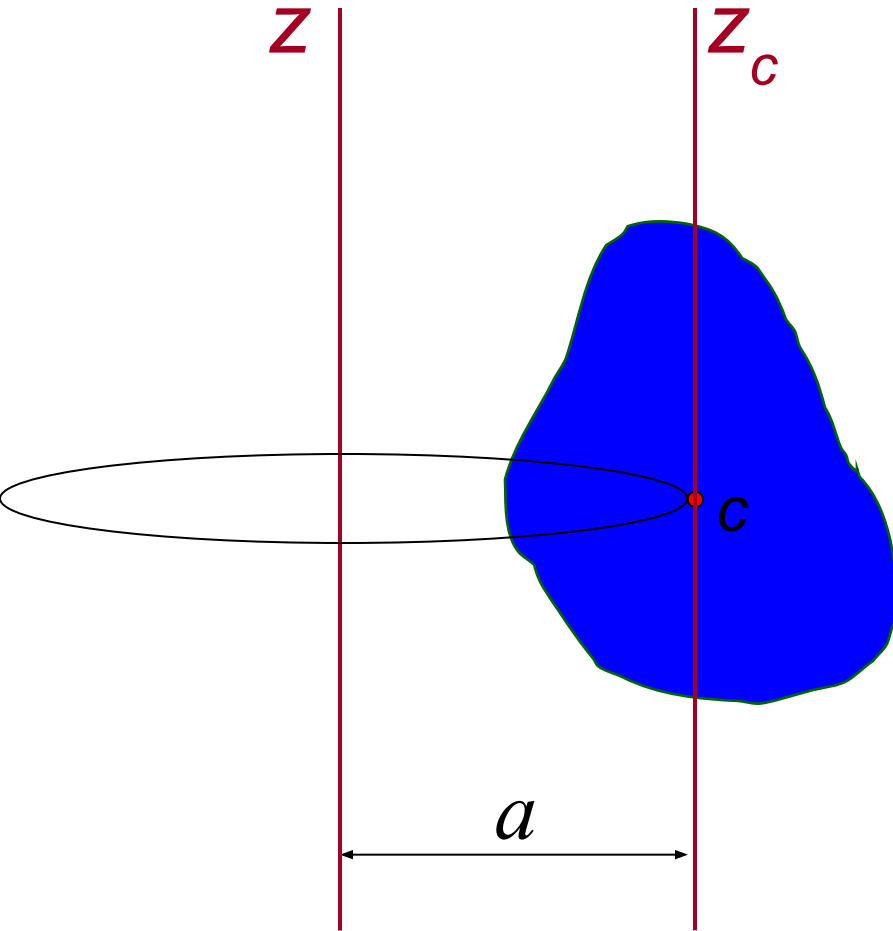
$$= \pi R^2 h \rho \frac{R^2}{2} = V \rho \frac{R^2}{2}$$

$$I = \frac{mR^2}{2}$$

Моменты инерции некоторых однородных твердых тел.

$I_c = \frac{1}{12} ML^2$  <p>Твердый стержень</p>	$I_c = \frac{2}{5} MR^2$  <p>Шар</p>	$I_c = \frac{2}{3} MR^2$  <p>Тонкостенная сферическая оболочка</p>
$I_c = MR^2$  <p>Тонкостенный цилиндр</p>	$I_c = \frac{1}{2} MR^2$  <p>Диск</p>	$I_c = \frac{1}{4} MR^2$  <p>Диск</p>

Теорема Штейнера

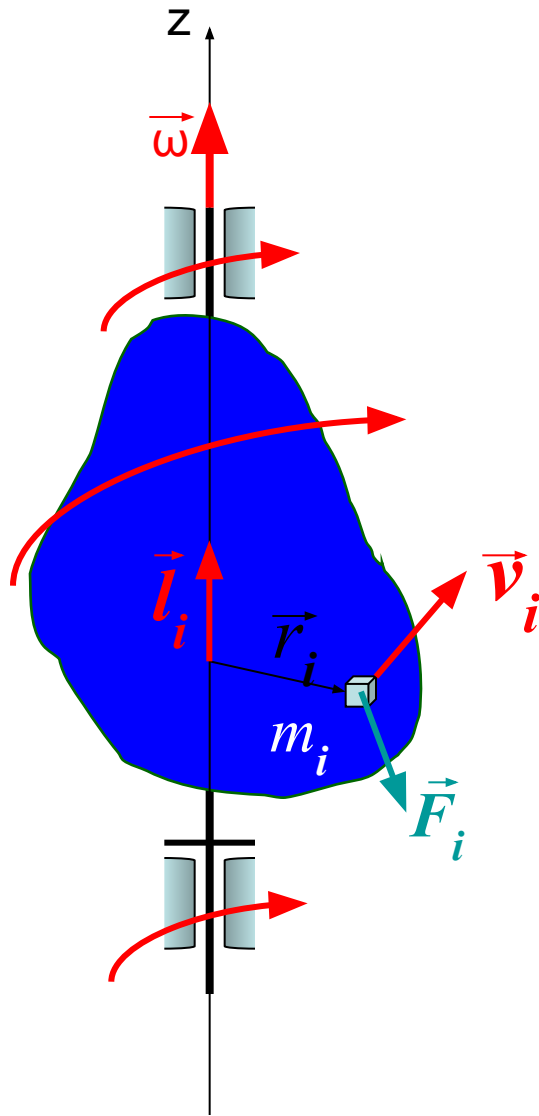


$$I_z = I_c + ma^2$$

I_z - момент инерции
относительно оси Z

I_c - момент инерции
относительно оси,
проходящей через
центр масс тела

Вращение твердого тела относительно неподвижной оси



$$\frac{d\vec{l}_i}{dt} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{M}_i$$

Если $\vec{S} = I \vec{\omega}$, то

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{dI}{dt} \vec{\omega} + I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{l}_i}{dt} = \sum_i \vec{M}_i$$

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{M}_i$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$$

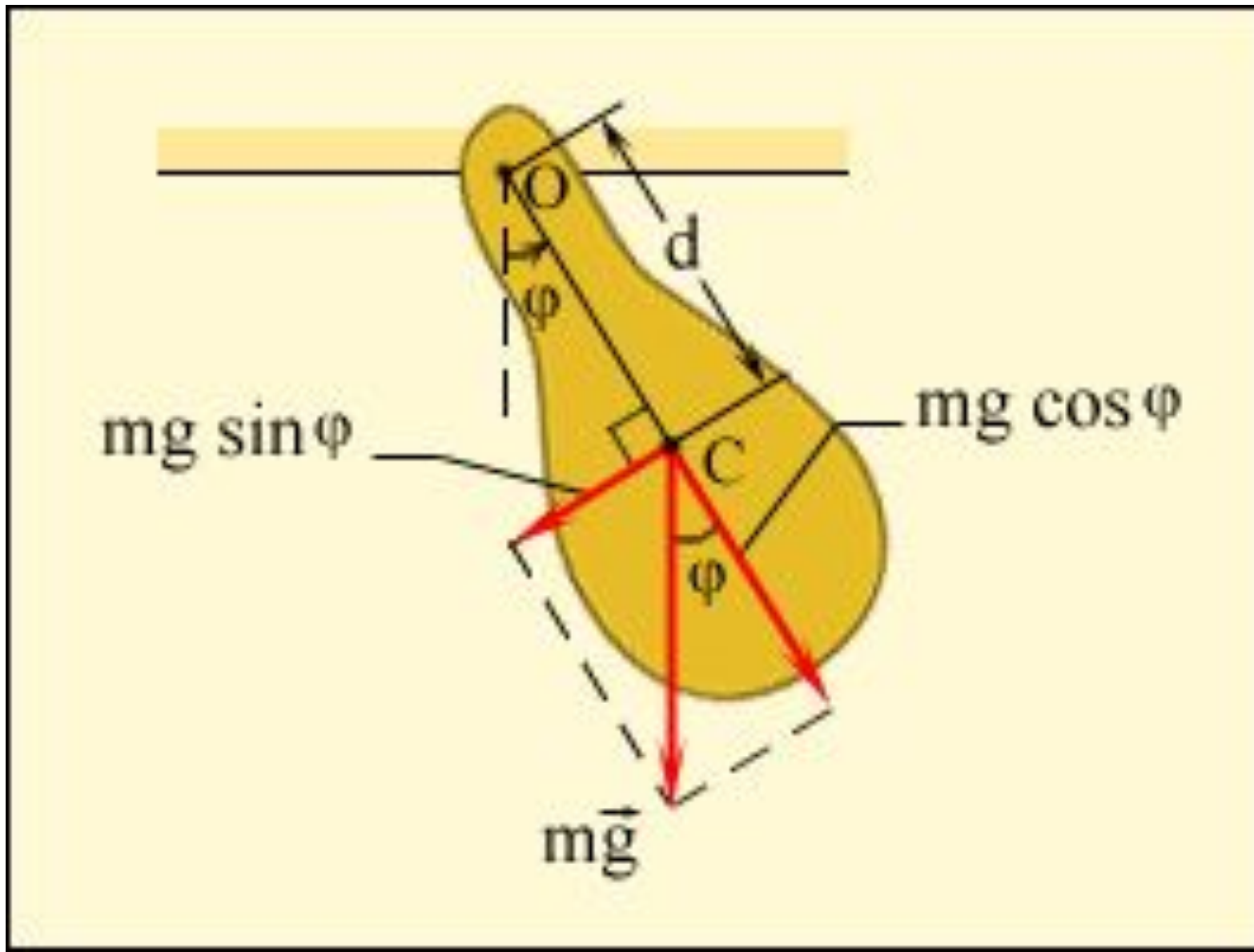
Основное уравнение динамики вращательного движения АТТ

$$I \ddot{\beta} = M$$

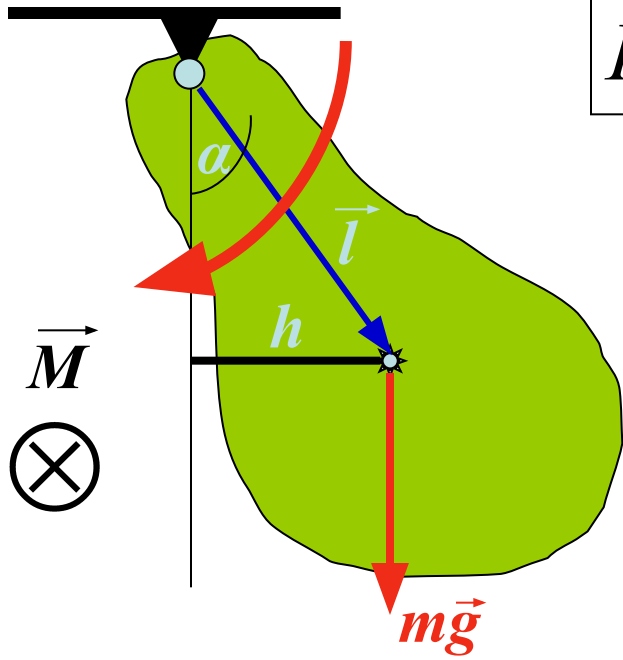
Закон сохранения момента импульса АТТ

$$\sum I_i \cdot \overset{\boxtimes}{\omega}_i = \text{const}$$

Физический маятник



Физический маятник



$$I\ddot{\alpha} = M$$

$$I\ddot{\alpha} = -mgl \sin \alpha \approx -mgl\alpha$$

$$I\ddot{\alpha} + mgl\alpha = 0$$

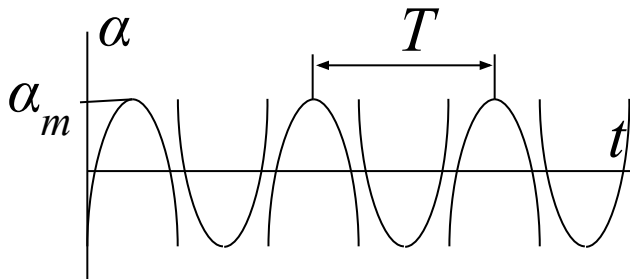
$$\omega_0^2 = \frac{mgl}{I}$$

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\alpha = \alpha_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

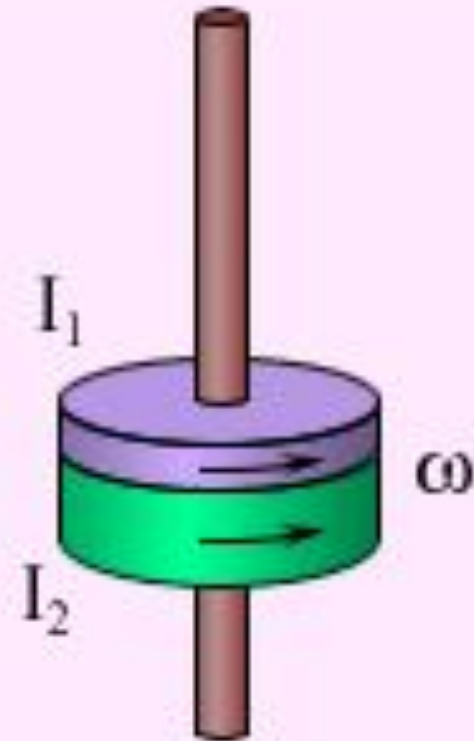
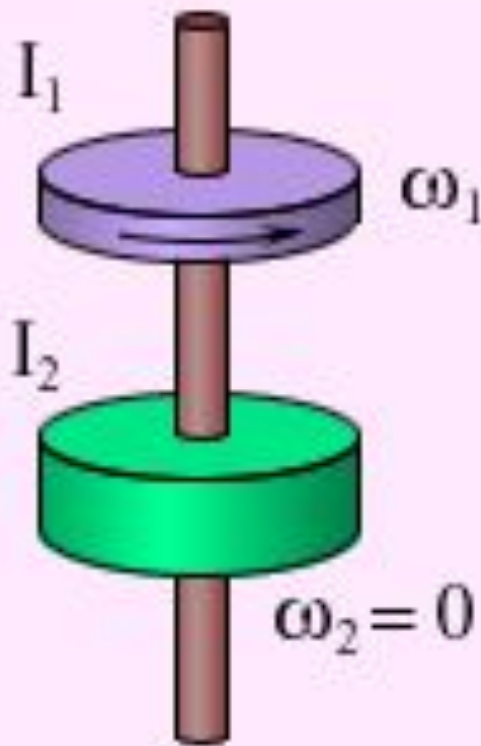
$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$



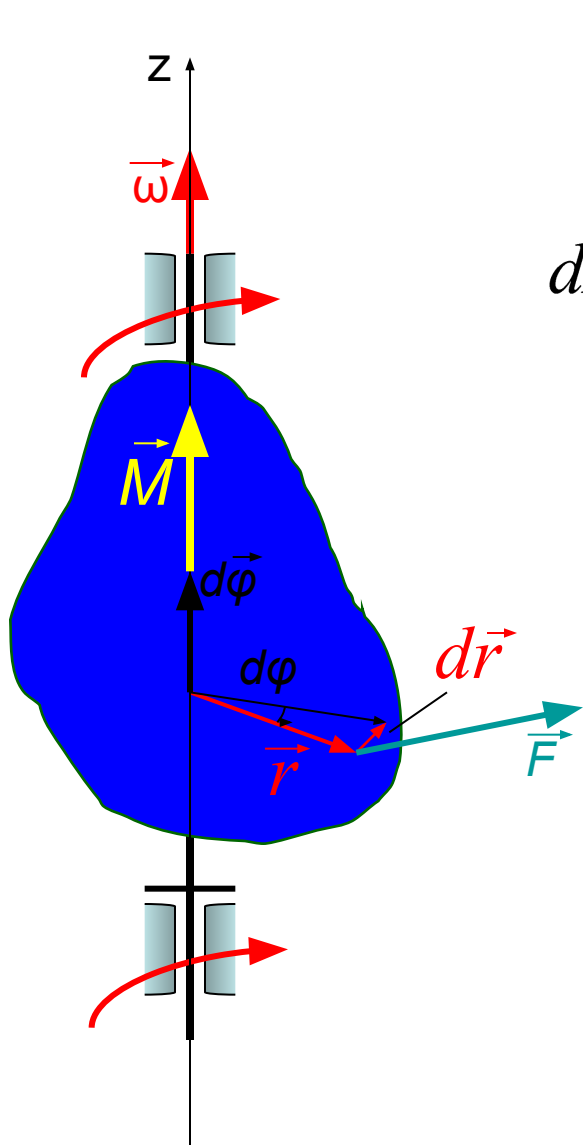
$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}}$$

Неупругое вращательное столкновение двух дисков.



На примере вращения твердого тела относительно неподвижной оси



$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad d\vec{r} = d\vec{\varphi} \times \vec{r}$$

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{\varphi} \times \vec{r} = \vec{r} \times \vec{F} \cdot d\vec{\varphi} = \vec{M} \cdot d\vec{\varphi}$$

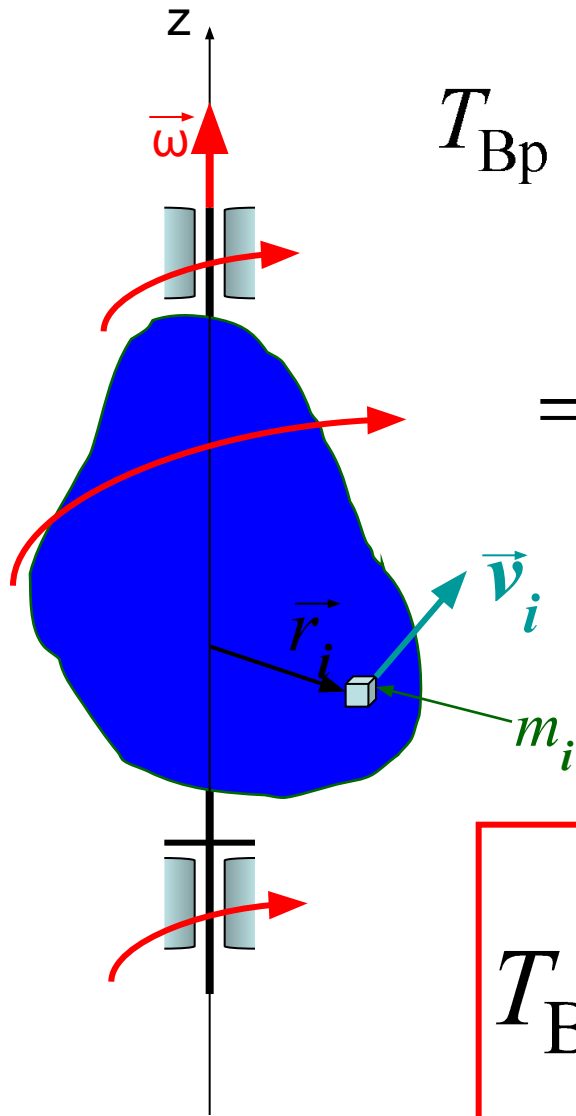
$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \vec{M} \cdot d\vec{\varphi} \quad \vec{A} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \times d\vec{r}$$

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{M} \cdot d\vec{\varphi}}{dt},$$

$$N = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$$

$$N = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Вращение твердого тела относительно неподвижной оси



$$T_{\text{Вр}} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\omega r_i)^2 =$$
$$= \frac{\omega^2}{2} \sum_i m_i r_i^2 = \frac{I \omega^2}{2}$$

$$I = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2$$

$$T_{\text{ВР}} = \frac{I \omega^2}{2}$$

$$T_{\text{ПОСТ}} = \frac{m v^2}{2}$$

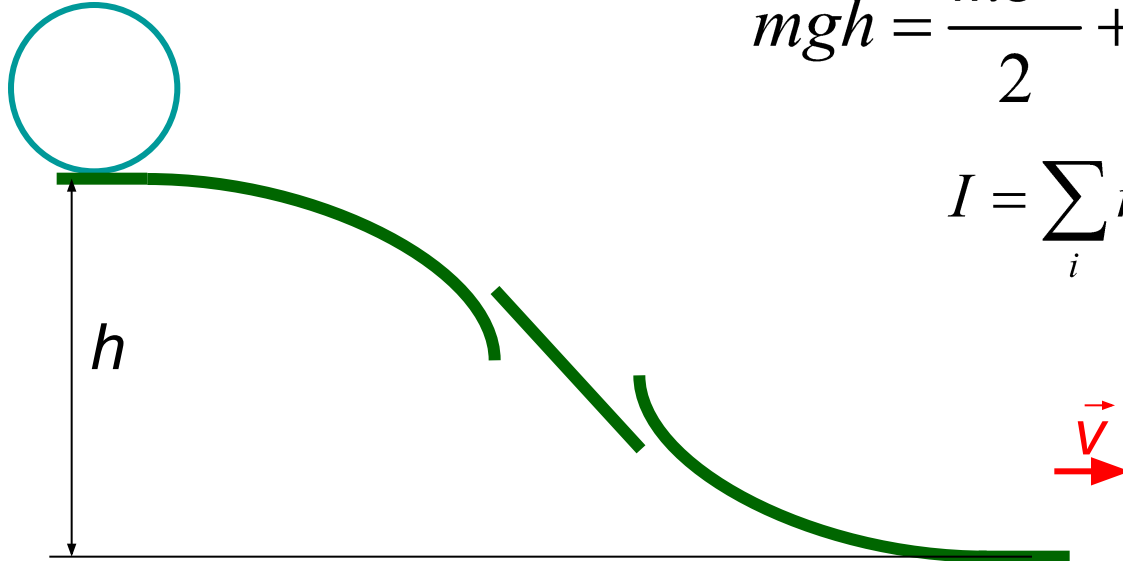
Плоское движение =
 поступательное ц.м. +
 вращательное в с.о. ц.м.

$$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}'_i = \vec{v}_c + \vec{\omega} \times \vec{r}'_i$$

$$T = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum \frac{m_i v_c^2}{2} + \cancel{2 \sum \frac{m_i v_c v'_i}{2}} + \cancel{I \omega} \sum \frac{m_i v_i'^2}{2} =$$

$$T = \frac{m v_c^2}{2} + \sum \frac{m_i r_i^2 \omega^2}{2} = \frac{m v_c^2}{2} + \frac{I \omega^2}{2}$$

Пример: скатывание обруча с горки



$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}; \quad \boxed{\omega = \frac{v}{R}}$$

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \approx R^2 \sum_i m_i = mR^2$$

$$\frac{I\omega^2}{2} = \frac{mv^2}{2}$$

$$mgh = mv^2$$

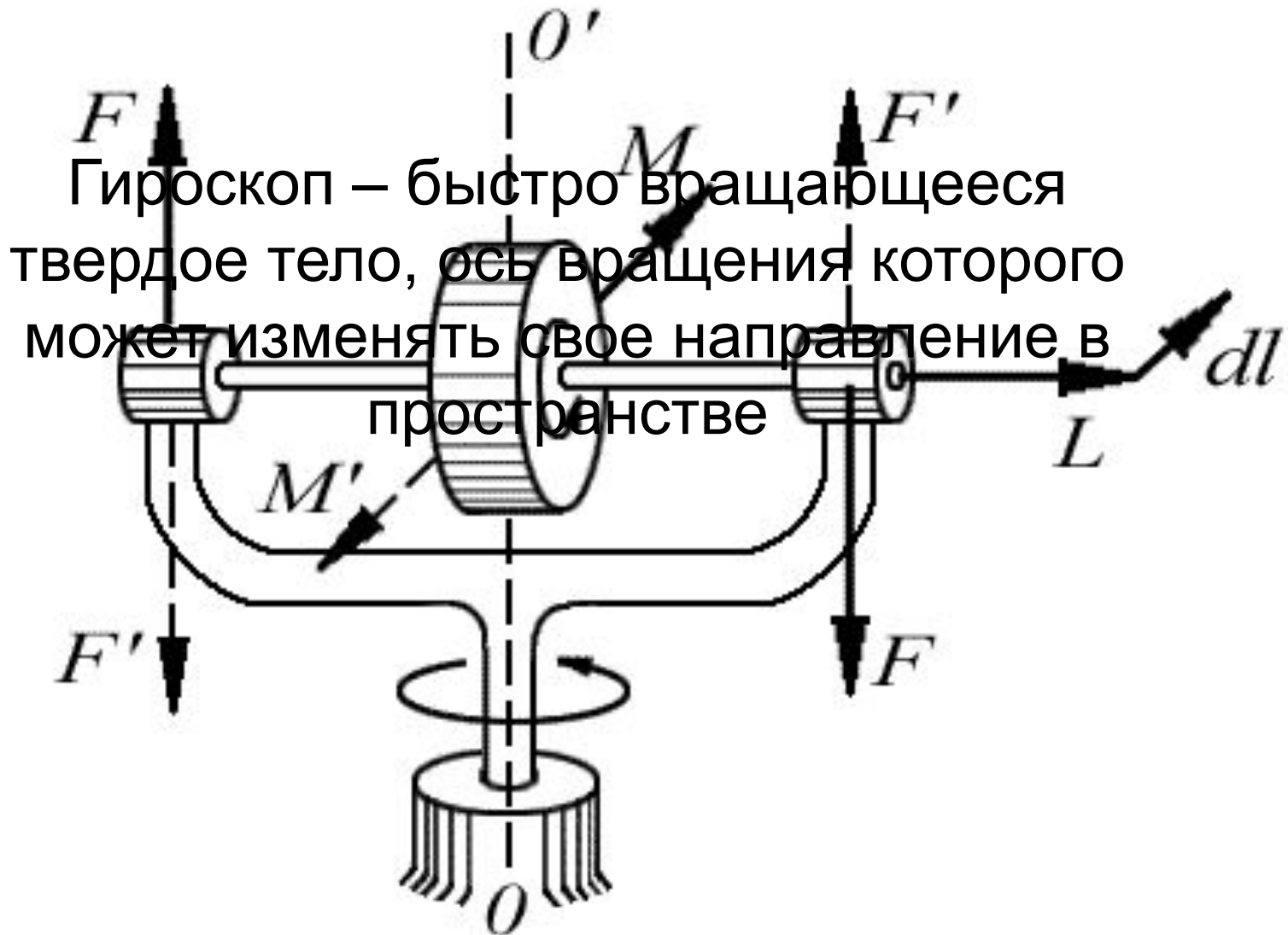
$$v = \sqrt{gh}$$

Для сравнения: соскальзывание без вращения

$$mgh = \frac{mv^2}{2}; \quad \boxed{v = \sqrt{2gh}}$$

Поступательное движение	Вращательное движение
Масса (инерция) - m	Момент инерции - $I_z = \sum m_i r_i^2$
Сила \vec{F}	Момент силы $\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$
Проекция импульса $p_x = mv_x$	Проекция момента импульса $L_z = I_z \omega_z$
Уравнение динамики (проекция)	
$F_x = \frac{dp_x}{dt} = ma_x$	$M_z = \frac{dL_z}{dt} = I_z \beta$
Кинетическая энергия	
$T = \frac{mv^2}{2}$	$T = \frac{I\omega^2}{2}$
Мощность	
$N = F_v v$	$N = M_\omega \omega$
Работа	
$A = \int F_v dl$	$A = \int M_\omega d\varphi$

Гирскопический эффект



Что означает «быстро вращающееся»?

Прецессия волчка в однородном поле

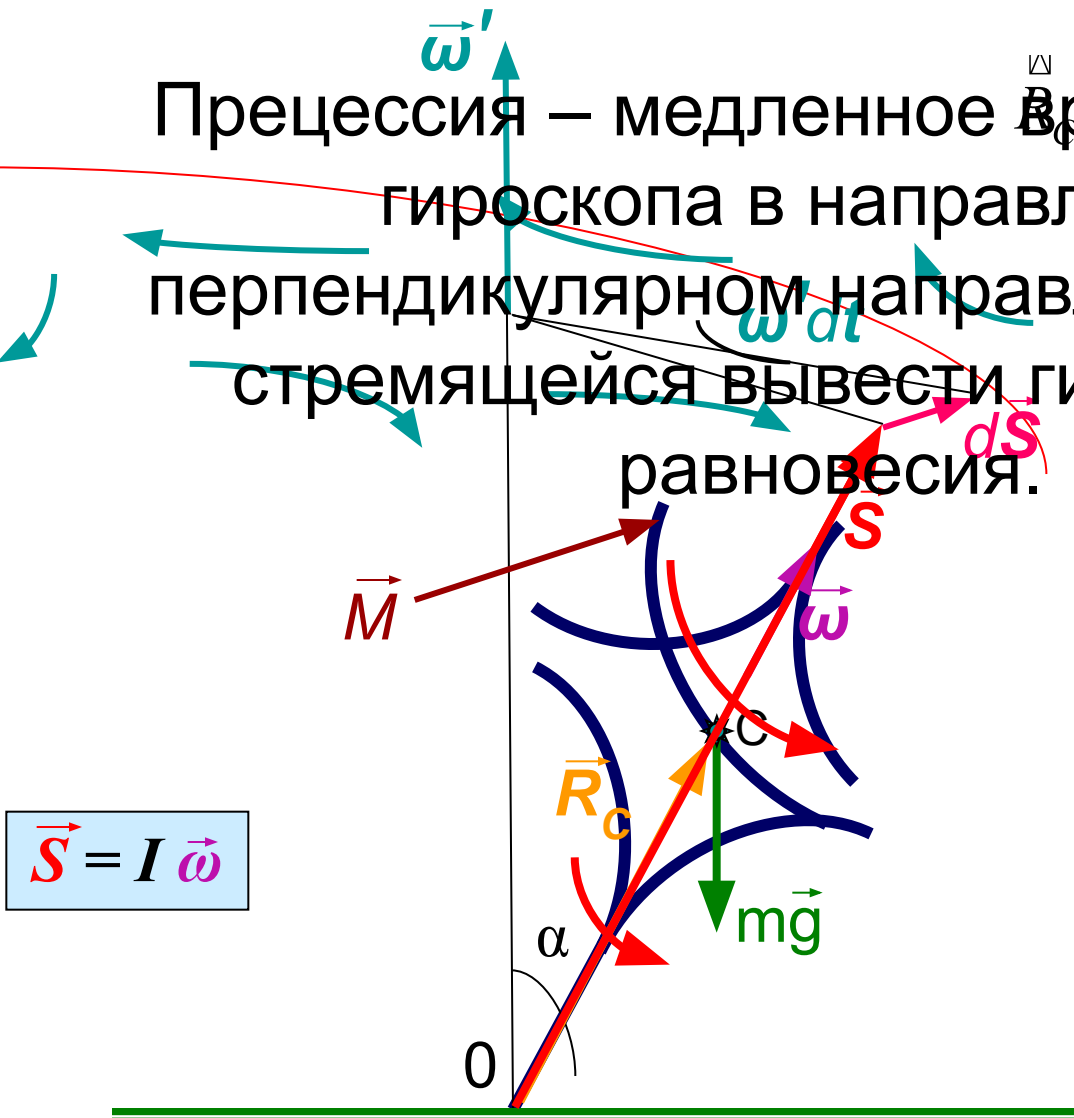
Прецессия – медленное $\vec{\omega}'$ вращение оси гироскопа в направлении, перпендикулярном направлению силы $M = \frac{dS}{dt}$

стремящейся вывести гироскоп из равновесия.

С другой стороны:

$$dS = S \sin \alpha \cdot \omega' dt = I \omega \sin \alpha \cdot \omega' dt$$

$$\omega' = \frac{mgR_c}{I\omega}$$



$$\vec{S} = I \vec{\omega}$$

«Быстро вращающееся»
означает, что угловая скорость
прецессии много меньше,
чем угловая скорость вращения
гироскопа.

$$\omega' \ll \omega$$

$$\frac{mgR_c}{I\omega^2} \ll 1$$

Притяжение Солнца и Луны заставляет земную ось прецессировать так же, как прецессирует ось наклонившегося быстро вращающегося волчка под действием силы тяжести

