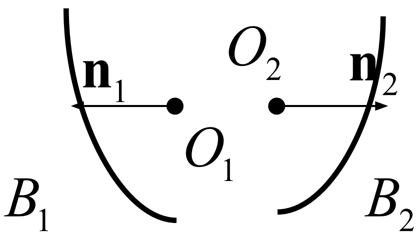
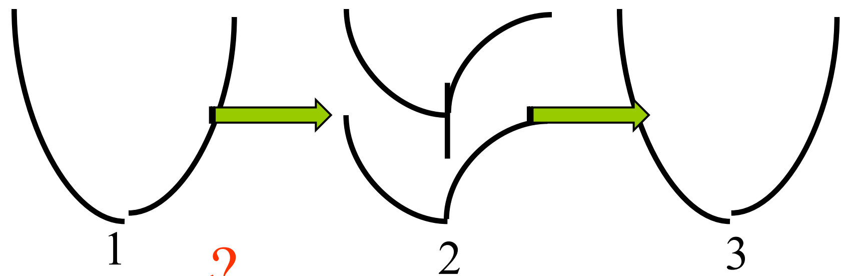
ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

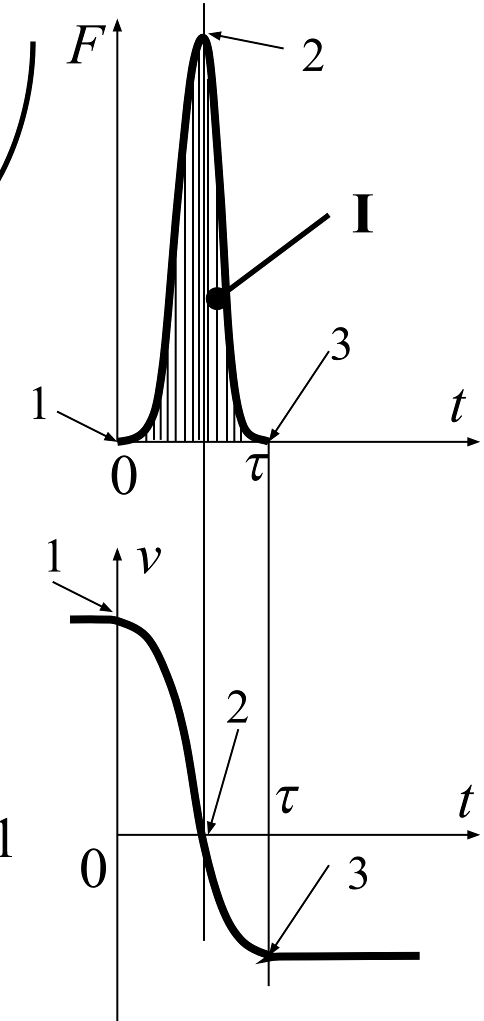
ЛЕКЦИЯ 11:

СОУДАРЕНИЕ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

1. Коэффициент восстановления







$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1, \quad \mathbf{I}_k = I\mathbf{n}_k \quad (k = 1, 2)$$

?

Кинематическое предположение Ньютона: отношение абсолютной величины проекции на общую нормаль к поверхностям тел относительной скорости точек контакта тел после удара к ее значению до удара (<u>коэффициент восстановления</u>) <u>есть</u> <u>постоянная величина</u>, зависящая лишь от материала тел.

$$\left(\mathbf{v}_{O_1}^{+} - \mathbf{v}_{O_2}^{+}\right) \cdot \mathbf{n} = -\varepsilon \left(\mathbf{v}_{O_1}^{-} - \mathbf{v}_{O_2}^{-}\right) \cdot \mathbf{n} \qquad 0 \le \varepsilon \le 1$$

$$\mathbf{v}_{O_1}^{+} \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{v}_{O_2}^{+} \cdot \mathbf{n}_2 = -\varepsilon \left(\mathbf{v}_{O_1}^{-} \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{v}_{O_2}^{-} \cdot \mathbf{n}_2\right)$$

$\varepsilon = 1$ **абсолютно упругий удар**

$0 < \varepsilon < 1$ **неупругий удар**

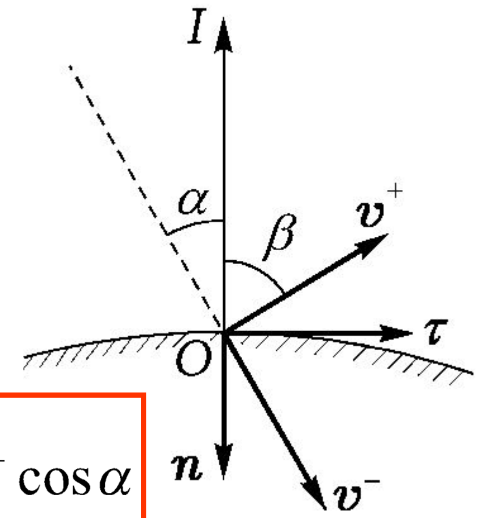
$\varepsilon = 0$ **абсолютно неупругий удар**

2. Пример: соударение точки с гладкой поверхностью

Т-ма об изменении количества движения

$$\begin{cases} v^{+}\sin\beta = v^{-}\sin\alpha \\ m\left(v^{+}\cos\beta + v^{-}\cos\alpha\right) = I \end{cases}$$

Кинематическое соотношение $\quad v^{+}\cos\beta = \varepsilon v^{-}\cos\alpha$



$$\boxed{\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\varepsilon}\operatorname{tg}\alpha, \quad v^{+} = v^{-}\sqrt{\sin^{2}\alpha + \varepsilon^{2}\cos^{2}\alpha}, \quad I = m(1+\varepsilon)v^{-}\cos\alpha}$$

Некоторые выводы

1) касательные составляющие скорости до и после удара равны между собой;

2) при абсолютно неупругом ударе точка после удара имеет только касательную составляющую;

3) при абсолютно упругом ударе угол падения равен углу отражения, а модуль скорости не изменяется;

4) при неупругом ударе угол падения меньше угла отражения;

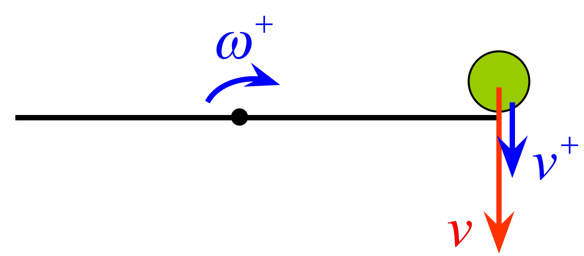
5) при абсолютно упругом ударе ударный импульс в два раза больше импульса при абсолютно неупругом ударе.

3. Еще один пример

Однородный стержень, который может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его центр тяжести, находится в равновесии. На один из концов стержня со скоростью v падает шар массы m. Длина стержня 2a, масса M. Коэффициент восстановления равен ε . Принимая шар за материальную точку, определить послеударное кинематическое состояние стержня и шара.

Т-ма об изменении кинетического момента для стержня

$$\frac{1}{3}Ma^2\left(\omega^+ - 0\right) = Ia$$



Т-ма об изменении количества движения для шара

$$m\left(v^+ - v\right) = -I$$

$$mva = mv^+a + \frac{1}{3}Ma^2\omega^+$$

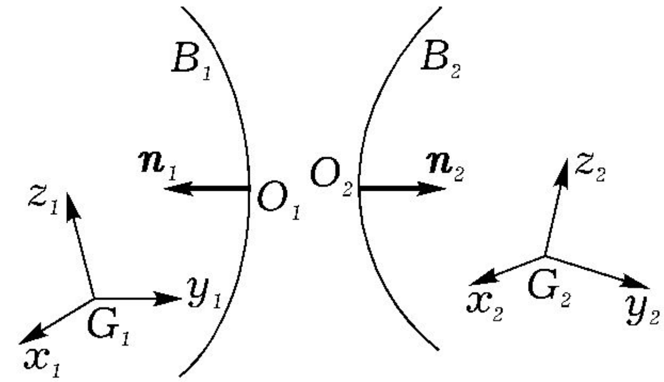
Кинематическое соотношение

$$v^+ - \omega^+ a = -\varepsilon v$$

$$v^+ = \frac{3m - \varepsilon M}{3m + M}v, \quad \omega^+ = \frac{3\left(1+\varepsilon\right)mv}{\left(3m+M\right)a}$$

4. Постановка общей задачи о соударении гладких тел

Координат связаны с центрами масс тел, оси направлены вдоль главных осей инерции.



Известны

массы и моменты инерции тел m_k, A_k, B_k, C_k

координаты точки контакта (x_k, y_k, z_k)

вектора нормали $(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k)$

скорости центра масс до удара $\mathbf{v}_k^-$

угловые скорости до удара $\boldsymbol{\omega}_k^-$

Найти скорости центров масс $\mathbf{v}_k^+$ и угловые скорости $\boldsymbol{\omega}_k^+$ после удара

$$\mathbf{v}_k^+ - \mathbf{v}_k^- = \mathbf{v}_k = (v_{xk}, v_{yk}, v_{zk}) \qquad \boldsymbol{\omega}_k^+ - \boldsymbol{\omega}_k^- = \boldsymbol{\omega}_k = (p_k, q_k, r_k)$$?

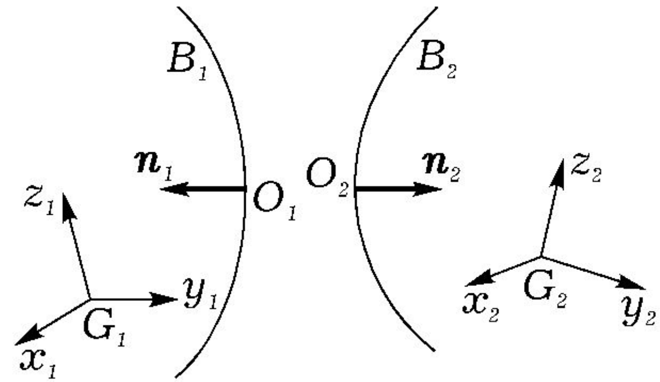
$$\mathbf{M}_k = \overrightarrow{G_k O_k} \times \mathbf{I}_k = \Big(I\underbrace{(y_k\gamma_k - z_k\beta_k)}_{\xi_k}, I\underbrace{(z_k\alpha_k - x_k\gamma_k)}_{\eta_k}, I\underbrace{(x_k\beta_k - y_k\alpha_k)}_{\varsigma_k}\Big)$$

Т-ма об изменении кинетического момента $A_k p_k = I\xi_k, \quad B_k q_k = I\eta_k, \quad C_k r_k = I\varsigma_k$

Т-ма об изменении количества движения $m_k v_{xk} = I\alpha_k, \quad m_k v_{yk} = I\beta_k, \quad m_k v_{zk} = I\gamma_k$

5. Соударение гладких тел: нахождение ударного импульса

$$\mathbf{v}^{\pm}_{O_k} = \mathbf{v}^{\pm}_k + \boldsymbol{\omega}^{\pm}_k \times \overrightarrow{G_k O_k}$$



$$\left(\mathbf{v}^{+}_{O_k} - \mathbf{v}^{-}_{O_k}\right)\cdot \mathbf{n}_k = \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n}_k + \left(\boldsymbol{\omega}_k \times \overrightarrow{G_k O_k}\right)\cdot \boldsymbol{\omega}_k =$$

$$= \underbrace{\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n}_k}_{\frac{I}{m_k}} + \left(\overrightarrow{G_k O_k} \times \mathbf{n}_k\right)\cdot \boldsymbol{\omega}_k$$

$$I\left(\frac{\xi_k^2}{A_k} + \frac{\eta_k^2}{B_k} + \frac{\varsigma_k^2}{C_k}\right)$$

Суммирование

$$\left(\mathbf{v}^{+}_{O_1} - \mathbf{v}^{-}_{O_1}\right)\cdot \mathbf{n}_1 + \left(\mathbf{v}^{+}_{O_2} - \mathbf{v}^{-}_{O_2}\right)\cdot \mathbf{n}_2 = I \overbrace{\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{1}{m_k} + \frac{\xi_k^2}{A_k} + \frac{\eta_k^2}{B_k} + \frac{\varsigma_k^2}{C_k}\right)}^{\mu^2}$$

Кинематическое соотношение

$$\mathbf{v}^{+}_{O_1}\cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{v}^{+}_{O_2}\cdot \mathbf{n}_2 = -\varepsilon\left(\mathbf{v}^{-}_{O_1}\cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{v}^{-}_{O_2}\cdot \mathbf{n}_2\right)$$

$$I = -\frac{1+\varepsilon}{\mu^2}\left(\mathbf{v}^{-}_{O_1}\cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{v}^{-}_{O_2}\cdot \mathbf{n}_2\right) = \frac{1+\varepsilon}{\mu^2} u_{rn}$$

$u_{rn} = -\left(\mathbf{v}^{-}_{O_1}\cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{v}^{-}_{O_2}\cdot \mathbf{n}_2\right) > 0$ - доударная проекция скорости точки O_1 контакта тела B_1 относительно точки O_2 на внутреннюю нормаль тела B_2

6. Соударение гладких тел: изменение кинетической энергии

$$T_k^+ - T_k^- = \mathbf{I}_1 \cdot \frac{\mathbf{v}_{O_k}^- + \mathbf{v}_{O_k}^+}{2} = I\mathbf{n}_k \cdot \frac{\mathbf{v}_{O_k}^- + \mathbf{v}_{O_k}^+}{2}$$

$$\Delta T = \frac{I}{2}\left(\mathbf{n}_1\left(\mathbf{v}_{O_1}^- + \mathbf{v}_{O_1}^+\right) + \mathbf{n}_2\left(\mathbf{v}_{O_2}^- + \mathbf{v}_{O_2}^+\right)\right) =$$

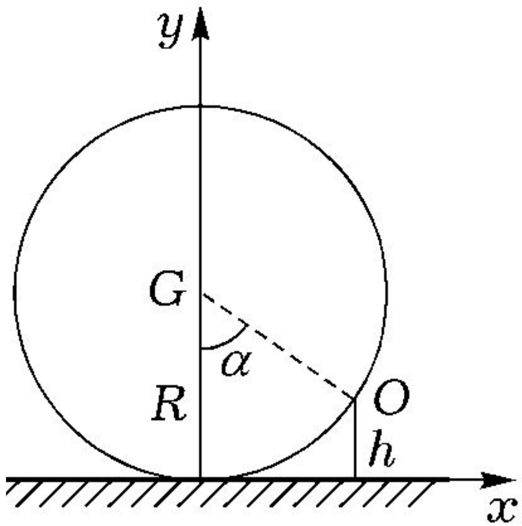
$$= I\left(\underbrace{\mathbf{n}_1\mathbf{v}_{O_1}^- + \mathbf{n}_2\mathbf{v}_{O_2}^-}_{-u_{rn}} + \underbrace{\frac{1}{2}\mathbf{n}_1\left(\mathbf{v}_{O_1}^+ - \mathbf{v}_{O_1}^-\right) + \frac{1}{2}\mathbf{n}_2\left(\mathbf{v}_{O_2}^- - \mathbf{v}_{O_2}^+\right)}_{\frac{1}{2}I\mu^2}\right)$$

$$\Delta T = \frac{(1+\varepsilon)}{\mu^2}u_{rn}\left(-u_{rn} + \frac{1}{2}(1+\varepsilon)u_{rn}\right) = -\frac{\left(1-\varepsilon^2\right)}{2\mu^2}u_{rn}^2$$

Суммарная кинетическая энергия не изменяется только в случае абсолютно упругого удара ($\varepsilon = 1$). В остальных случаях происходит потеря кинетической энергии $\Delta T < 0$

7. Пример

Однородное колесо радиуса R катится без скольжения по горизонтальной плоскости. Оно ударяется некоторой точкой своего обода о неподвижное препятствие высоты h < R. Удар происходит без трения, коэффициент восстановления равен ε. При каких значениях h колесо не преодолеет препятствие.



$$\mathbf{v}^- = (v - v\cos\alpha, -v\sin\alpha), \quad \mathbf{v}^+ = (v_x^+, v_y^+) = ?$$

Т-ма об изменении количества движения

$$m(v_x^+ - v) = -I\sin\alpha$$
$$mv_y^+ = I\cos\alpha$$

Кинемат. соотношение

$$v_x^+\sin\alpha - v_y^+\cos\alpha = -\varepsilon\left[v(1-\cos\alpha)\sin\alpha + v\sin\alpha\cos\alpha\right] = -\varepsilon v\sin\alpha$$

$$\boxed{I = m(1+\varepsilon)v\sin\alpha, \quad v_x^+ = v\left[1-(1+\varepsilon)\sin^2\alpha\right], \quad v_y^+ = (1+\varepsilon)v\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$v_x^+ < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2\alpha > \frac{1}{1+\varepsilon} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{R^2-(R-h)^2}{R^2} > \frac{1}{1+\varepsilon} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{h > \left[1-\sqrt{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}\right]R}$$

8. Прямой центральный удар двух тел

Линия удара - прямая, проходящая через точку соприкосновения тел при ударе перпендикулярно их общей касательной плоскости

Удар называется **прямым**, если скорости центров масс до удара направлены параллельно линии удара

касательные составляющие скоростей не меняются при ударе $\Rightarrow$ при прямом ударе скорости центров масс тел после удара будут параллельны линии удара.

Удар называется **центральным**, если центры масс тел перед ударом лежат на линии удара

При центральном ударе моменты ударного импульса относительно центров масс тел равны нулю $\Rightarrow$ при центральном ударе угловые скорости обоих тел остаются неизменными

Задача о прямом центральном ударе сводится к нахождению изменений проекций скоростей центров масс тел на линию удара.

9. Решение задачи о прямом центральном ударе двух тел

За положительное направление на линии удара принимается направление $n=n_2$ внутренней нормали к поверхности тела B_2

$$u_{rn} = v_1^- - v_2^- > 0 \qquad \mu^2 = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}$$

$$\boxed{I = (1+\varepsilon)\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(v_1^- - v_2^-\right)}$$

Т-ма об изменении количества движения

$$m_1\left(v_1^+ - v_1^-\right) = -I$$

$$m_2\left(v_2^+ - v_2^-\right) = I$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} v_1^+ &= \frac{(m_1 - \varepsilon m_2)v_1^- + m_2(1+\varepsilon)v_2^-}{m_1 + m_2} \\ v_2^+ &= \frac{(m_2 - \varepsilon m_1)v_2^- + m_1(1+\varepsilon)v_1^-}{m_1 + m_2} \end{aligned}}$$

Изменение кинетической энергии

$$\Delta T = -\frac{1}{2}\left(1-\varepsilon^2\right)\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(v_1^- - v_2^-\right)^2$$

10. Абсолютно упругий и абсолютно неупругий удары

Упругий

$$I = 2\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(v_1^- - v_2^-\right) \qquad \Delta T = 0$$

$$v_1^+ = \frac{\left(m_1 - m_2\right)v_1^- + 2m_2 v_2^-}{m_1 + m_2}$$

$$v_2^+ = \frac{\left(m_2 - m_1\right)v_2^- + 2m_1 v_1^-}{m_1 + m_2}$$

Если, кроме того, массы тел равны, то центр масс каждого из тел будет иметь послеударную скорость, какую имел центр масс другого тела до удара. Таким путем происходит перенос количеств движения при столкновении молекул идеального газа.

Непругий

$$I = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(v_1^- - v_2^-\right)$$

$$v_1^+ = v_2^+ = \frac{m_1 v_1^- + m_2 v_2^-}{m_1 + m_2}$$

$$\Delta T = -\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(v_1^- - v_2^-\right)^2$$

Скорости центров масс тел после удара становятся одинаковыми. При этом происходит потеря кинетической энергии. Ударный импульс в два раза меньше, чем при абсолютно упругом ударе.

11. Примеры

Пример 1 (Прямой центральный удар о неподвижную стенку)

$$m_2 = \infty \qquad I = (1+\varepsilon) m_1 v_1^- \qquad v_1^+ = -\varepsilon v_1^- \qquad \Delta T = -\frac{1}{2}(1-\varepsilon^2)(v_1^-)^2$$

Пример 2. Найти необходимое и достаточное условие того, что при прямом централь-ном ударе двух поступательно движущихся тел B_1 и B_2 тело B_1 после удара остановилось

$$\boxed{(m_1 - \varepsilon m_2) v_1^- + m_2 (1+\varepsilon) v_2^- = 0}$$

Частные случаи:

$$v_2^- = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{m_1}{m_2}$$

$$v_2^- = -v_1^- \quad \Rightarrow \quad 2\varepsilon + 1 = \frac{m_1}{m_2}$$