

*Хандурин А. В., [handurin@mail.ru](mailto:handurin@mail.ru)*

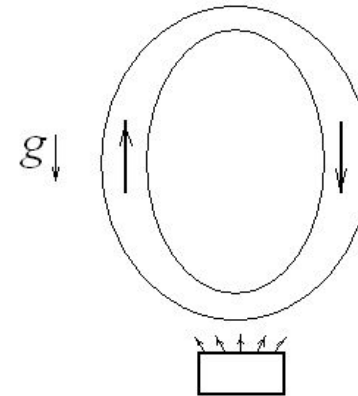
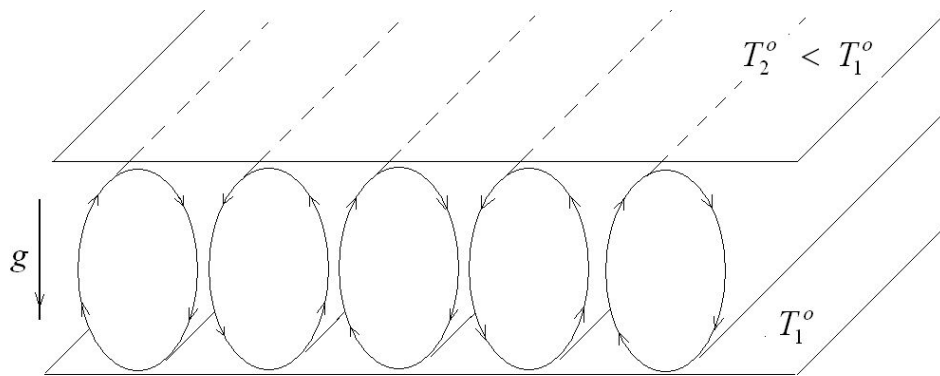
# **КОЛЕБАНИЯ И СИГНАЛЫ С ХАОТИЧЕСКОЙ И ФРАКТАЛЬНОЙ СТРУКТУРОЙ**

*Национальный исследовательский университет  
Московский Энергетический Институт*

**Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова  
Радиотехнический факультет**

**Кафедра Формирования колебаний и сигналов**

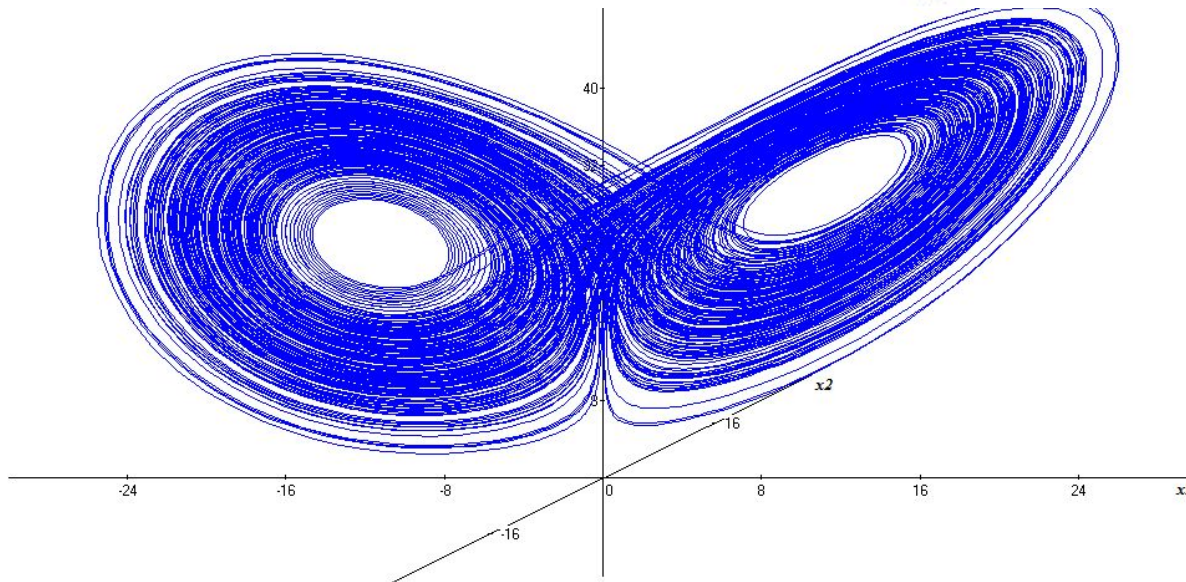
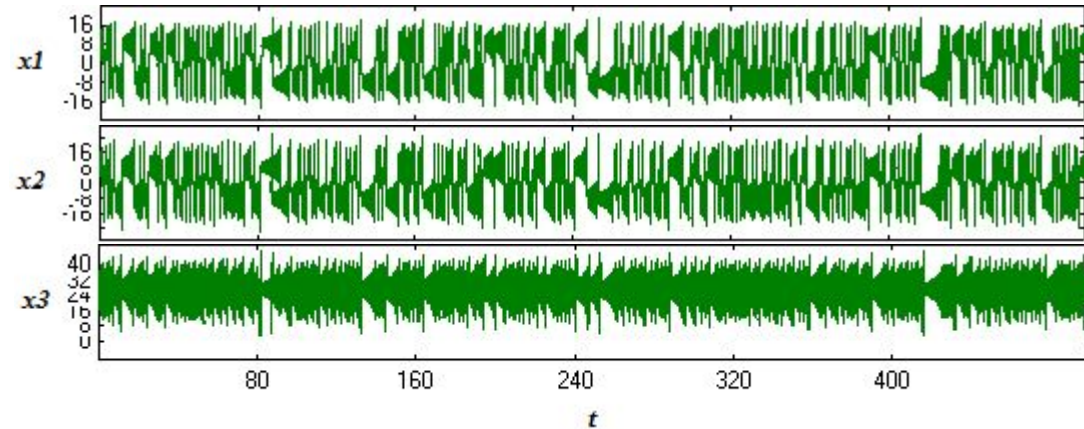
# ТЕЧЕНИЕ БЕНАРА – РЭЛЕЯ В ТОНКОМ СЛОЕ ЖИДКОСТИ ИЛИ ГАЗА



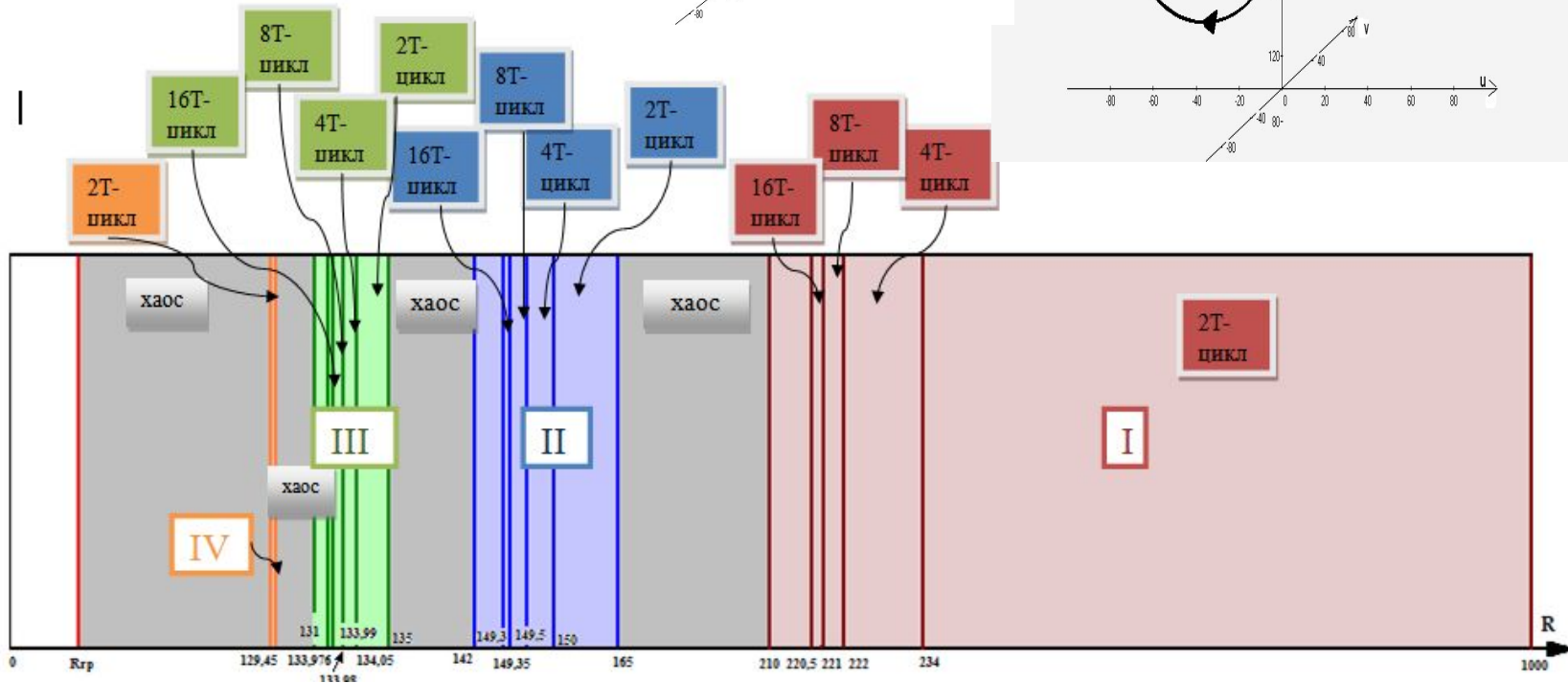
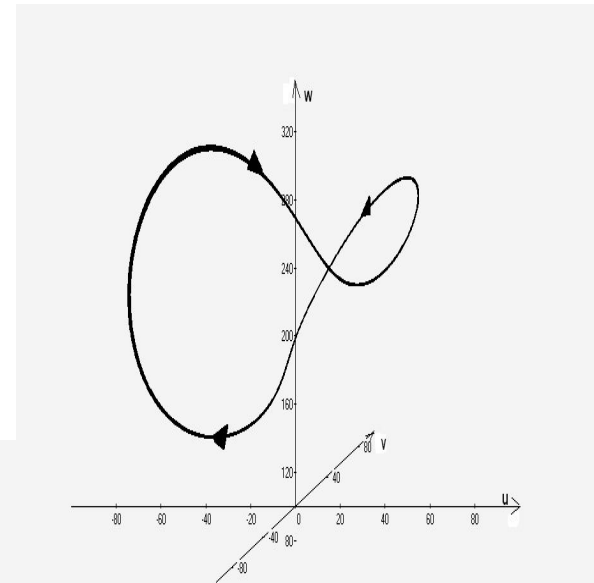
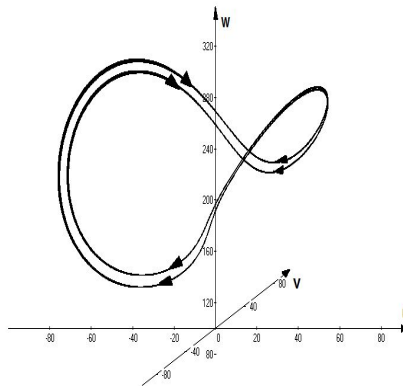
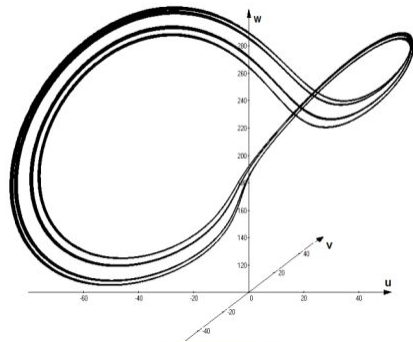
В 60-х годах прошлого века американский метеоролог Эдвард Лоренц, пытавшийся создать общую модель погоды, снова вернулся к явлению Бенара - Рэлея и дал ему емкое математическое описание. Созданная Э. Лоренцем математическая модель оказалась способной предсказать различные варианты конвективного течения - от полного его отсутствия до стационарных вращений разного вида. Главным и неожиданным результатом оказалось открытие Лоренцем с помощью его модели новых, совершенно нерегулярных движений – **турбулентности и хаоса.**

# ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ЛОРЕНЦА

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x_1 = -P \cdot x_1 + P \cdot x_2 \\ \frac{d}{dt} x_2 = R \cdot x_1 - x_2 - x_1 \cdot x_3 \\ \frac{d}{dt} x_3 = -b \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \end{cases}$$

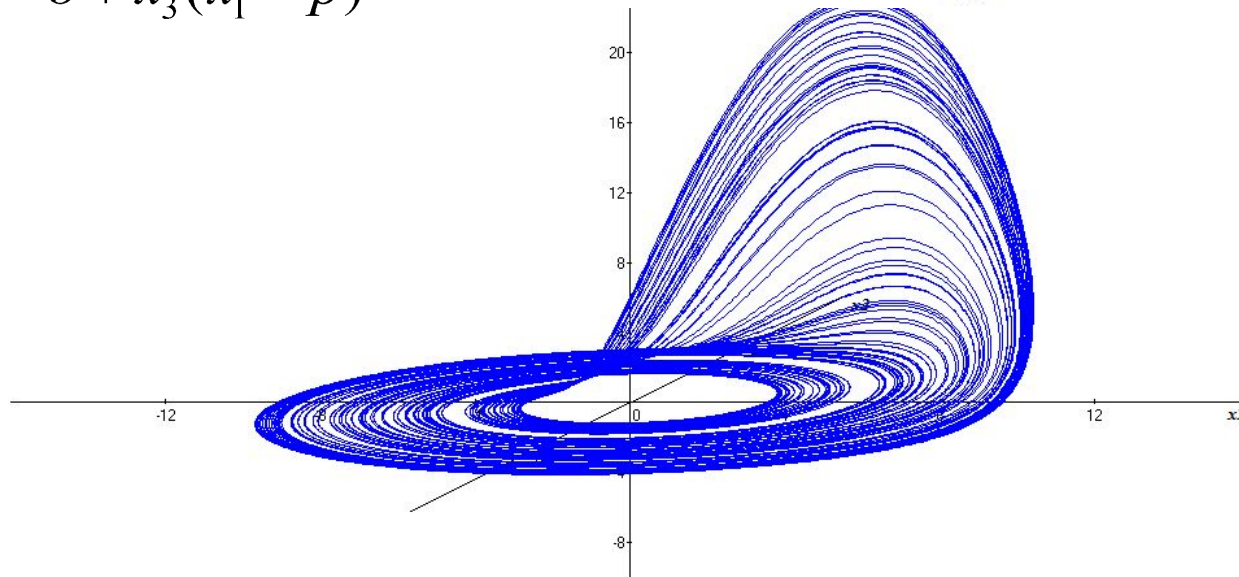
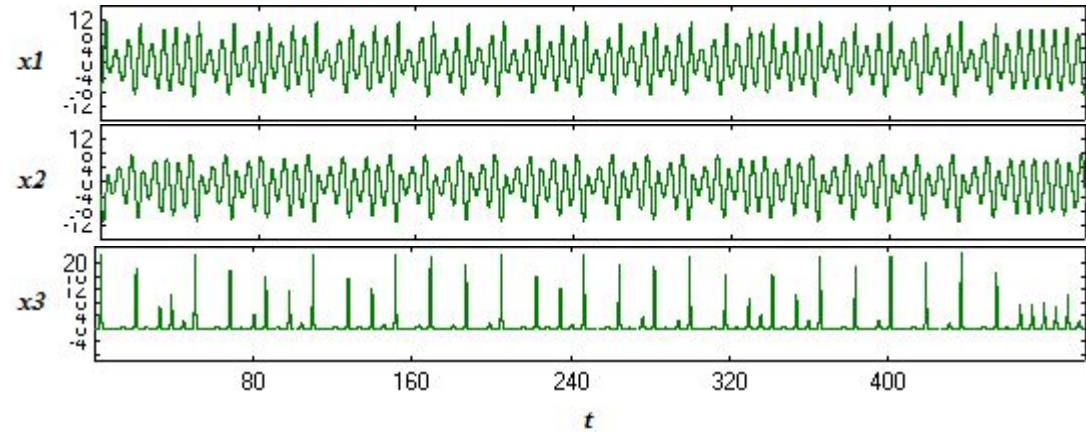


# ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ЛОРЕНЦА (БИФУРКАЦИОННАЯ ДИАГРАММА)



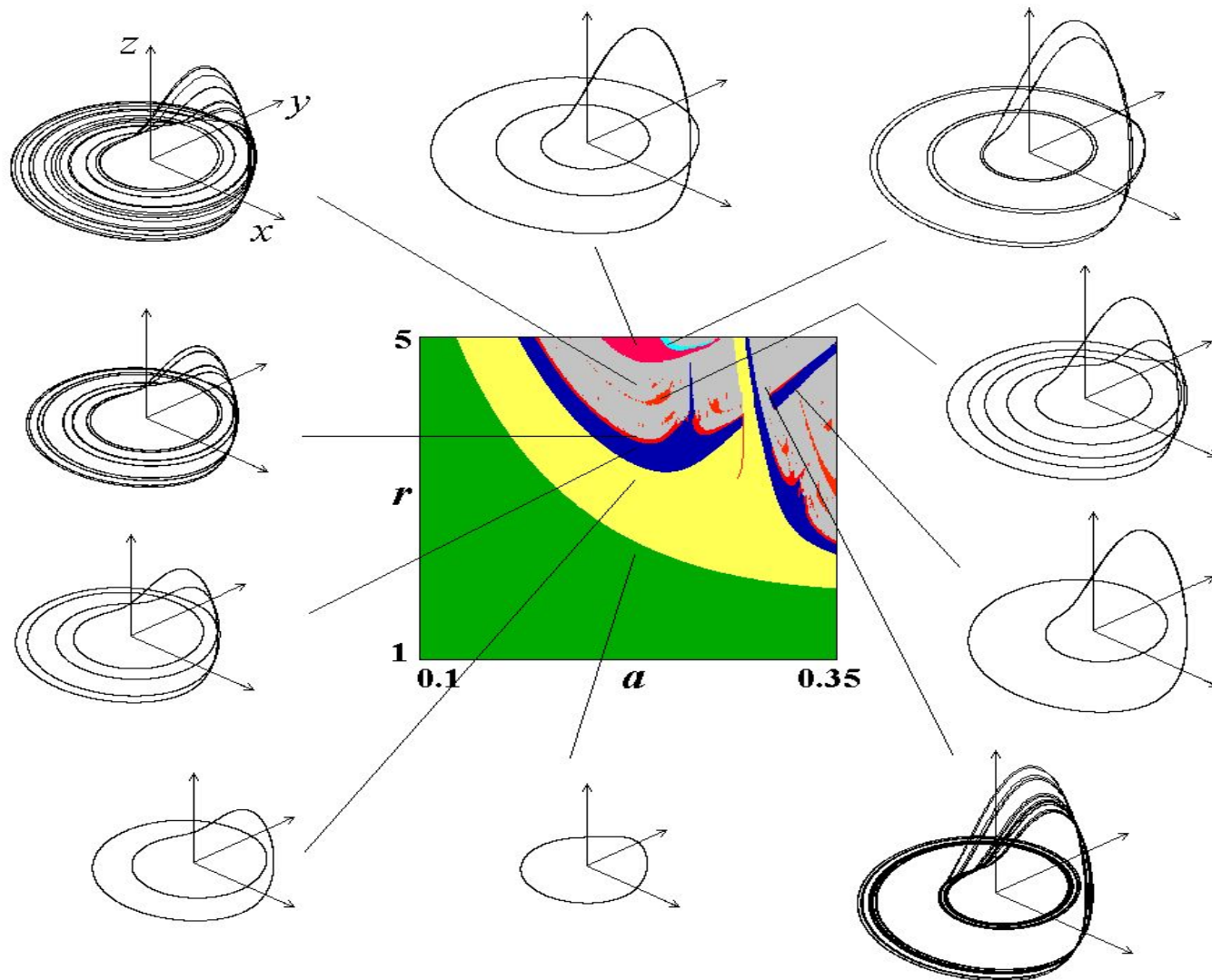
# ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА РЁССЛЕРА

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x_1 = -(x_2 + x_3) \\ \frac{d}{dt} x_2 = x_1 + a \cdot x_2 \\ \frac{d}{dt} x_3 = b + x_3(x_1 - p) \end{cases}$$

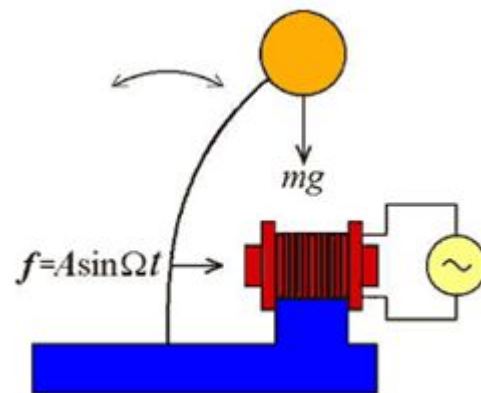
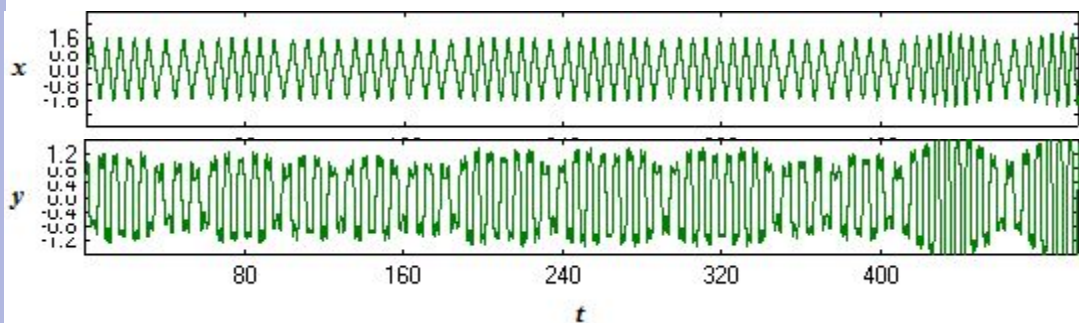




# ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА РЁССЛЕРА (КАРТА ДИНАМИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ)

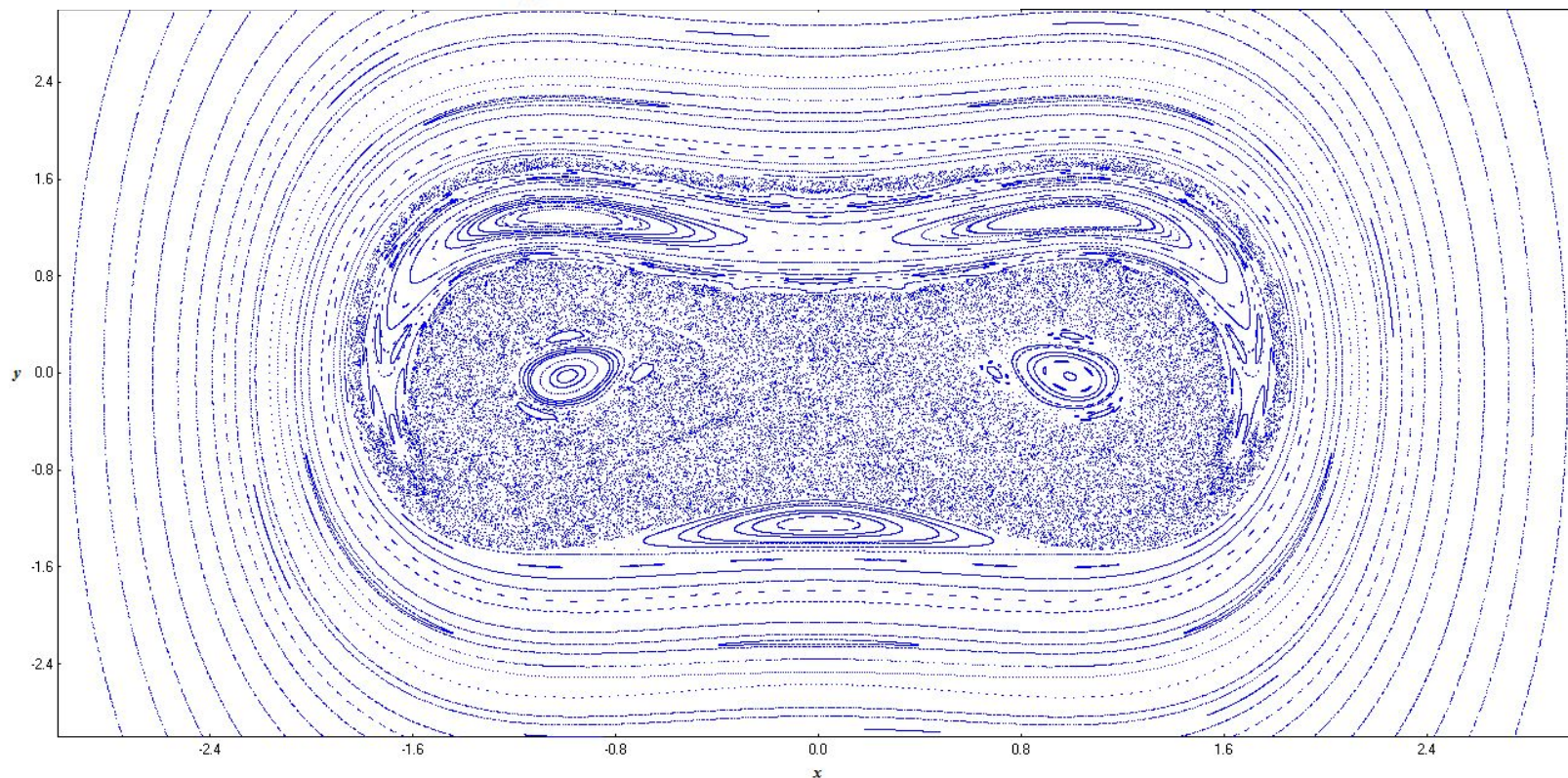


# ОСЦИЛЛЯТОР ДУФФИНГА



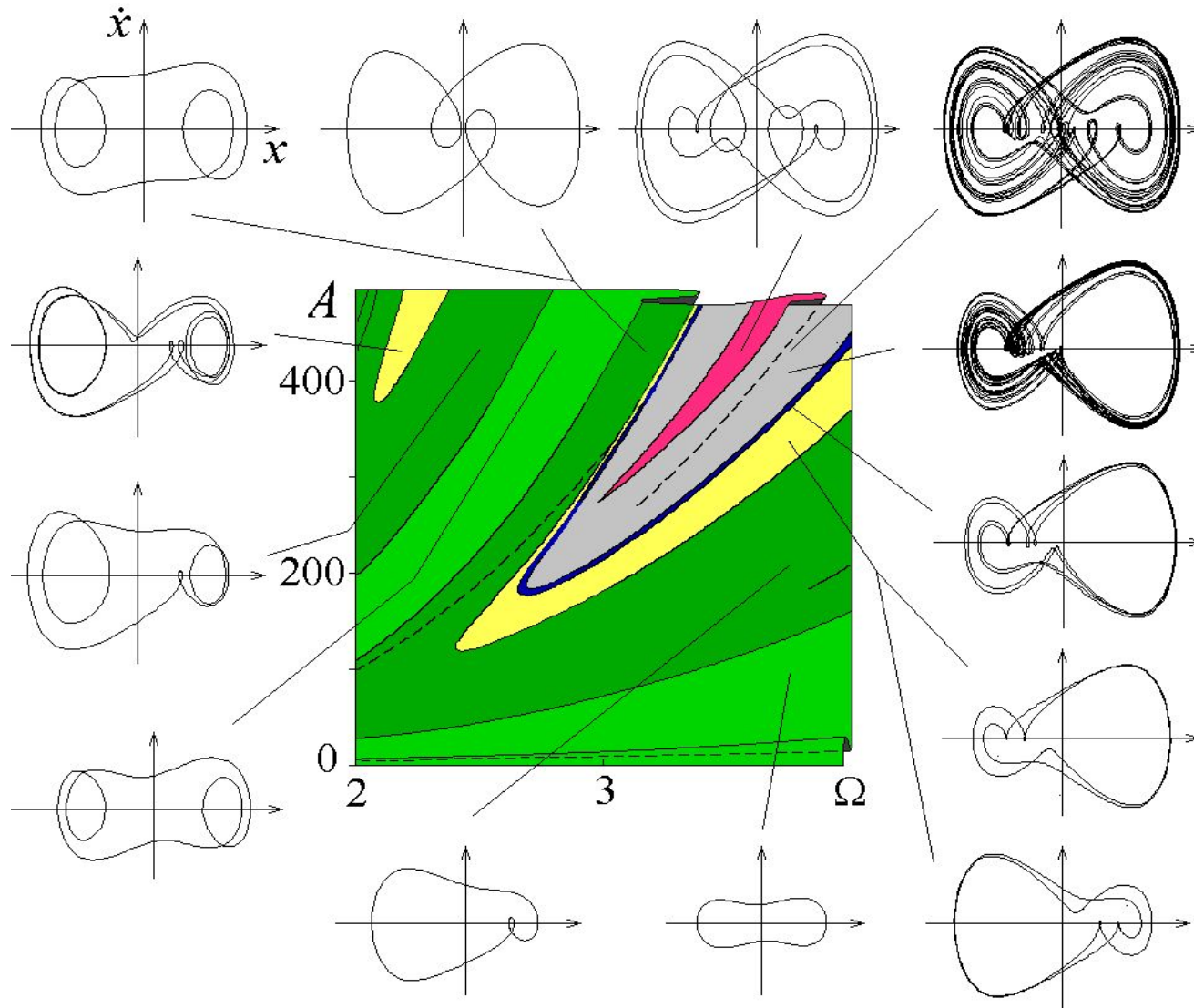
$$\ddot{x} + \dot{x} + x^3 = A \sin \Omega \tau.$$

Хаотические сигналы



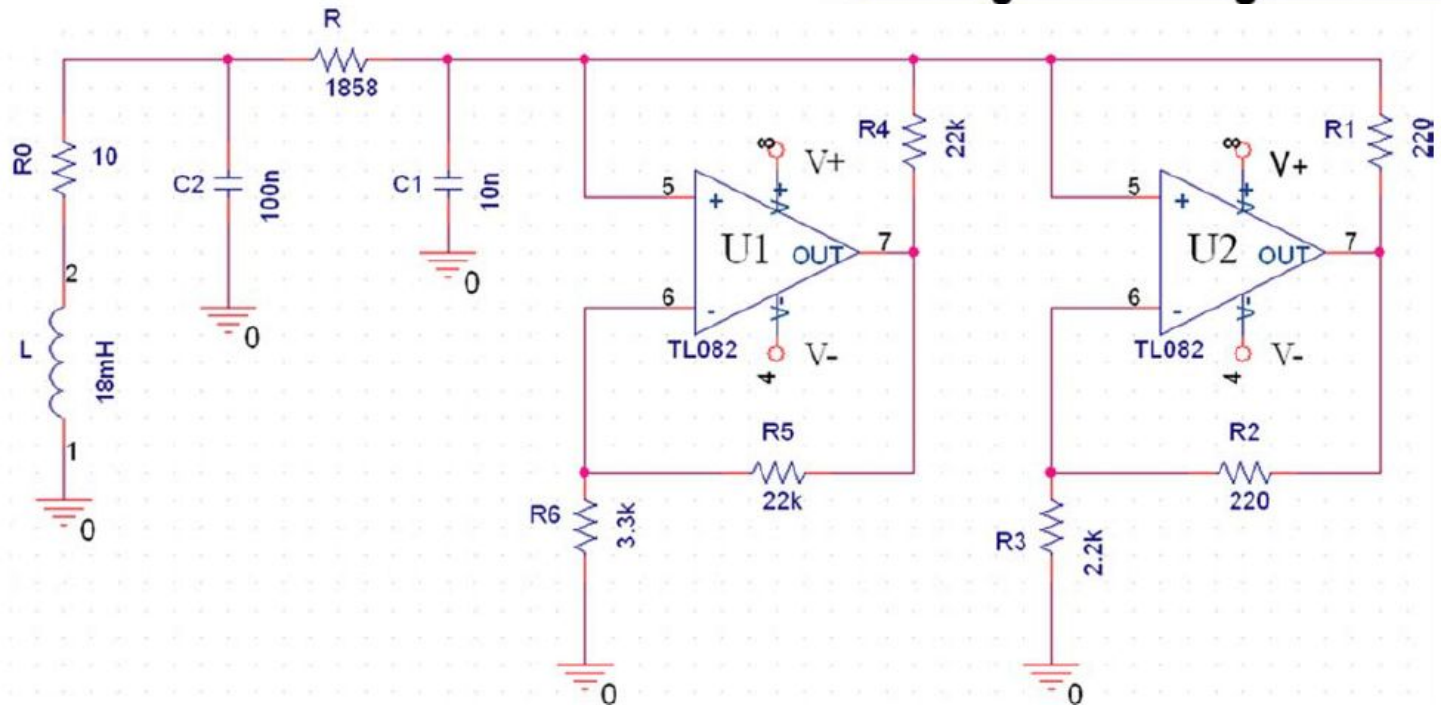
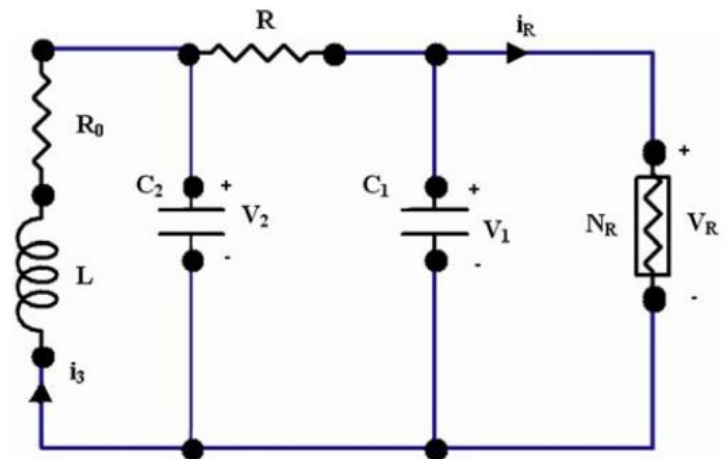
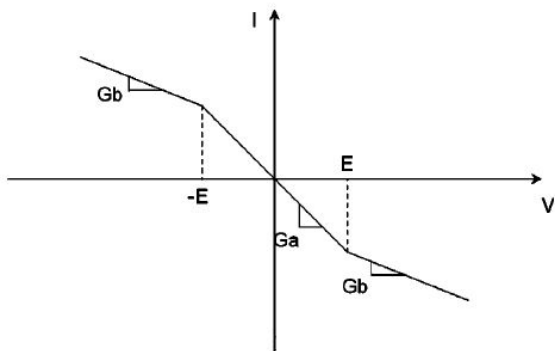


# ОСЦИЛЛЯТОР ДУФФИНГА (КАРТА ДИНАМИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ)



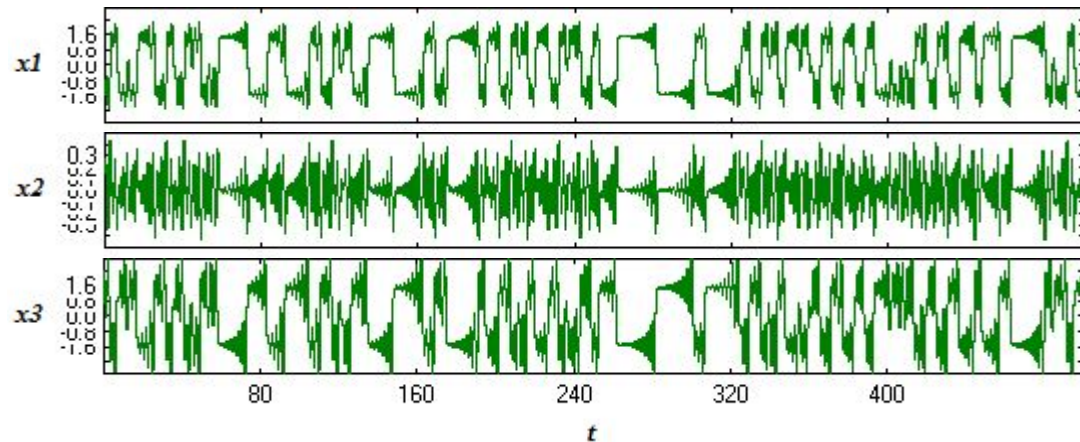


# СХЕМА ЛЕОНА ЧУА

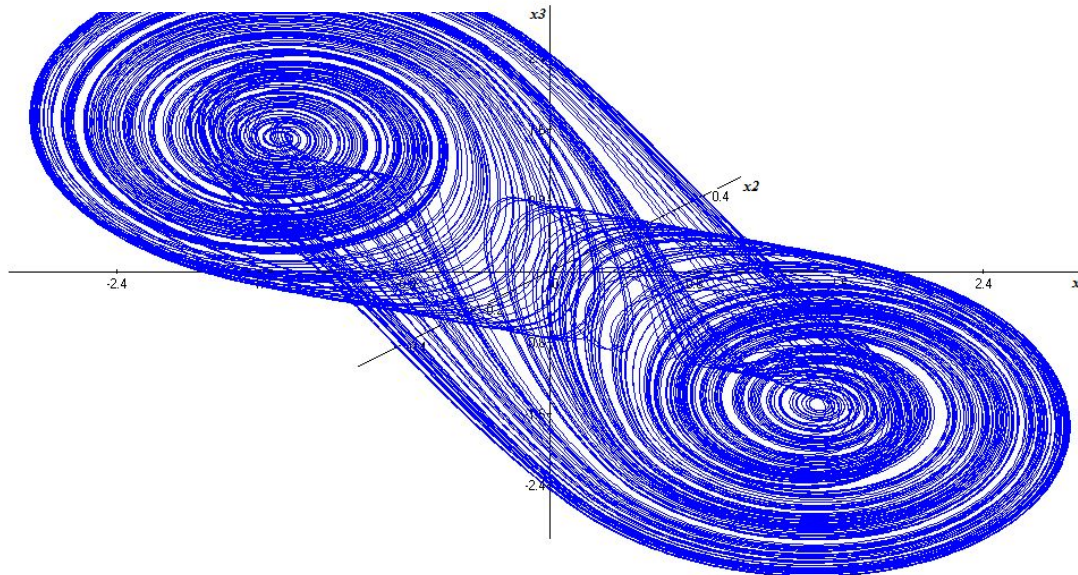


# ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ЛЕОНА ЧУА

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = k\alpha(y - x - f(x)) \\ \frac{dy}{d\tau} = k(x - y + z) \\ \frac{dz}{d\tau} = -k(\beta y + \gamma z) \end{cases}$$



$$f(x) = bx + \frac{1}{2}(a - b) \{|x + 1| - |x - 1|\}$$



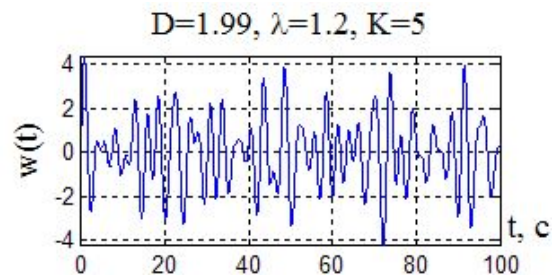
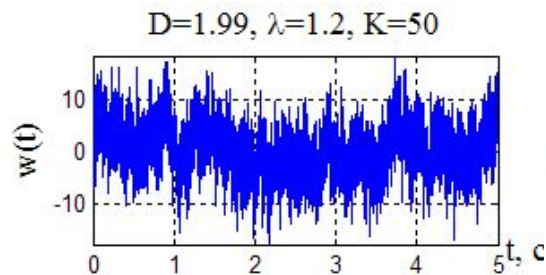
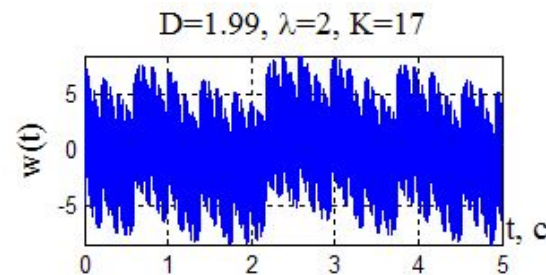
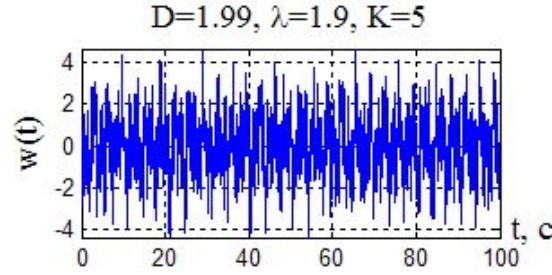
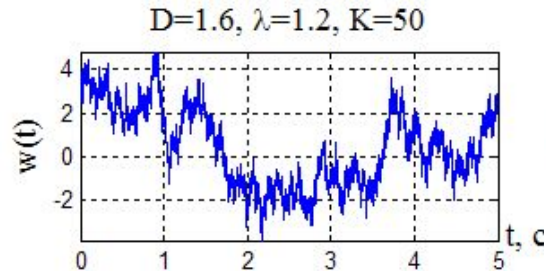
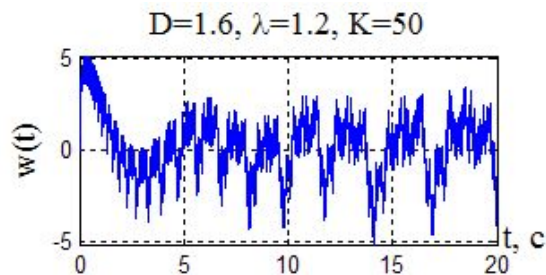
# СИГНАЛЫ С АДДИТИВНОЙ ФРАКТАЛЬНОЙ СТРУКТУРОЙ

## Функция Вейерштрасса

$$w(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{(D-2)k} \sin(\lambda^k t)$$

$$1 < D < 2 \quad \lambda > 1$$

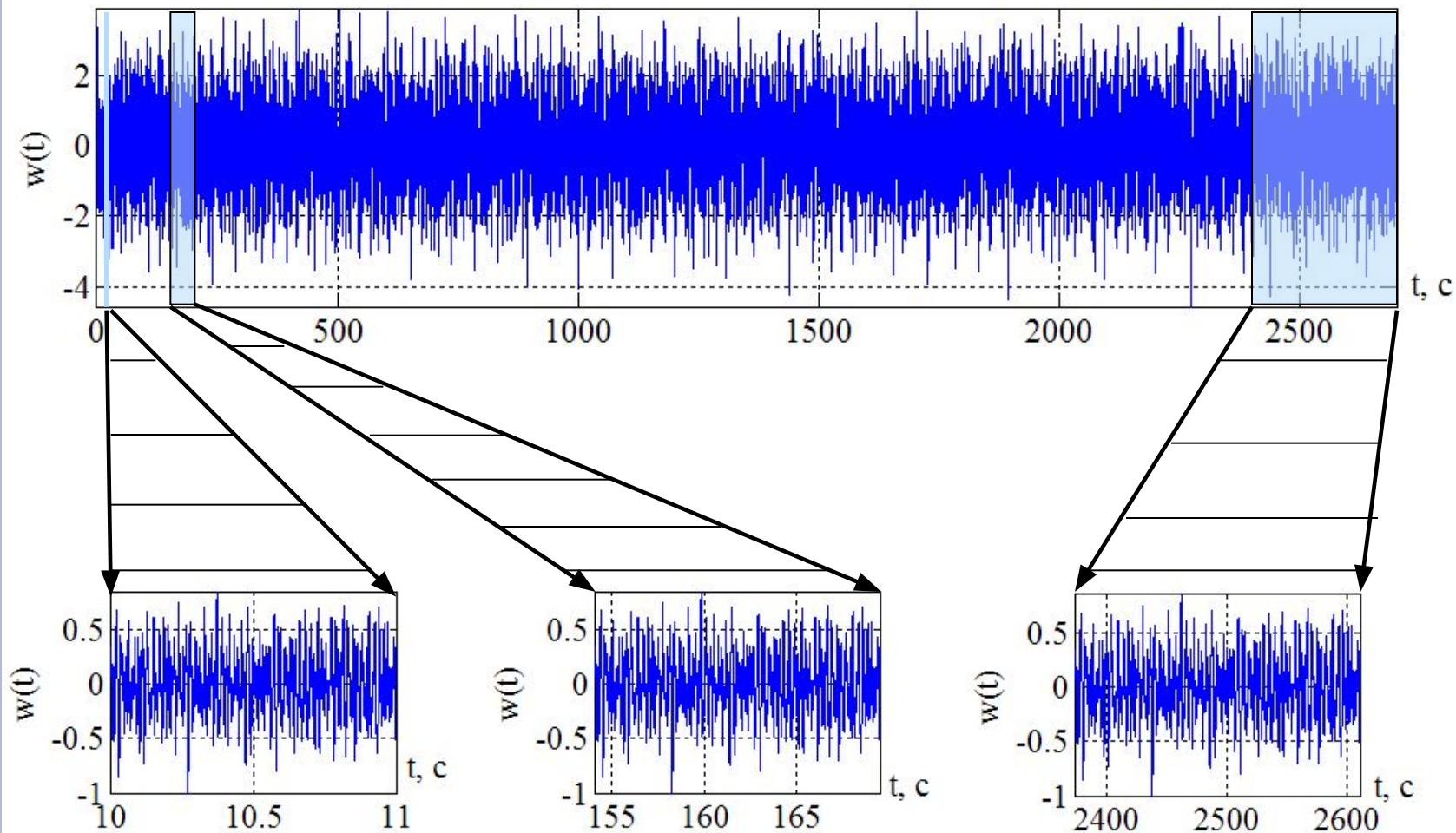
**В реальных радиотехнических системах число членов ряда  $K < 15$**





# САМОПОДОБИЕ ВРЕМЕННЫХ РЕАЛИЗАЦИЙ ФРАКТАЛЬНЫХ СИГНАЛОВ

Фрактальные сигналы





# СРАВНЕНИЕ РЯДОВ ВЕЙЕРШТРАССА И ФУРЬЕ

$$w(t) = \sum_{k=1}^K \omega^{(D-2)k} \sin(\omega^k t)$$

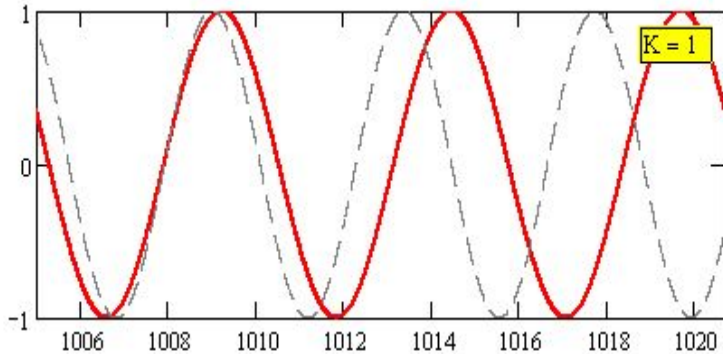
$$\omega > 1$$

$$f(t) = \sum_{k=1}^K \omega^{(D-2)k} \sin(k\omega \cdot t)$$

$$1 < D < 2$$

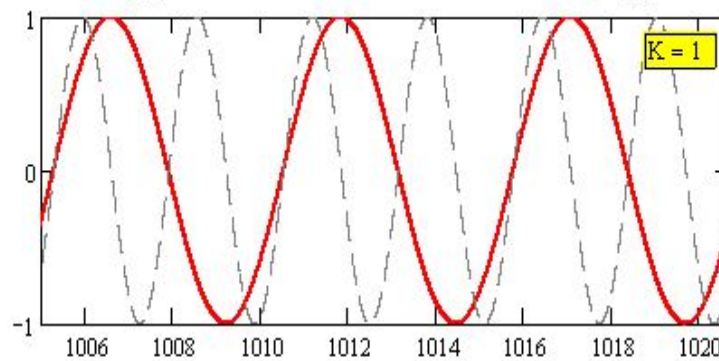


Аддитивное сложение колебаний в  $w(t)$



время

Аддитивное сложение колебаний в  $f(t)$



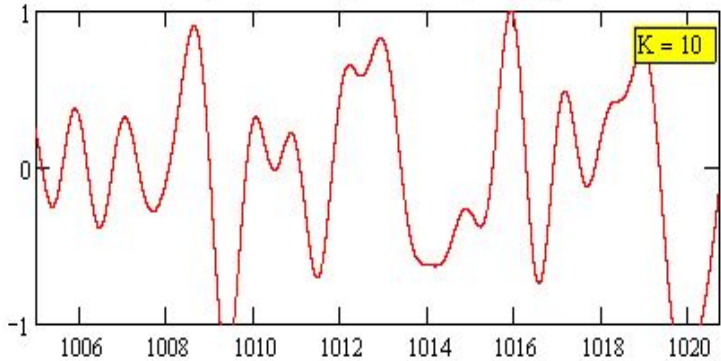
время



# СРАВНЕНИЕ РЯДОВ ВЕЙЕРШТРАССА И ФУРЬЕ

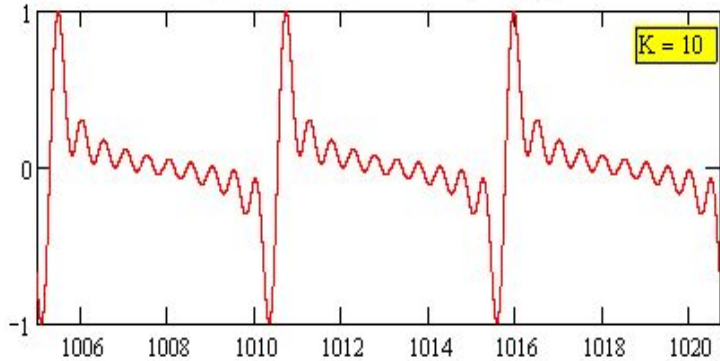


Временная реализация  $w(t)$



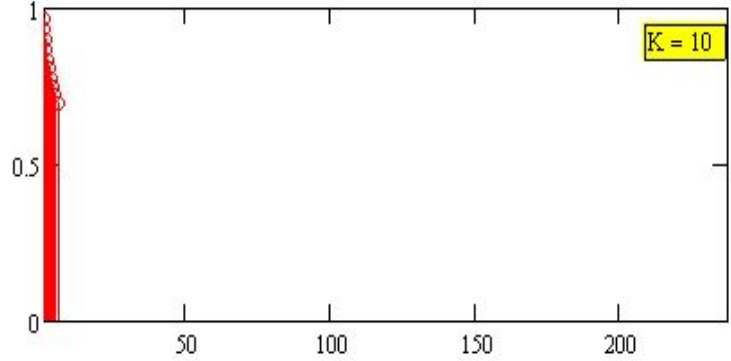
время

Временная реализация  $f(t)$



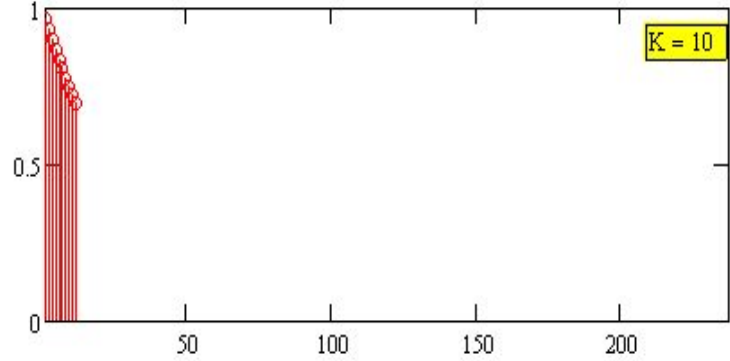
время

Амплитудно-частотный спектр  $w(t)$



частота

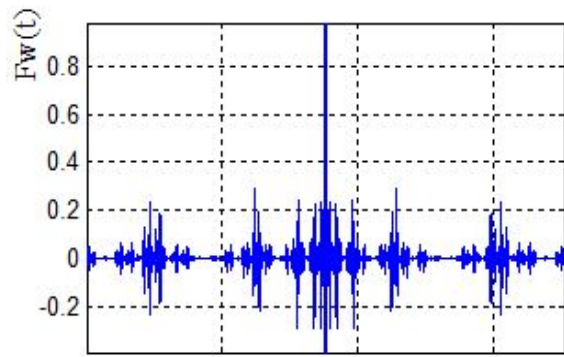
Амплитудно-частотный спектр  $f(t)$



частота

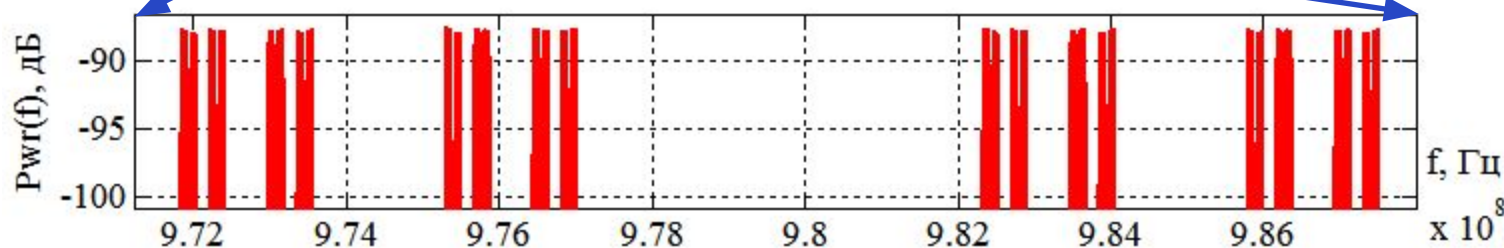
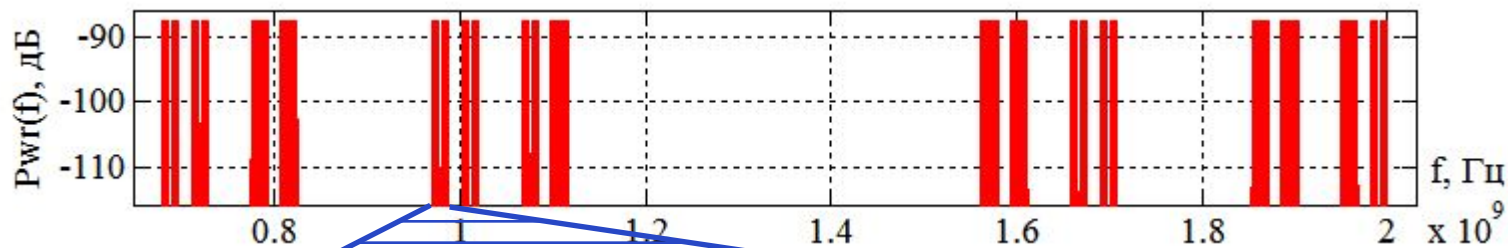


# СИГНАЛЫ С МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ ФРАКТАЛЬНОЙ СТРУКТУРОЙ



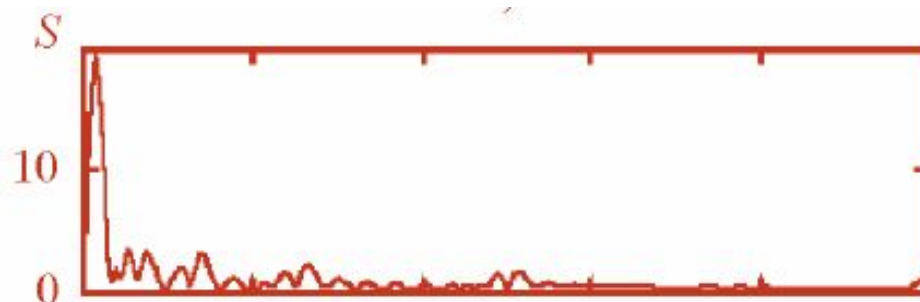
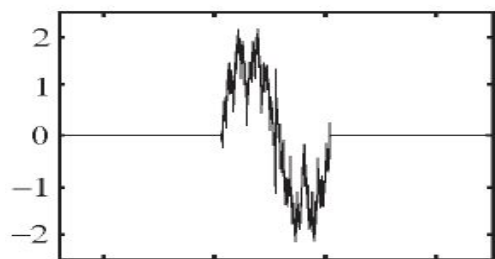
$$Fw(t) = \prod_{k=0}^N \cos \left[ (1 - \xi) \xi^k \cdot 2\pi f_0 \cdot t \right]$$

## САМОПОДОБИЕ В СПЕКТРАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ



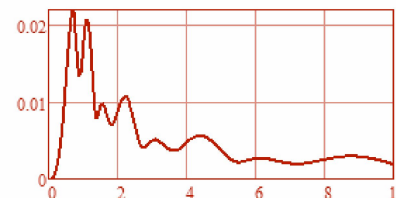
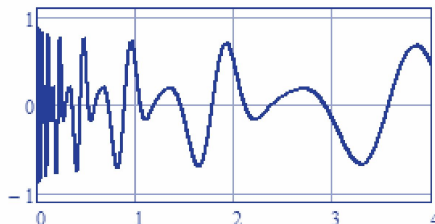
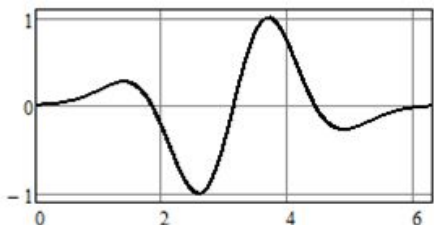
# СВЕРХШИРОКОПОЛОСНЫЕ ФРАКТАЛЬНЫЕ СИГНАЛЫ

$$FUWB_1(t) = \left( 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \cos(3\beta^n (2t-1)) \right) \times \text{sign}(2t-1) \Theta(t)$$



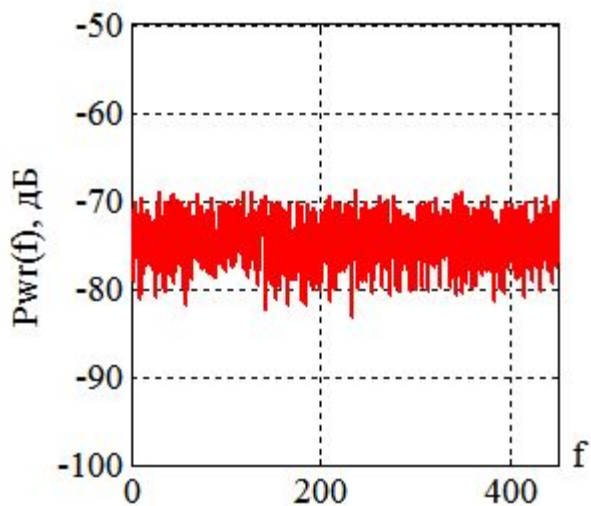
## ФРАКТАЛЬНЫЕ ВЕЙВЛЕТ-СИГНАЛЫ С АДДИТИВНОЙ СТРУКТУРОЙ

$$\theta_n(t) = \sum_{m=1}^M 2^{(2-D)m} \psi_n(2^m t - n)$$



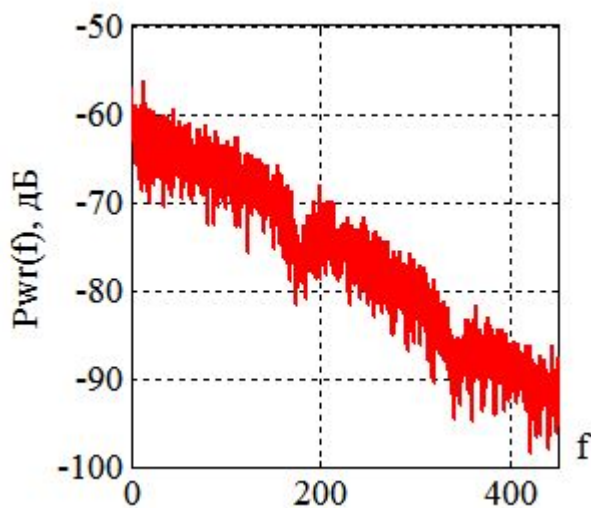
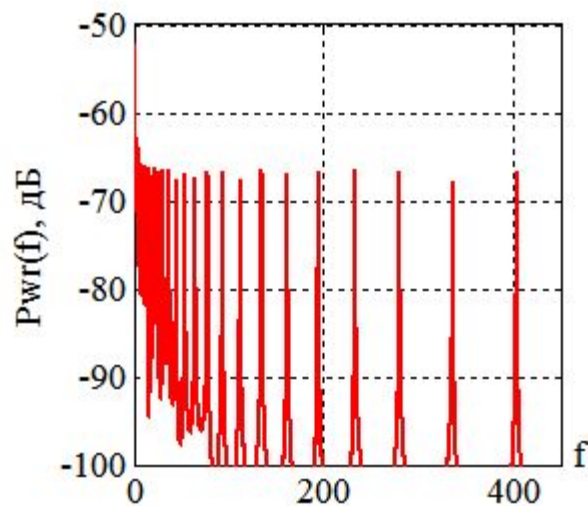


# СРАВНЕНИЕ АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНЫХ СПЕКТРОВ



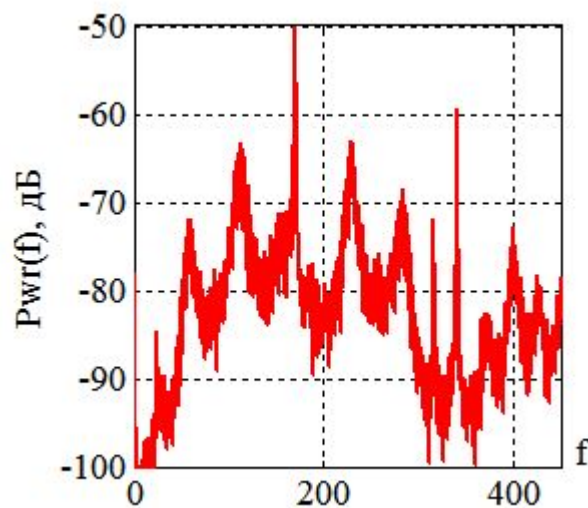
Белый шум

Сигнал с аддитивной фрактальной структурой

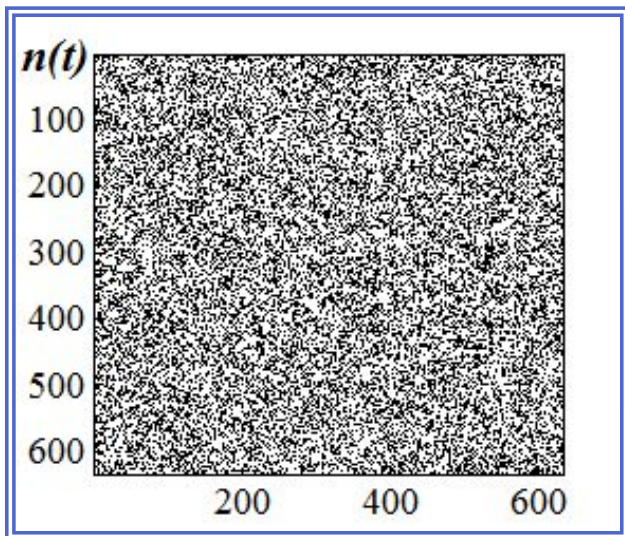


Сигнал Лоренца

Сигнал Рёсслера

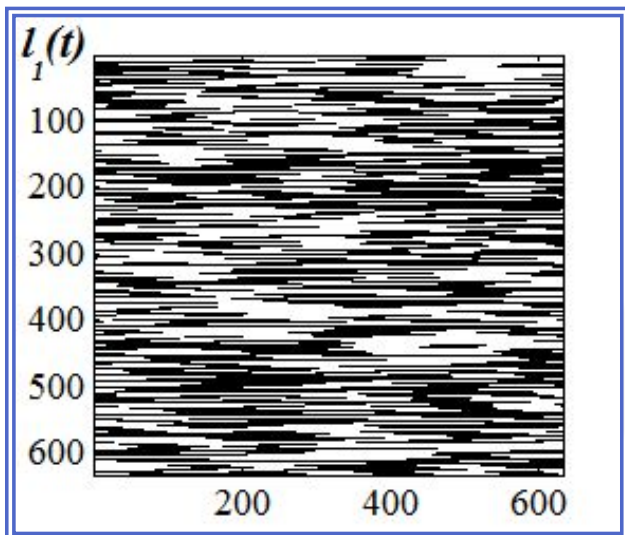
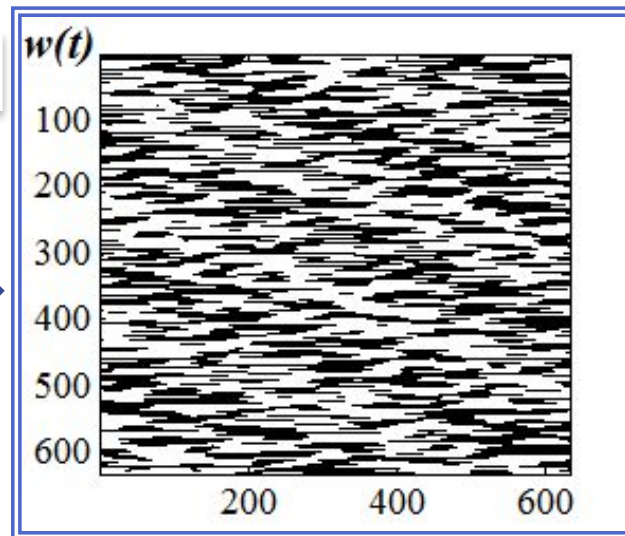


# СРАВНЕНИЕ ПЕРКОЛЯЦИОННЫХ ПОЛЕЙ



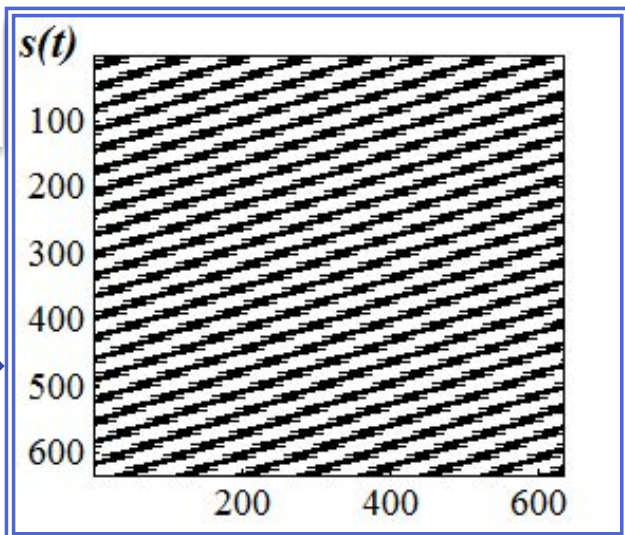
Белый шум

Сигнал с аддитивной фрактальной структурой



Сигнал Лоренца

Гладкая синусоида



# СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Капранов М.В., Кулешов В.Н., Уткин Г.М. – Теория колебаний в радиотехнике. Учебное пособие для вузов. – М.: Наука, 1984. – 320 с.
2. Капранов М.В. – Регулярная и хаотическая динамика нелинейных систем с дискретным временем: учебное пособие / М.В.Капранов, А.И. Томашевский – М.: Издательский дом МЭИ, 2009. – 256 с.
3. Кузнецов С.П. – Динамический хаос (курс лекций). – М.: Физматлит, 2001. - 296 с.
4. Г. Шустер – Детерминированный хаос. Введение. – М.: Мир, 1988. – 240с.
5. Ф. Мун. – Хаотические колебания. – М.: Мир, 1990. – 312с.
6. Дмитриев А.С., Панас А.И. – Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. – М.: Физматлит, 2002. – 252 с.
7. Динамика одномерных отображений / А.Н.Шарковский, С.Ф.Коляда, А.Г. Сивак, В.В.Федоренко – Киев, Наукова Думка . 1989. – 216 с.