

# Гидродинамика Солнца

Лекция 2

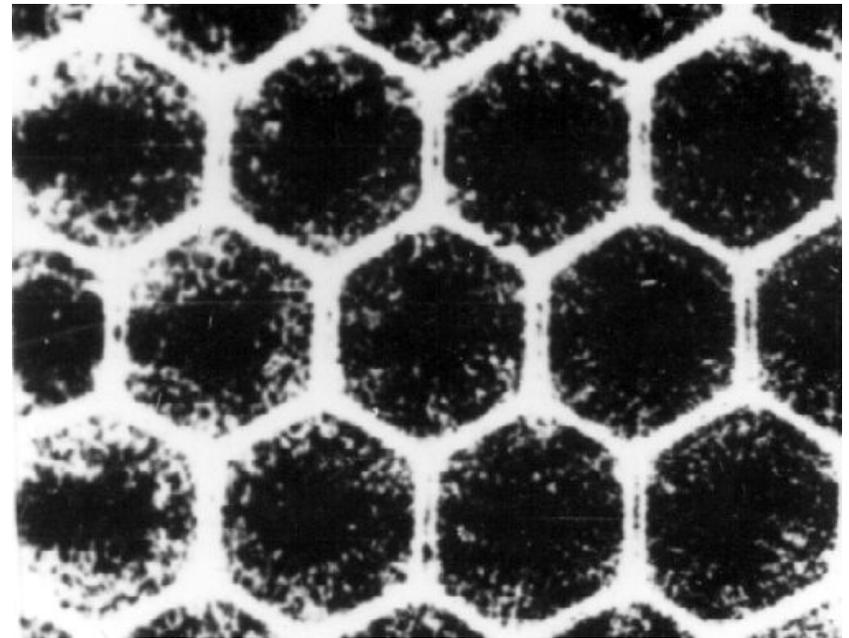
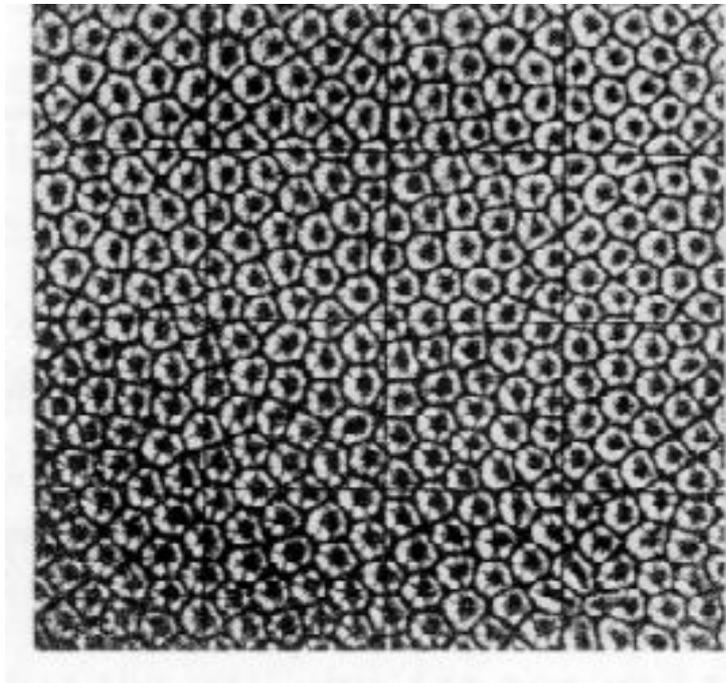
# Ранние исследования тепловой конвекции

---

- Середина XVIII в. — М. В. Ломоносов, Дж. Гадлей (G. Hadley); качественное объяснение природы явления
- 1900 — А. Бенар (H. Bénard), эксперимент
- 1906 — К. Schwarzschild, условие возникновения
- 1916 — лорд Рэлей (Rayleigh), теория
- 1930–1950 — Н. Siedentopf и др., теория пути перемешивания
- 1940 — A. Pellew & R. Southwell, линейная теория
- 1961 — С. Чандрасекар (S. Chandrasekhar); линейная теория, первая фундаментальная монография

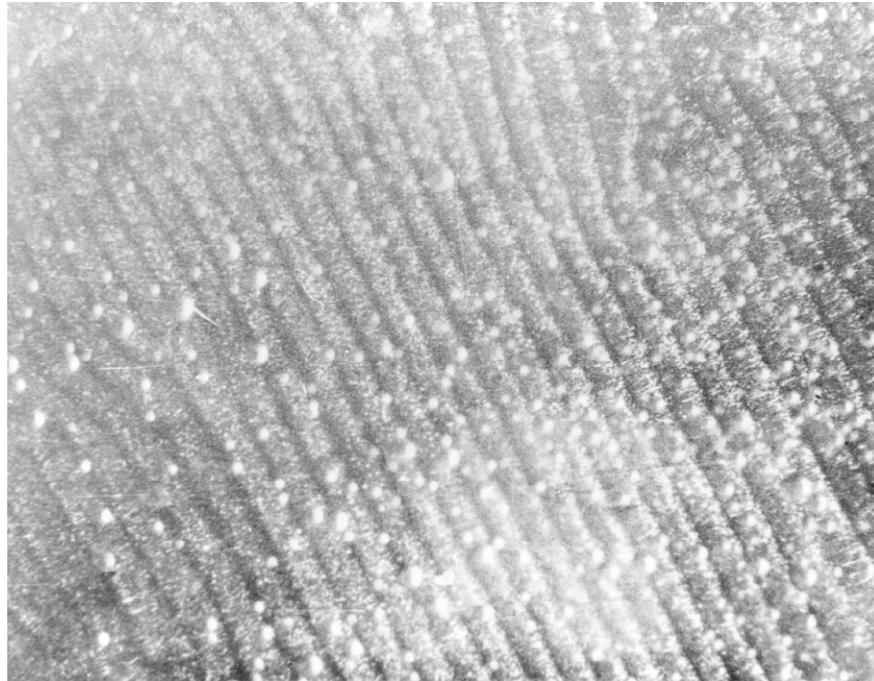
# Шестиугольные ячейки (Бенара)

---



# Квазидвумерные конвективные валы (**convection rolls**)

---



# Уравнение Навье – Стокса (the Navier–Stokes equation)

---

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v})$$

Вязкий тензор напряжений:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{v}) = \eta \left( \nabla_i v_j + \nabla_j v_i - \frac{2}{3} \delta_{ij} \operatorname{div} \mathbf{v} \right) + \zeta \delta_{ij} \operatorname{div} \mathbf{v} \quad (\eta = \rho \nu)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \eta \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right\} +$$
$$+ f_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \zeta \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right)$$

# Уравнение Навье – Стокса (the Navier–Stokes equation)

---

$$\rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \eta \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right\} + f_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \zeta \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right)$$

Если коэффициенты постоянны:

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \mathbf{f} + \eta \Delta \mathbf{v} + \left( \frac{\eta}{3} + \zeta \right) \nabla \operatorname{div} \mathbf{v}$$

# Баротропность и бароклинность

---

В состоянии равновесия  $-\nabla p + \rho \mathbf{g} = 0$

$$[\nabla \times (\rho \mathbf{g})] = [\nabla \rho \times \mathbf{g}] = [\nabla \rho \times \frac{\nabla p}{\rho}] = 0$$

Баротропность:  $[\nabla \rho \times \nabla p] = 0$

Бароклинность:  $[\nabla \rho \times \nabla p] \neq 0$

# Уравнение непрерывности. Несжимаемая жидкость

~~В ПОЛЕ ТЯЖЕСТИ~~

---

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0$$

Несжимаемость:  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \rho \nu \Delta \mathbf{v} \quad \left( \nu = \frac{\eta}{\rho} \right)$$

# Приближение Буссинеска **(the Boussinesq approximation)**

---

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} = 0 \qquad \rho - \rho_0 = -\rho_0 \alpha (T - T_0)$$

$$p = p_s + p', \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad \mathbf{v} = \mathbf{0} + \mathbf{v}' \quad (\mathbf{v}' = \mathbf{v})$$

$$\rho_0 \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla(p_s + p') + (\rho_0 + \rho') \mathbf{g} + \rho_0 \nu \Delta \mathbf{v}$$

$$0 = -\nabla p_s + \rho_0 \mathbf{g}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p'}{\rho_0} + \mathbf{g} \frac{\rho'}{\rho_0} + \nu \Delta \mathbf{v}$$

## Уравнение переноса тепла

---

$$\rho T \left( \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla s \right) = \operatorname{div}(\rho c_p \chi \nabla T) + \frac{\eta}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \operatorname{div} \mathbf{v} \right)^2 + \zeta (\operatorname{div} \mathbf{v})^2$$

В несжимаемой среде ( $c_p = c_v$ )  
с постоянной теплопроводностью:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla T = \chi \Delta T + \frac{\nu}{2c_p} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2$$

# Полная система уравнений приближения Буссинеска

---

$$T = T_s + \theta \qquad \rho' = -\rho_0 \alpha \theta$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p'}{\rho_0} + \mathbf{g} \frac{\rho'}{\rho_0} + \nu \Delta \mathbf{v}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p'}{\rho_0} - \mathbf{g} \alpha \theta + \nu \Delta \mathbf{v}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla (T_s + \theta) = \chi \Delta \theta$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

# Обобщение приближения Буссинеска на случай

~~сжимаемой среды~~

---

Spiegel & Veronis (1960):

$$h \ll \min\{H_\rho, H_p, H_T\}, \quad H_f = \left| f_s \left( \frac{df_s}{dz} \right)^{-1} \right|, \quad f_s \propto e^{-\frac{z}{H_f}}$$

Для исследования движений с конечной амплитудой

— дополнительно:

$$\left| \frac{\rho'}{\rho_0} \right| \leq O\left( \frac{\Delta\rho_s}{\rho_0} \right)$$

$$\frac{dT_s}{dz} \rightarrow \frac{dT_s}{dz} - \frac{dT_{\text{ad}}}{dz} \quad (< 0)$$

---

Задача  
Рэлея — Бенара

# Задача Рэля — Бенара (the Rayleigh–Bénard problem)

---

Горизонтальный слой  $0 \leq z \leq h$   $T_S = T_1 - \beta z$

$$T = T_1 \quad \text{при } z = 0$$

$$T = T_2 = T_1 - \Delta T \quad \text{при } z = h$$

$\theta = 0$  на обеих границах

$\mathbf{v} = 0$  на жесткой (no - slip) границе

$v_z = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0$  на свободной (stress - free) границе

# Безразмерная форма уравнений

---

*Единицы измерения:*

Длины  $h$

Времени  $\tau_v = h^2/\chi$

Температуры  $\Delta T$

Безразмерные параметры задачи:

Число Рэлея  $R = \frac{\alpha g \Delta T h^3}{\nu \chi}$ , число Прандтля  $P = \frac{\nu}{\chi}$

# Постановка стандартной задачи

---

$$\frac{1}{P} \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla \varpi + \mathbf{e}_z R \theta + \Delta \mathbf{v}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - v_z + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta = \Delta \theta$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

$$\theta = 0$$

на обеих границах

$$\mathbf{v} = 0$$

на жесткой границе

$$v_z = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0$$

на свободной границе

# Линейный анализ

---

$$\mathbf{e}_z \cdot \text{rot rot} \quad \left| \quad \frac{1}{P} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla \varpi + \mathbf{e}_z R \theta + \Delta \mathbf{v}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - v_z = \Delta \theta$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0$$

$$v_z = \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{на жесткой границе}$$

$$v_z = \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{на свободной границе}$$

# Поиск собственных функций (**eigenfunctions**)

---

$$\mathbf{k} = \{k_x, k_y, 0\}, \quad \mathbf{x} = \{x, y, 0\} \quad v_z \propto e^{\lambda t} w(\mathbf{x}) f(z)$$

$w(\mathbf{x})$  – пространственно - периодическое решение  
уравнения Гельмгольца  $\Delta w + k^2 w = 0$

$$w(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{j=-N \\ (j \neq 0)}}^N c_j e^{i\mathbf{k}_j \mathbf{x}}$$

$$|\mathbf{k}_j| = k \quad \mathbf{k}_{-j} = -\mathbf{k}_j \quad c_{-j} = c_j^*$$

# Функции планформы

---

Валы:

$$w(x, y) = \cos \mathbf{kx} = \cos(k_x x + k_y y)$$

Шестиугольники:

$$w(x, y) = 2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} kx\right) \cos\left(\frac{1}{2} kx\right) + \cos kx =$$

$$= \cos\left[\frac{k}{2}(y + \sqrt{3}x)\right] + \cos\left[\frac{k}{2}(y - \sqrt{3}x)\right] + \cos ky$$

# Краевая задача (**boundary-value problem**) для функции $f$

---

$$(D^2 - k^2 - \lambda)(D^2 - k^2 - \frac{1}{P}\lambda)(D^2 - k^2)f = -Rk^2 f \quad (D = d / dz)$$

$$f = Df = (D^2 - 2k^2 - \frac{1}{P}\lambda)D^2 f = 0 \quad \text{на жесткой границе}$$

$$f = D^2 f = D^4 f = 0 \quad \text{на свободной границе}$$

Собственные значения (**eigenvalues**) и  
собственные функции в случае свободных границ  
(**stress-free boundaries**)

---

$$f_n = \sin n\pi z \quad (n = 1, 2, \dots)$$

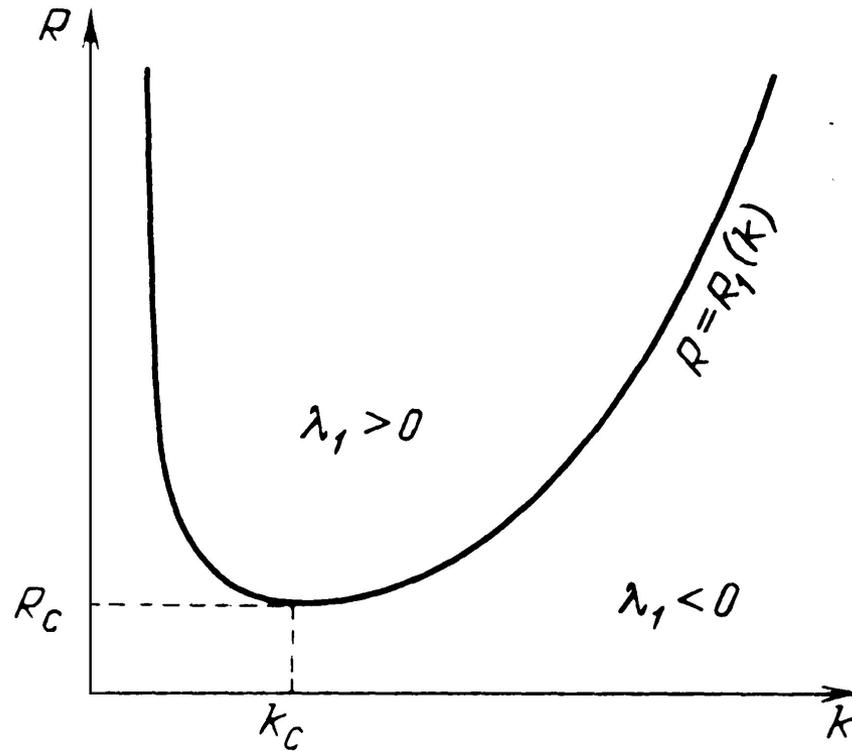
$$\lambda_n^{(1,2)} = -\frac{P+1}{2}(n^2\pi^2 + k^2) \pm \sqrt{\left(\frac{P-1}{2}\right)^2 (n^2\pi^2 + k^2)^2 + \frac{RPk^2}{n^2\pi^2 + k^2}}$$

$$\lambda_n^{(1)} < 0; \quad \lambda_n^{(2)} > 0 \quad \text{при} \quad R > R_n(k) = \frac{(n^2\pi^2 + k^2)^3}{k^2}$$

Конвекция развивается при  $R > R_c = \min R_1(k) = R_1(k_c)$

# Нейтральная кривая задачи Рэля — Бенара

---



# Критические числа Рэля и волновые числа

---

Две свободные  
границы:

$$R_c = \frac{27}{4} \pi^4 = 657.511 \quad k_c = \frac{\pi}{\sqrt{2}} = 2.221$$

Две жесткие  
границы:

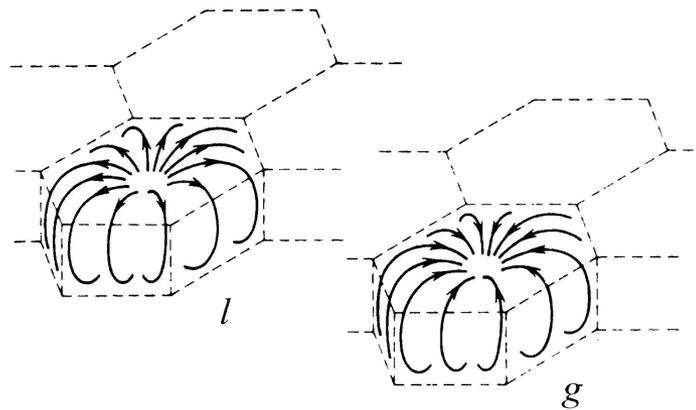
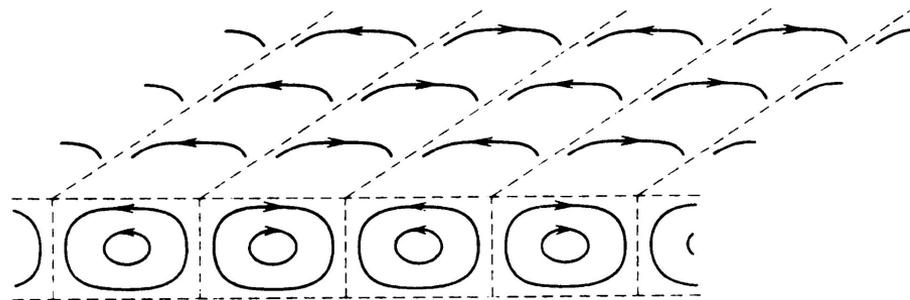
$$R_c = 1707.762 \quad k_c = 3.117$$

Одна свободная  
и одна жесткая  
границы:

$$R_c = 1100.657 \quad k_c = 2.682$$

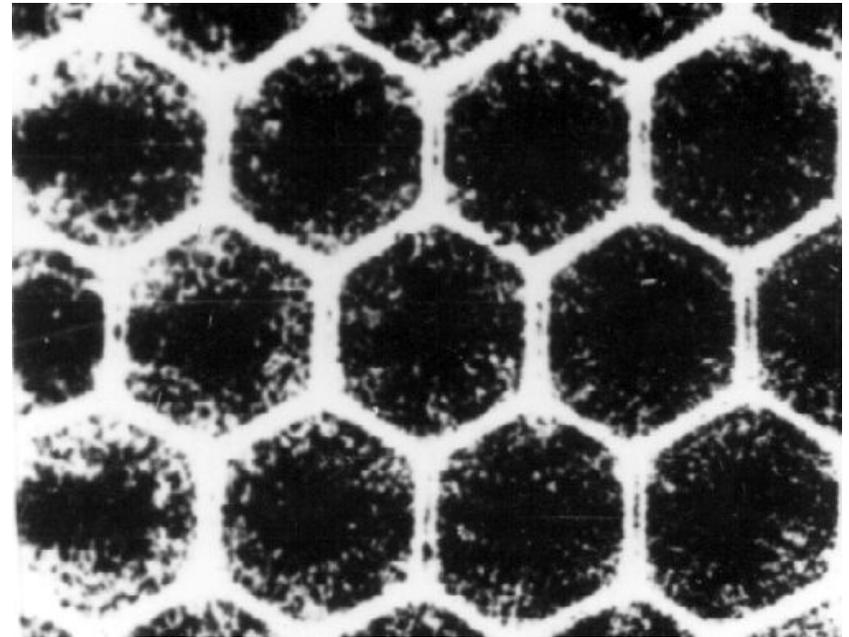
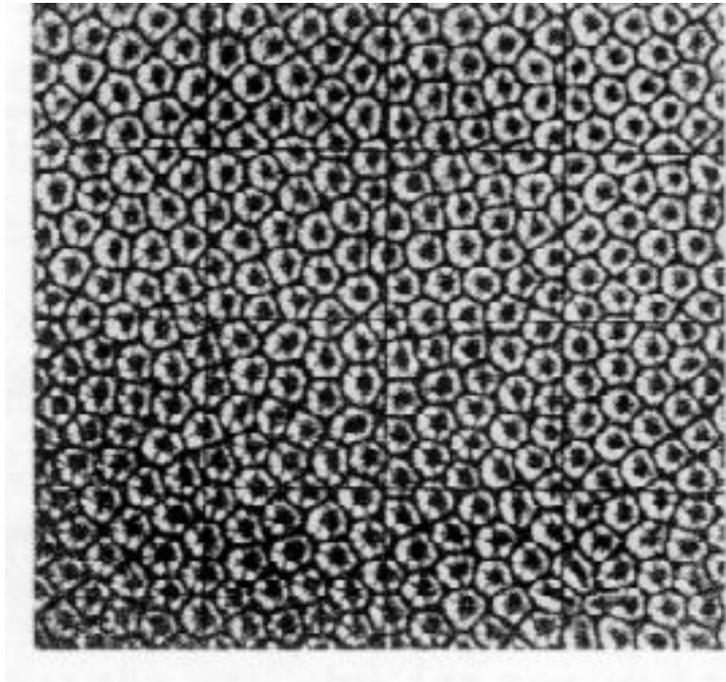
# Структуры конвективных течений

---



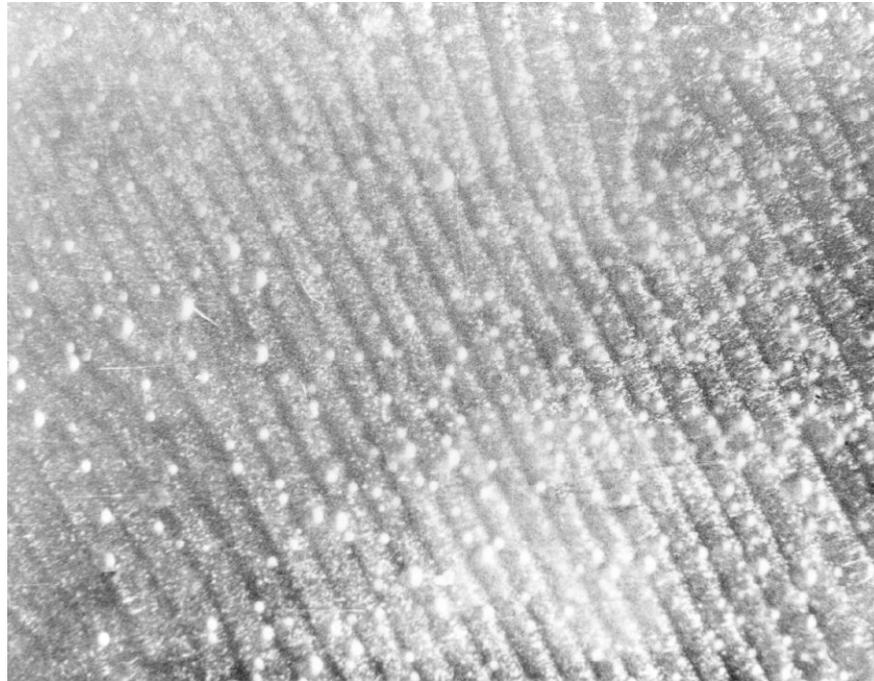
# Шестиугольные ячейки (Бенара)

---

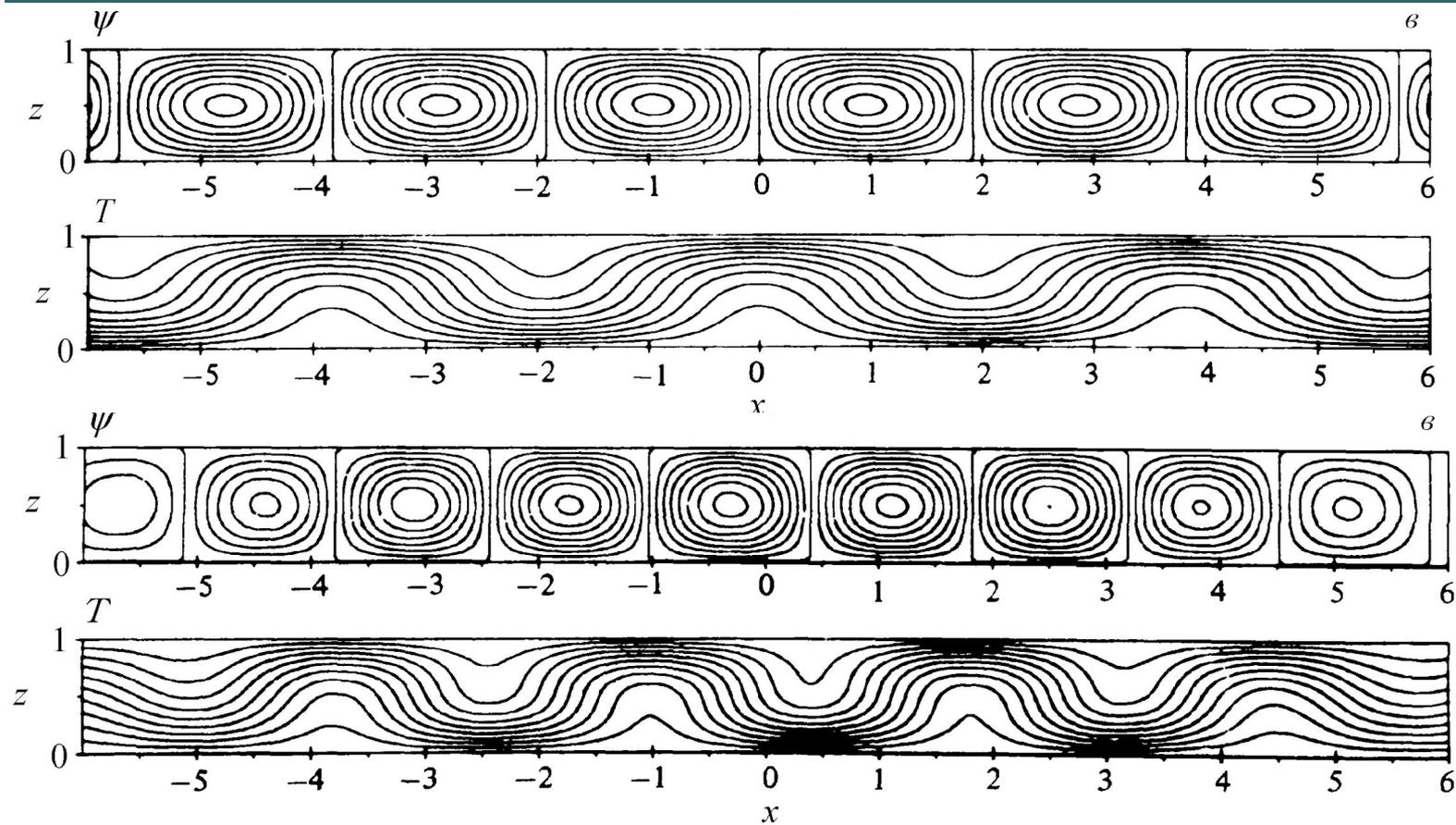


# Квазидвумерные конвективные валы

---



# Линии тока и изотермы при валиковой конвекции



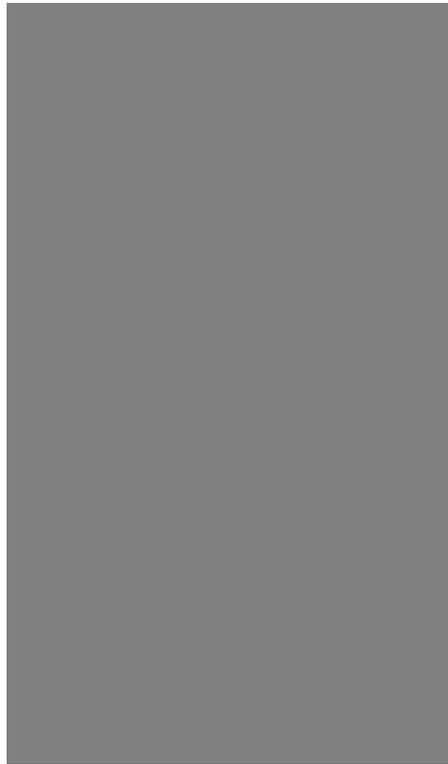
# Сценарии эволюции шестиугольных ячеек

## Слой с жесткими границами



$$R = 12000, P = 7, k = 2.4$$

Устойчивость



$$R = 18000, P = 1, k = 1.4$$

Двухвихревая ячейка



$$R = 8000, P = 7, k = 1.6$$

Дробление

# Сценарии эволюции шестиугольных ячеек

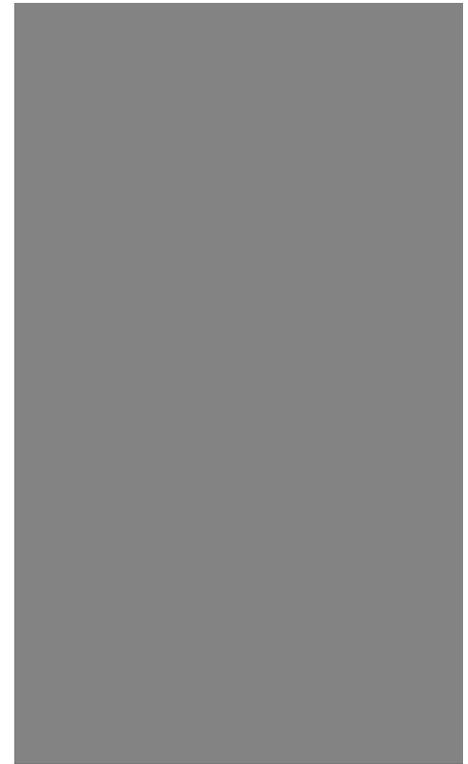
## Слой с жесткими границами



$R = 18000, P = 2.5,$   
 $k = 0.8.$  Объединение



$R = 20000, P = 2.5,$   
 $k = 0.8.$  Укрупнение



$R = 20000, P = 2.5,$   
 $k = 1.$  Колебания

# Литература

---

- Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Гидродинамика*, 3-е изд. М: Физматлит, 1986.
- Дж. Бэтчелор. Введение в динамику жидкости, М.: Мир, 1973.
- С.Б. Пикельнер. *Основы космической электродинамики*, 2-е изд. М:Физматлит, 1966.
- А.В. Гетлинг. *Конвекция Рэля–Бенара. Структуры и динамика*. М: УРСС, 1999.

Александр Владимирович Гетлинг

---

Тел. дом.  $\equiv$  раб.: 433-74-45

моб: 8 (903) 505-18-46

Эл. почта: [A.Getling@mail.ru](mailto:A.Getling@mail.ru)

Веб-страница:

[www.magnetosphere.ru/~avg](http://www.magnetosphere.ru/~avg)