Гидродинамика Солнца

Лекция 2

Ранние исследования тепловой конвекции

Середина XVIII в. — М. В. Ломоносов, Дж. Гадлей (G. Hadley); качественное объяснение природы явления

1900 — А. Бенар (H. Bénard), эксперимент

1906 — K. Schwarzschild, условие возникновения

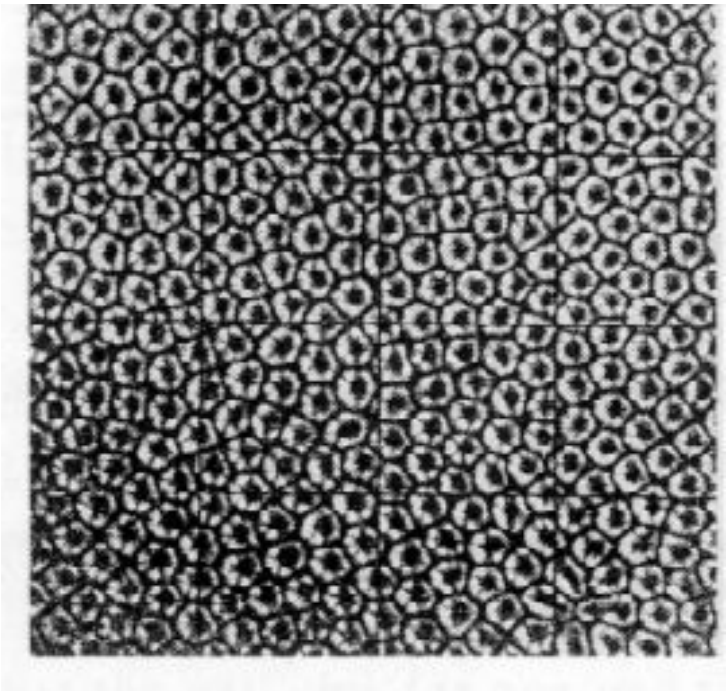
1916 — лорд Рэлей (Rayleigh), теория

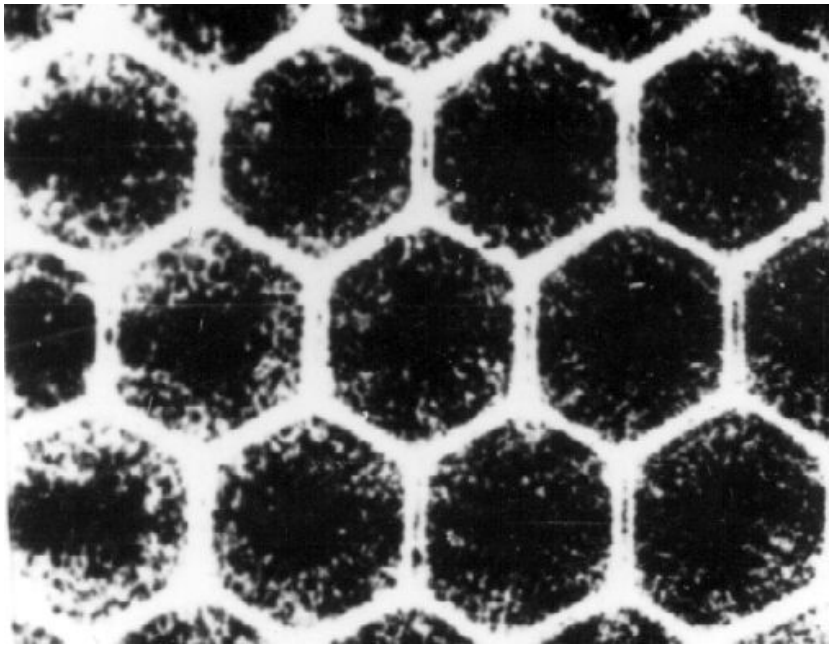
1930–1950 — H. Siedentopf и др., теория пути перемешивания

1940 — A. Pellew & R. Southwell, линейная теория

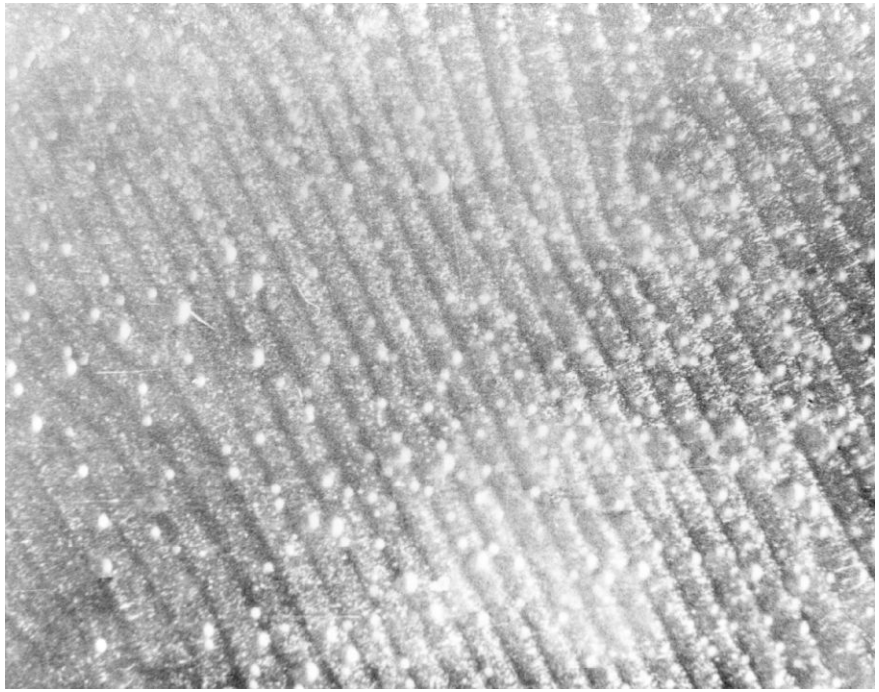
1961 — С. Чандрасекар (S. Chandrasekhar); линейная теория, первая фундаментальная монография

Шестиугольные ячейки (Бенара)





Квазидвумерные конвективные валы **(convection rolls)**



Уравнение Навье – Стокса
(the Navier–Stokes equation)

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}\right]=-\nabla p+\mathbf{f}+\nabla\cdot\sigma(\mathbf{v})$$

Вязкий тензор напряжений:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{v})=\eta\left(\nabla_i v_j+\nabla_j v_i-\frac{2}{3}\delta_{ij}\operatorname{div}\mathbf{v}\right)+\zeta\,\delta_{ij}\operatorname{div}\mathbf{v}\qquad(\eta=\rho\nu)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\eta\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i}+\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)-\frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\right\}+$$

$$+f_i+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\zeta\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\right)$$

Уравнение Навье – Стокса
(the Navier–Stokes equation)

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\eta\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i}+\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)-\frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\right\}+$$

$$+f_i+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\zeta\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\right)$$

Если коэффициенты постоянны:

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}\right]=-\nabla p+\mathbf{f}+\eta\Delta\mathbf{v}+\left(\frac{\eta}{3}+\zeta\right)\nabla\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}$$

Баротропность и бароклинность

В состоянии равновесия $-\nabla p + \rho \mathbf{g} = 0$

$$[\nabla \times (\rho \mathbf{g})] = [\nabla \rho \times \mathbf{g}] = [\nabla \rho \times \frac{\nabla p}{\rho}] = 0$$

Баротропность: $[\nabla \rho \times \nabla p] = 0$

Бароклинность: $[\nabla \rho \times \nabla p] \neq 0$

Уравнение непрерывности. Несжимаемая жидкость в поле тяжести

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0$$

Несжимаемость: $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}\right] = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \rho \nu \Delta \mathbf{v} \qquad \left(\nu = \frac{\eta}{\rho}\right)$$

Приближение Буссинеска **(the Boussinesq approximation)**

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} = 0 \qquad \rho - \rho_0 = -\rho_0 \alpha (T - T_0)$$

$$p = p_S + p', \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad \mathbf{v} = 0 + \mathbf{v}' \quad (\mathbf{v}' = \mathbf{v})$$

$$\rho_0 \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \right] = -\nabla (p_S + p') + (\rho_0 + \rho')\mathbf{g} + \rho_0 \nu \Delta \mathbf{v}$$

$$0 = -\nabla p_S + \rho_0 \mathbf{g}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p'}{\rho_0} + \mathbf{g}\frac{\rho'}{\rho_0} + \nu \Delta \mathbf{v}$$

Уравнение переноса тепла

$$\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t}+\mathbf{v}\nabla s\right)=\operatorname{div}(\rho c_p \chi \nabla T)+\frac{\eta}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ik}\operatorname{div}\mathbf{v}\right)^2+$$

$$+\zeta(\operatorname{div}\mathbf{v})^2$$

В несжимаемой среде ($c_p = c_v$)

с постоянной теплопроводностью:

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\mathbf{v}\nabla T=\chi\Delta T+\frac{\nu}{2c_p}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)^2$$

Полная система уравнений приближения Буссинеска

$$T = T_S + \theta \qquad \rho' = -\rho_0 \alpha \theta$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p'}{\rho_0} + \mathbf{g}\frac{\rho'}{\rho_0} + \nu \Delta \mathbf{v}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p'}{\rho_0} - \mathbf{g}\alpha\theta + \nu \Delta \mathbf{v}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla(T_S + \theta) = \chi \Delta \theta$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

Обобщение приближения Буссинеска на случай сжимаемой среды

Spiegel & Veronis (1960):

$$h << \min\{H_\rho, H_p, H_T\}, \quad H_f = \left| f_S \left(\frac{df_S}{dz} \right)^{-1} \right|, \quad f_S \propto \mathrm{e}^{-\frac{z}{H_f}}$$

Для исследования движений с конечной амплитудой — дополнительно:

$$\left| \frac{\rho'}{\rho_0} \right| \le O\left(\frac{\Delta\rho_S}{\rho_0} \right)$$

$$\frac{dT_S}{dz} \to \frac{dT_S}{dz} - \frac{dT_{ad}}{dz} \quad (< 0)$$

Задача Рэлея — Бенара

Задача Рэлея — Бенара
(the Rayleigh–Bénard problem)

Горизонтальный слой $0 \le z \le h$ $\qquad T_S = T_1 - \beta z$

$$T = T_1 \qquad \text{при } z = 0$$
$$T = T_2 = T_1 - \Delta T \qquad \text{при } z = h$$

$\theta = 0$ на обеих границах

$\mathbf{v} = 0$ на жесткой (no - slip) границе

$v_z = 0, \quad \dfrac{\partial v_x}{\partial z} = \dfrac{\partial v_y}{\partial z} = 0$ на свободной (stress - free) границе

Безразмерная форма уравнений

Единицы измерения:

Длины	h
Времени	$\tau_v = h^2/\chi$
Температуры	ΔT

Безразмерные параметры задачи:

Число Рэлея $R = \dfrac{\alpha g \Delta T h^3}{\nu \chi}$, число Прандтля $P = \dfrac{\nu}{\chi}$

Постановка стандартной задачи

$$\frac{1}{P}\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}\right]=-\nabla\varpi+\mathbf{e}_z R\theta+\Delta\mathbf{v}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}-v_z+\mathbf{v}\cdot\nabla\theta=\Delta\theta$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v}=0$$

$\theta=0$ на обеих границах

$\mathbf{v}=0$ на жесткой границе

$v_z=0,\quad \dfrac{\partial v_x}{\partial z}=\dfrac{\partial v_y}{\partial z}=0$ на свободной границе

Линейный анализ

$\mathbf{e}_z \cdot \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}$

$$\frac{1}{P}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla \varpi + \mathbf{e}_z R\theta + \Delta \mathbf{v}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - v_z = \Delta \theta$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0$$

$$v_z = \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{на жесткой границе}$$

$$v_z = \frac{\partial^2 v_z}{\partial^2 z} = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{на свободной границе}$$

Поиск собственных функций **(eigenfunctions)**

$$\mathbf{k} = \{k_x, k_y, 0\}, \quad \mathbf{x} = \{x, y, 0\} \qquad v_z \propto e^{\lambda t} w(\mathbf{x}) f(z)$$

$w(\mathbf{x})$ – пространственно - периодическое решение уравнения Гельмгольца $\Delta w + k^2 w = 0$

$$w(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{j=-N \\ (j \neq 0)}}^{N} c_j e^{i\mathbf{k}_j \mathbf{x}}$$

$$\left|\mathbf{k}_j\right| = k \quad \mathbf{k}_{-j} = -\mathbf{k}_j \quad c_{-j} = c_j^*$$

Функции планформы

Валы:

$$w(x,y) = \cos \mathbf{kx} = \cos(k_x x + k_y y)$$

Шестиугольники:

$$w(x,y) = 2\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}kx\right)\cos\left(\frac{1}{2}kx\right) + \cos kx =$$

$$= \cos\left[\frac{k}{2}\left(y + \sqrt{3x}\right)\right] + \cos\left[\frac{k}{2}\left(y - \sqrt{3x}\right)\right] + \cos ky$$

Краевая задача **(boundary-value problem)** для функции f

$$(D^2 - k^2 - \lambda)(D^2 - k^2 - \frac{1}{P}\lambda)(D^2 - k^2) f = -Rk^2 f \quad (D = d/dz)$$

$$f = Df = (D^2 - 2k^2 - \frac{1}{P}\lambda) D^2 f = 0 \quad \text{на жесткой границе}$$

$$f = D^2 f = D^4 f = 0 \quad \text{на свободной границе}$$

Собственные значения **(eigenvalues)** и собственные функции в случае свободных границ **(stress-free boundaries)**

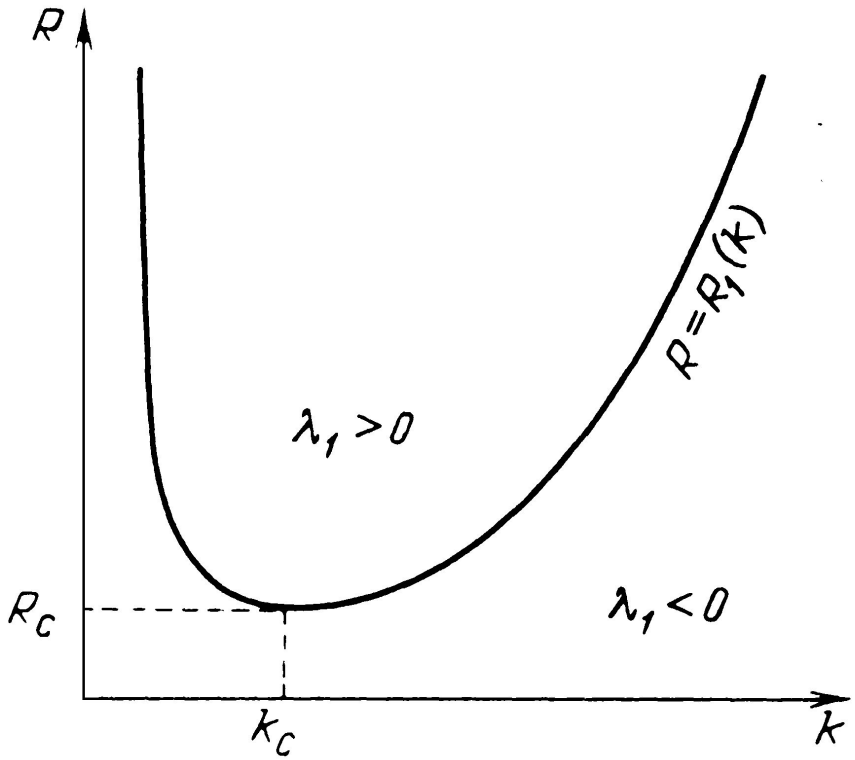
$$f_n = \sin n\pi z \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

$$\lambda_n^{(1,2)} = -\frac{P+1}{2}(n^2\pi^2 + k^2) \pm \sqrt{\left(\frac{P-1}{2}\right)^2 (n^2\pi^2 + k^2)^2 + \frac{RPk^2}{n^2\pi^2 + k^2}}$$

$$\lambda_n^{(1)} < 0; \quad \lambda_n^{(2)} > 0 \quad \text{при} \quad R > R_n(k) = \frac{(n^2\pi^2 + k^2)^3}{k^2}$$

Конвекция развивается при $R > R_c = \min R_1(k) = R_1(k_c)$

Нейтральная кривая задачи Рэлея — Бенара



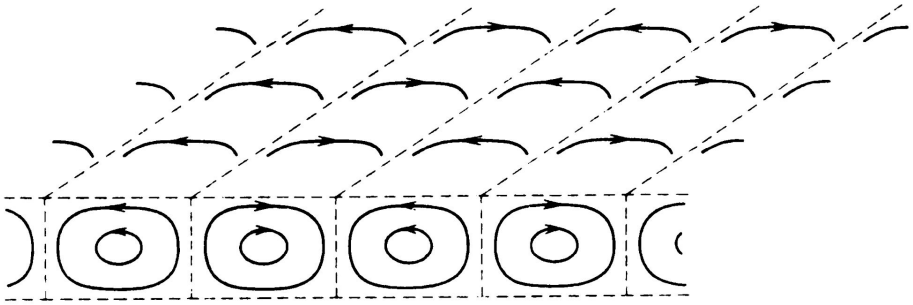
Критические числа Рэлея и волновые числа

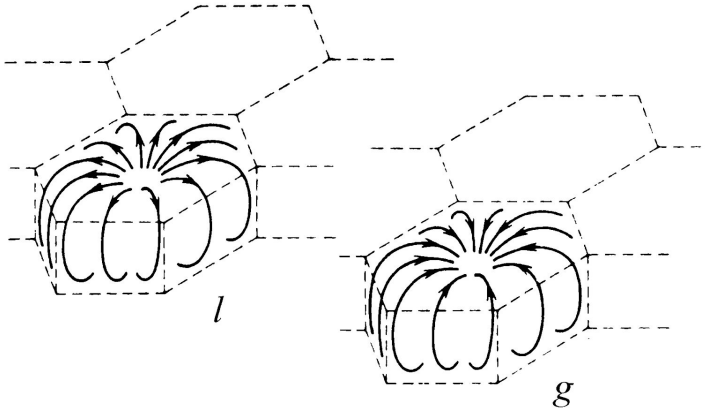
Две свободные границы: $R_c = \frac{27}{4}\pi^4 = 657.511 \quad k_c = \frac{\pi}{\sqrt{2}} = 2.221$

Две жесткие границы: $R_c = 1707.762 \quad k_c = 3.117$

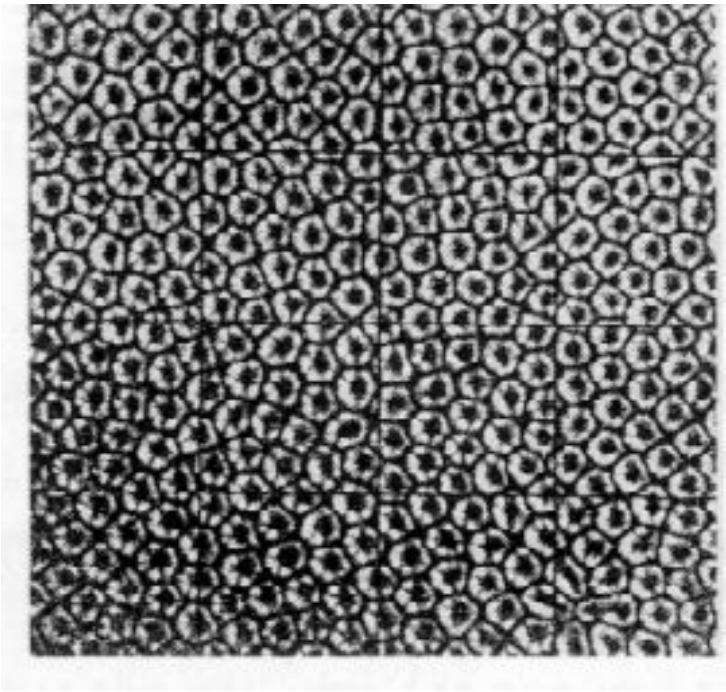
Одна свободная и одна жесткая границы: $R_c = 1100.657 \quad k_c = 2.682$

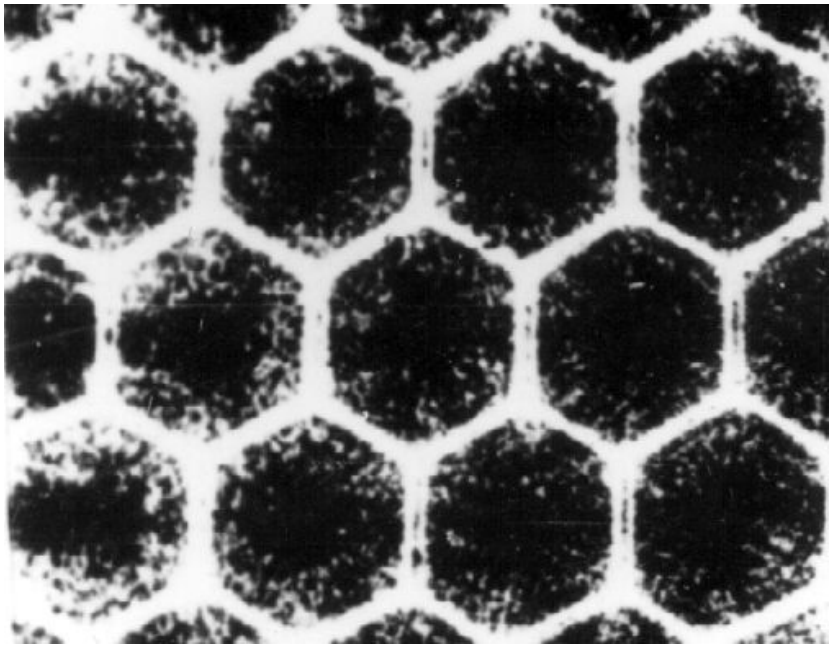
Структуры конвективных течений



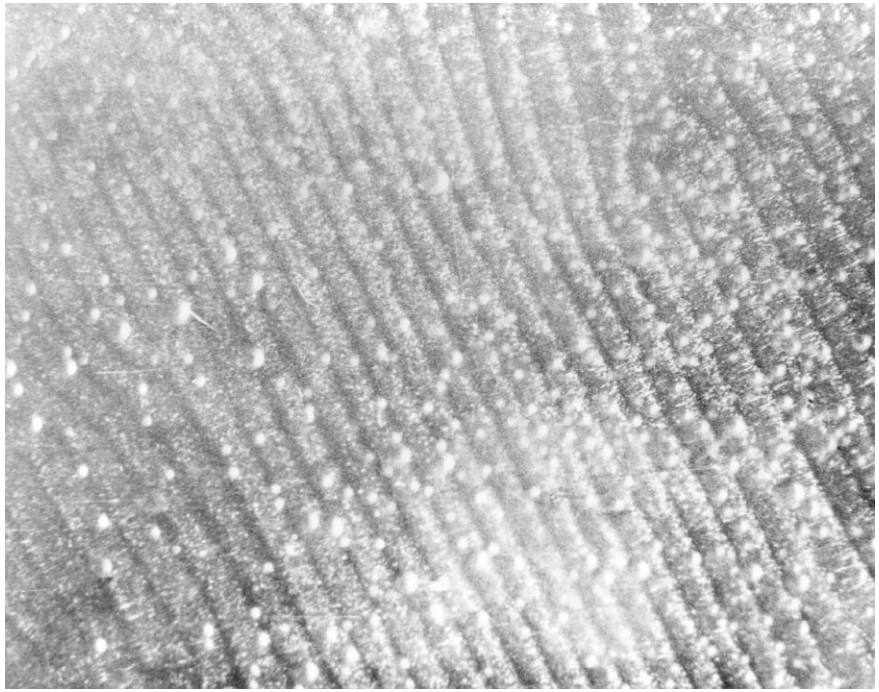


Шестиугольные ячейки (Бенара)

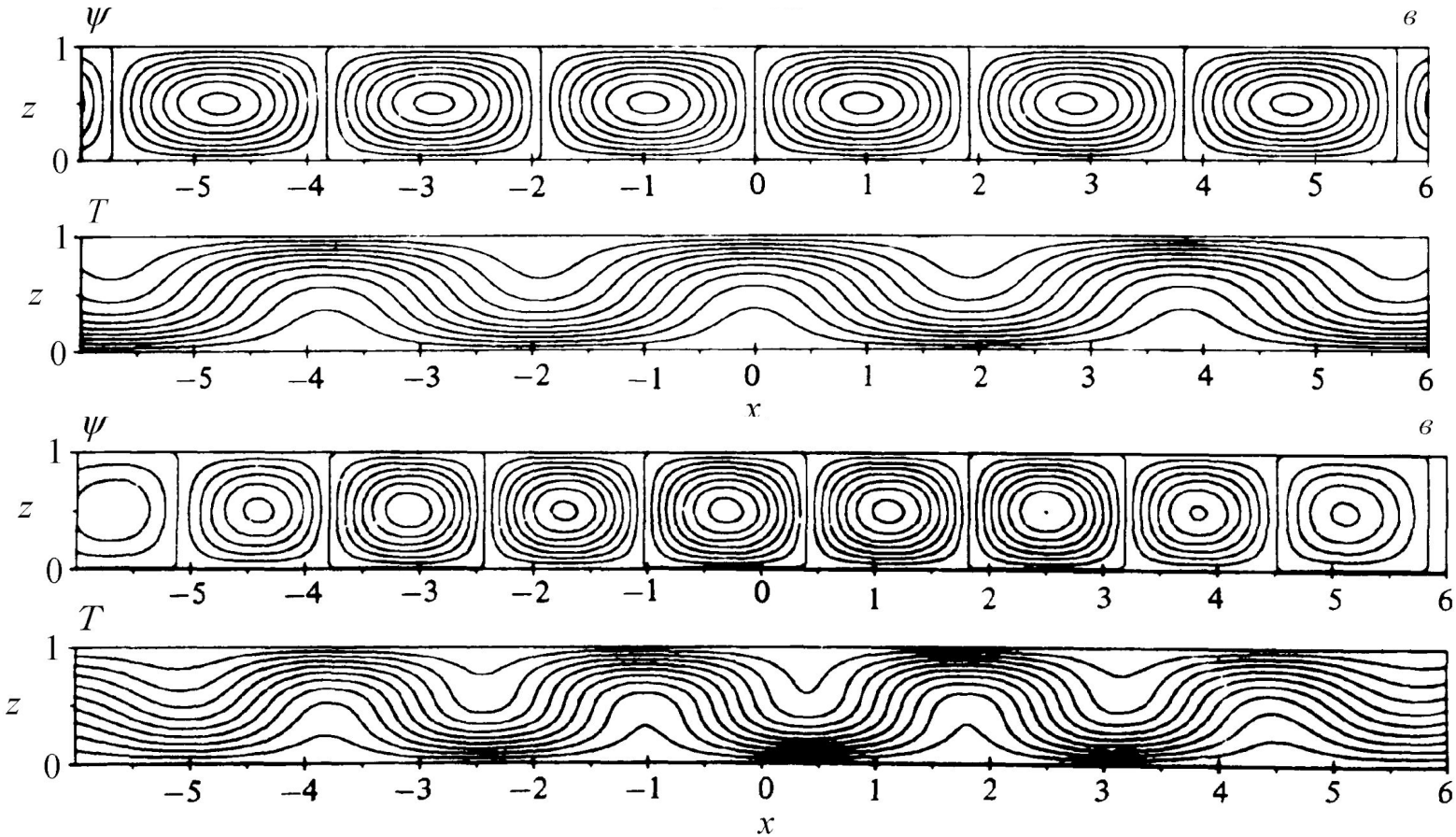




Квазидвумерные конвективные валы

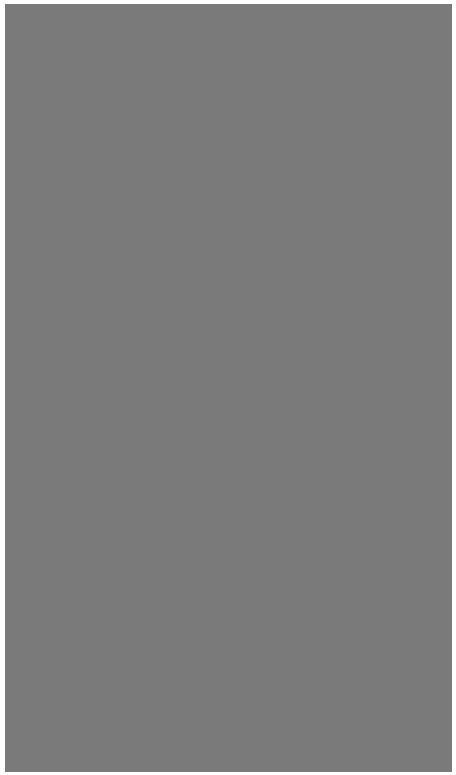


Линии тока и изотермы при валиковой конвекции



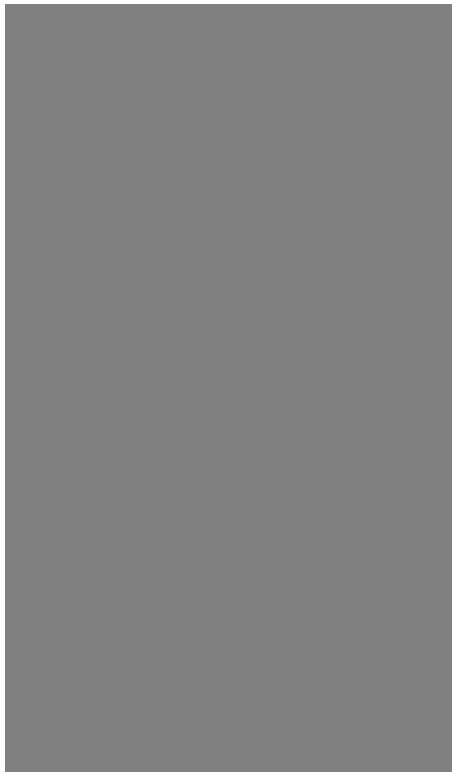
Сценарии эволюции шестиугольных ячеек

Слой с жесткими границами



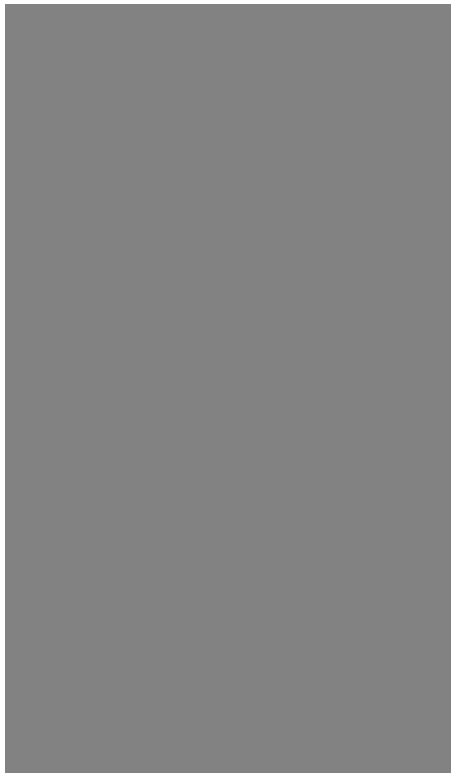
$R = 12000$, $P = 7$, $k = 2.4$

Устойчивость



$R = 18000$, $P = 1$, $k = 1.4$

Двухвихревая ячейка

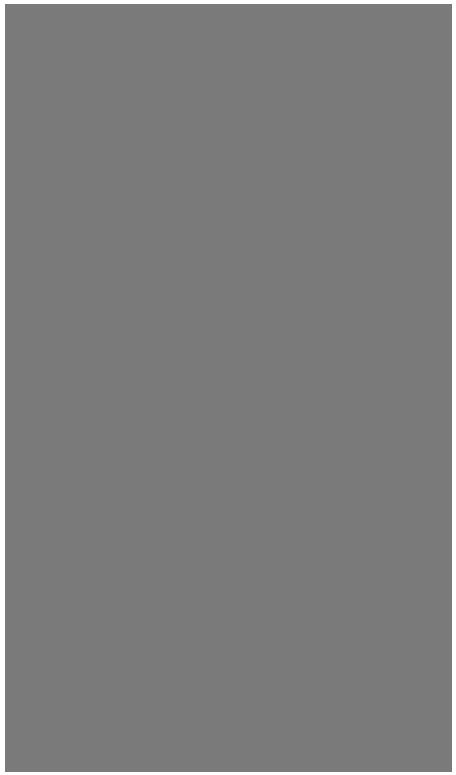


$R = 8000$, $P = 7$, $k = 1.6$

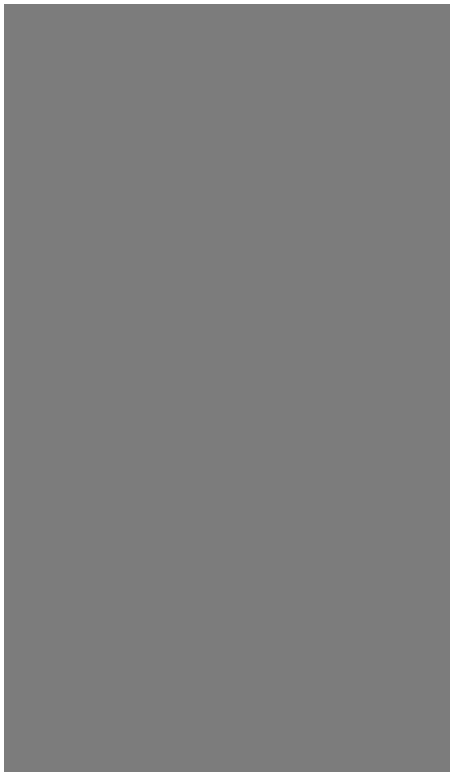
Дробление

Сценарии эволюции шестиугольных ячеек

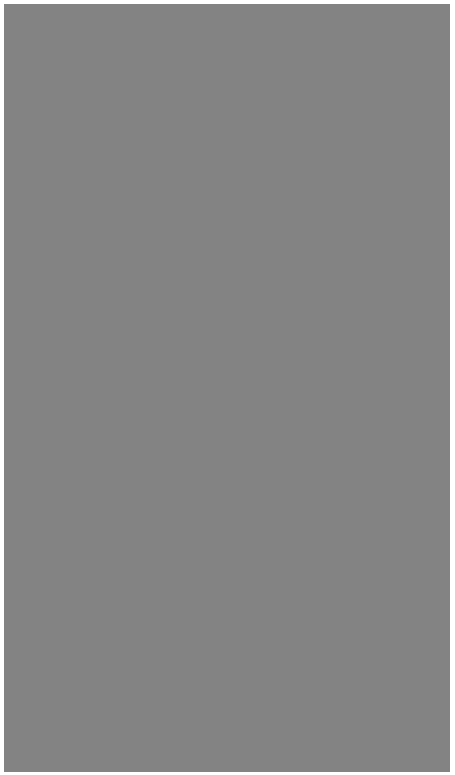
Слой с жесткими границами



$R = 18000$, $P = 2.5$, $k = 0.8$. Объединение



$R = 20000$, $P = 2.5$, $k = 0.8$. Укрупнение



$R = 20000$, $P = 2.5$, $k = 1$. Колебания

Литература

- Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Гидродинамика,* 3-е изд. М: Физматлит, 1986.
- Дж. Бэтчелор. Введение в динамику жидкости, М.: Мир, 1973.
- С.Б. Пикельнер. *Основы космической электродинамики,* 2-е изд. М:Физматлит, 1966.
- А.В. Гетлинг. *Конвекция Рэлея–Бенара. Структуры и динамика.* М: УРСС, 1999.

Александр Владимирович Гетлинг

Тел. дом. ≡ раб.: 433-74-45

моб: 8 (903) 505-18-46

Эл. почта: A.Getling@mail.ru

Веб-страница:

www.magnetosphere.ru/~avg