РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ
Факультет физико-математических и естественных наук

# Магистерская диссертация.

# Двухсекторная модель экономики с неоднородным трудом.

Студентка: Саитгараева Галина Раисовна

Москва, 2012 г.

# Содержание

# Двухсекторная модель экономики.

$$(1) \quad Y_g = L_a^{1-\beta}[(1-\lambda)(\alpha_r L_r)^{\mu} + \lambda(\alpha_k K)^{\mu}]^{\beta/\mu}$$

$\beta, \mu \in (0,1)$.

$$Y_s = \alpha_s L_m$$

$$\alpha_s > 0$$

$$K = Y_k(t)e^{\delta t}/\theta$$

$$\theta = e^{\delta}$$

$\delta > 0$

# Свойства производственной функции

- ***Утверждение 1***: В производственной функции (1) эластичность замены абстрактного труда на механический труд равна 1.

$$\gamma = \frac{dL_a}{dL_r} = -\frac{\partial F / \partial L_r}{\partial F / \partial L_a} = 1 \quad (5)$$

- ***Утверждение 2:*** Эластичность замены механического труда технологическим капиталом в (1) определяется формулой $\sigma_r = 1/(1-\mu)$

- ***Следствие***: Эластичность замены механического труда технологическим капиталом больше единицы. (Поскольку по предположению $\mu \in (0,1)$).

# Функция полезности CES-типа

,

$$u = \left[\alpha(c_s)^{-\rho} + (1-\alpha)(c_g)^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}$$

Эластичность замены потребления товаров на потребление услуг для нее равна

$$\sigma_c = {}^{1}\!/_{1+\rho}$$

Фирмы, производящие товары и услуги, максимизируют доход, то есть

$$d_{s=}p_s Y_s - w_m L_m$$

$$d_g = p_g Y_g - [L_a(t)w_a(t) + L_k(t)w_k(t) + L_r(t)w_r(t)]$$

# Максимизация дохода фирмами

$$w_m(t) = \alpha_s p_s(t)$$

$$w_a(t) = \frac{d\left(L_a(t)^{1-\beta}[(1-\lambda)(\alpha_r L_r(t))^{\mu} + \lambda(\alpha_k K(t))^{\mu}]^{\beta/\mu}\right)}{dL_a(t)}$$

$$w_r(t) = \frac{d\left(L_a(t)^{1-\beta}[(1-\lambda)(\alpha_r L_r(t))^{\mu} + \lambda(\alpha_k K(t))^{\mu}]^{\beta/\mu}\right)}{dL_r(t)}$$

$$w_k(t) = \frac{d\left(L_a(t)^{1-\beta}[(1-\lambda)(\alpha_r L_r(t))^{\mu} + \lambda(\alpha_k K(t))^{\mu}]^{\beta/\mu}\right)}{dK(t)}$$

# Задача выбора капитала

- Задача выбора капитала в нашей экономике решается следующим образом:

$$\max_{K(t)\in R_+} L_a(t)^{1-\beta}\left[(1-\lambda)(\alpha_r L_r(t))^{\mu} + \lambda(\alpha_k K(t))^{\mu}\right]^{\beta/\mu} - \theta e^{-\delta t} K(t)$$

$$L_a(t)^{1-\beta}\lambda(\alpha_k)^{\mu}\beta\left(K(t)\right)^{\mu-1}\left[(1-\lambda)\left(\alpha_r L_r(t)\right)^{\mu} + \lambda\left(\alpha_k K(t)\right)^{\mu}\right]^{\frac{\beta}{\mu}-1} - \theta e^{-\delta t} = 0$$

Последняя функция монотонна и меняет знак, поэтому у этого уравнения есть решение.

# Спрос на ручной труд

- ***Утверждение 3:*** Оптимизация потребления

$$u = \left[\alpha (c_s)^{-\rho} + (1-\alpha)\left(c_g\right)^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}$$

- Подразумевает

$$p_s = \frac{\alpha}{(1-\alpha)}\left(\frac{L_m(t)}{F(1, L_r(t), t)}\right)^{-1/\sigma_c} \qquad (*)$$

$$u = \left[\alpha (c_s)^{-\rho} + (1-\alpha)\left(c_g\right)^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}} \rightarrow max$$

$$C_g(t) + C_s(t)p_s(t) = L_a(t)w_a(t) + L_m(t)w_m(t) + L_r(t)w_r(t)$$

- При росте альфа до 1, функция (*) зависит только от услуг и мы получаем что цена на услуги увеличивается.

# Предложение ручного труда

$$w_m(t) = \eta^*(t) w_r(t) \qquad p_s(t) = \eta^*(t) \frac{dF(1, L_r(t), t)}{dL_r(t)}$$

$$\eta^*(t) = \eta(L_m) \equiv -\ln(1 - \mathrm{Lm}(t))$$

$$p_s(t) = -\ln(1 - \mathrm{Lm}(t)) \frac{dF(1, g(L_m(t)), t)}{dL_r(t)}$$

Уравнение, задающее общее равновесный уровень ручного труда:

$$F(1, g(L_m(t)), t)^{1/\sigma_c} = -\frac{(1-\alpha)}{\alpha} L_m(t)^{1/\sigma_c} \log(1 - L_m(t)) \frac{dF(1, g(L_m(t)), t)}{dL_r(t)}$$

# Асимптотическое равновесие

$$F(1,g(L_m(t)),t)^{1/\sigma_c} = -\frac{(1-\alpha)}{\alpha} L_m(t)^{1/\sigma_c} \log(1 - L_m(t)) \frac{dF(1,g(L_m(t)),t)}{dL_r(t)}$$

Чтобы найти решение данного уравнения, нужно оценить предельные значения функций

$$F(1,g(L_m(t)),t) \text{ и } \frac{dF(1,g(L_m(t)),t)}{dL_r(t)}.$$

# Заключение

- Исследовав асимптотическое поведение функций в общем уравнении равновесия, были получены следующие результаты:

$$L_m(t) \to 0, \qquad \frac{1}{\sigma_c} < \frac{\beta-\mu}{\beta},$$

$$L_m(t) \to 1, \qquad \frac{1}{\sigma_c} > \frac{\beta-\mu}{\beta}.$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{w_m(t)}{w_r(t)} = \begin{cases} 0 \text{ при } \dfrac{1}{\sigma_c} < \dfrac{\beta-\mu}{\beta} \\ \infty \text{ при } \dfrac{1}{\sigma_c} > \dfrac{\beta-\mu}{\beta} \end{cases}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{w_a(t)}{w_r(t)} = \infty$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{w_a(t)}{w_m(t)} = \begin{cases} \infty \text{ при } \sigma_c > 1 \\ (1-\beta) \text{при } \sigma_c = 1 \\ 0 \text{ при } \sigma_c < 1. \end{cases}$$