МЕТОД ЗАМЕНЫ ФУНКЦИИ

Решение некоторых достаточно сложных (хотя и стандартных) неравенств

11 класс

О методе

- Приведенный метод решения неравенств позволяет решать их более компактно, а потому быстрее, что особенно актуально сейчас, когда в задании С3 в ЕГЭ необходимо решить неравенство повышенного уровня сложности.
- Представленный метод позволяет свести решение сложного, громоздкого неравенства к классическому (школьному) методу интервалов для многочленов.

ТЕОРИЯ

- Рассматриваемые методы решения достаточно эффективны при решении неравенств, левая часть которых представляет собой произведение (частное) двух функций указанных ниже видов, а правая часть равна нулю.
- Традиционные решения таких неравенств путем рассмотрения двух случаев (или применение обобщенного метода интервалов) оказываются более громоздкими по сравнению с методом замены функции.

УТВЕРЖДЕНИЕ

Если область определения, нули и промежутки знакопостоянства функции $f(x)$ соответственно совпадают с областью определения, нулями и промежутками знакопостоянства функции $g(x)$,

то неравенства:

$$p(x)\cdot f(x)\geq 0 \qquad p(x)\cdot g(x)\geq 0$$

равносильны.

Что это значит практически?

- Утверждение означает то, что если одна из функций $f(x)$ или $g(x)$ имеет более простой вид, то при решении неравенств указанного выше вида ее можно «***заменить***» на другую. Рассмотрим основные примеры таких пар функций.

Показательные неравенства

1. Функции

$$f(x) = a^{u(x)} - a^{v(x)}$$

(полагая для определенности a>1)

и $g(x) = u(x) - v(x)$

(причем, D(f) совпадает с D(g))

- Действительно, имеем:

при $a>1 \quad a^{u(x)}-a^{v(x)}\geq 0 \Leftrightarrow a^{u(x)}\geq a^{v(x)}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u(x)\geq v(x)\Leftrightarrow u(x)-v(x)\geq 0,$

т.е. для $f(x)$ и $g(x)$ выполнены условия утверждения.

Пример №1

$$\frac{4^{x^2+3x-2}-0,5^{2x^2+2x-1}}{5^x-1}\le 0 \Leftrightarrow$$

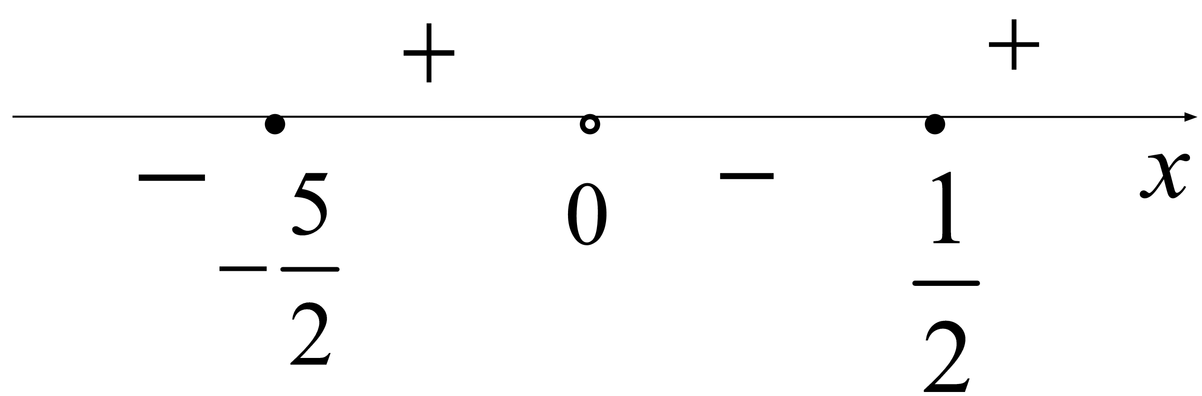
$$\Leftrightarrow \frac{2^{2x^2+6x-4}-2^{-2x^2-2x+1}}{5^x-5^0}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2+6x-4-\left(-2x^2-2x+1\right)}{x-0}\le 0 \Leftrightarrow$$

Продолжение примера №1

$$\Leftrightarrow \frac{4x^2+8x-5}{x} \le 0 \Leftrightarrow \frac{\left(x+\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{x} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{5}{2}\right] \cup \left(0; \frac{1}{2}\right].$$



Неравенства с модулем

2. Функции

$$f(x) = |u(x)| - |v(x)| \quad (\ g(x) = u^2(x) - v^2(x))$$

(причем, D(f) совпадает с D(g))

Действительно,

имеем:

$$|u(x)| - |v(x)| \geq 0 \Leftrightarrow |u(x)| \geq |v(x)| \Leftrightarrow$$

$$u^2(x) \geq v^2(x) \Leftrightarrow u^2(x) - v^2(x) \geq 0,$$

т.е. для $f(x)$ и $g(x)$ выполнены условия утверждения.

Пример №2

$$\frac{|3x-2|-|2x-3|}{|x^2+x-8|-|x^2-x|}\le 0 \Leftrightarrow \frac{(3x-2)^2-(2x-3)^2}{(x^2+x-8)^2-(x^2-x)^2}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(3x-2-2x+3)(3x-2+2x-3)}{(x^2+x-8-x^2+x)(x^2+x-8+x^2-x)}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)(5x-5)}{(2x-8)(2x^2-8)}\le 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-1)}{(x-4)(x-2)(x+2)}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in(-\infty;-2)\cup[-1;1]\cup(2;4).$$

Иррациональные неравенства

3.Функции

$f(x) = \sqrt[n]{u(x)} + \sqrt[n]{v(x)}, \quad g(x) = u(x) - v(x)$

где $D(g): \begin{cases} u(x) \geq 0, \\ v(x) \geq 0 \end{cases}$ при четном n.

Очевидно,что при нечетном n утверждение справедливо. Кроме того, при четном n D(f) совпадает с D(g).

- **Действительно, имеем:**

$$\sqrt[n]{u(x)}-\sqrt[n]{v(x)}\geq 0 \Leftrightarrow \sqrt[n]{u(x)}\geq \sqrt[n]{v(x)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u(x)\geq v(x), \\ u(x)\geq 0, \\ v(x)\geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u(x)-v(x)\geq 0, \\ u(x)\geq 0, \\ v(x)\geq 0. \end{cases}$$

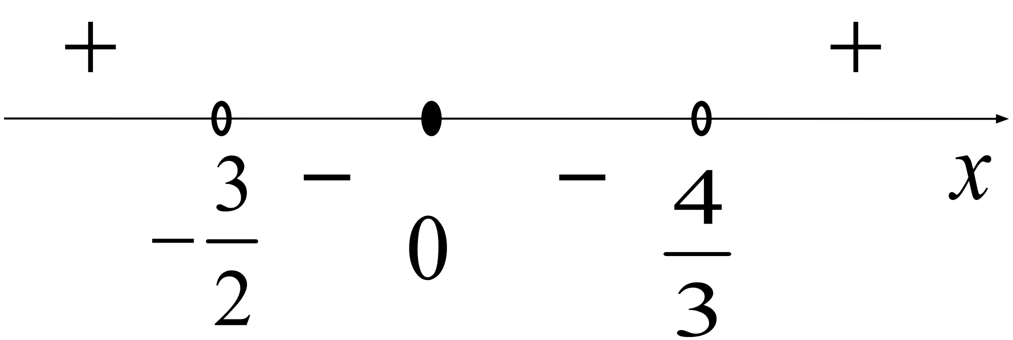
- **Следовательно, при четном n для функций $f(x)$ и $g(x)$ также выполнены условия утверждения.**

Пример №3

$$\frac{\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt[3]{3x^2+4x-2}+\sqrt[3]{3x^2+x-4}}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt[3]{3x^2+4x-2}-\sqrt[3]{-3x^2-x+4}}\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2+x+1-x^2-x-1}{3x^2+4x-2-\left(-3x^2-x+4\right)}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{6x^2+5x-6}\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{4}{3}\right)}\geq 0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)\cup\{0\}\cup\left(\frac{4}{3};+\infty\right).$$



Логарифмические неравенства

4. Функции

$$f(x)=\log_a u(x)-\log_a v(x)\ ($$

$$\text{и }\ g(x)=u(x)-v(x),$$

$$\text{где } \mathrm{D}(\mathrm{g}):\begin{cases}u(x)>0,\\ v(x)>0.\end{cases}$$

- Действительно, очевидно, что области определения этих функций совпадают. Кроме того, при a>1 имеем:

$$\log_a u(x) - \log_a v(x) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u(x) \geq v(x), \\ u(x) > 0, \\ v(x) > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) - v(x) \geq 0, \\ u(x) > 0, \\ v(x) > 0. \end{cases}$$

Следовательно, для функций $f(x)$ и $g(x)$ при

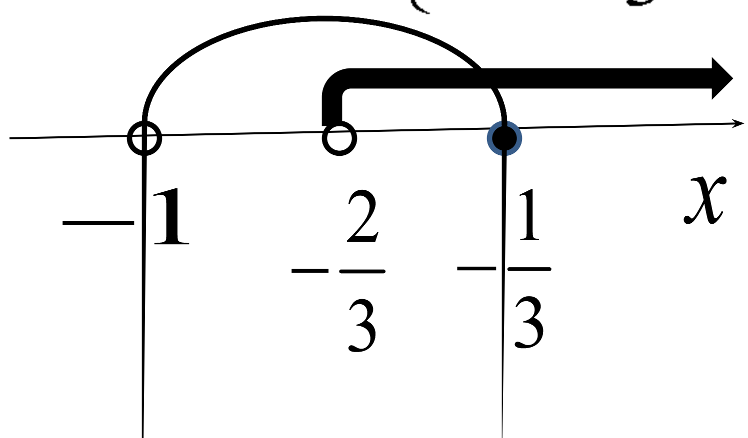
$\begin{cases} u(x) > 0, \\ v(x) > 0 \end{cases}$ выполнены условия утверждения.

Пример №4

$$\frac{\log_2(3x+2)}{\log_3(2x+3)} \le 0 \Leftrightarrow \frac{\log_2(3x+2)-\log_2 1}{\log_3(2x+3)-\log_3 1} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3x+2-1}{2x+3-1} \le 0, \\ x > -\dfrac{2}{3}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3x+1}{2x+2} \le 0, \\ x > -\dfrac{2}{3}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+\frac{1}{3}}{x+1} \le 0, \\ x > -\dfrac{2}{3}. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{3} < x \le -\frac{1}{3}.$$



Пример №5

$$\frac{\log_{0,2}\dfrac{1}{2x-1}+\log_5(2-x)}{\log_5(2x-1)+\log_{0,2}\dfrac{1}{3-2x}}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{\log_5(2x-1)+\log_5(2-x)}{\log_5(2x-1)+\log_5(3-2x)}\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\log_5\left(-2x^2+5x-2\right)}{\log_5\left(-4x^2+8x-3\right)}\ge 0, \\ \dfrac{1}{2}<x<\dfrac{3}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\log_5\left(-2x^2+5x-2\right)-\log_5 1}{\log_5\left(-4x^2+8x-3\right)-\log_5 1}\ge 0, \\ \dfrac{1}{2}<x<\dfrac{3}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow$$

Продолжение примера №5

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-2x^2+5x-3}{-4x^2+8x-4} \geq 0, \\ \dfrac{1}{2} < x < \dfrac{3}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x^2-5x+3}{x^2-2x+1} \geq 0, \\ \dfrac{1}{2} < x < \dfrac{3}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-1)\left(x-\dfrac{3}{2}\right)}{(x-1)^2} \geq 0, \\ \dfrac{1}{2} < x < \dfrac{3}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-\dfrac{3}{2}}{x-1} \geq 0, \\ \dfrac{1}{2} < x < \dfrac{3}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < 1.$$

Пример №6

$$\frac{\left(\log_2(2x+1)-\log_2(x+2)\right)\left(|x|-|x-2|\right)}{\sqrt{3x-2}-\sqrt{2x-1}}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\left((2x+1)-(x+2)\right)\left(x^2-(x-2)^2\right)}{(3x-2)-(2x-1)}\le 0, \\ x\ge \dfrac{2}{3}. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-1)\cdot 2\cdot 2(x-1)}{(x-1)}\le 0, \\ x\ge \dfrac{2}{3}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-1)^2}{(x-1)}\le 0, \\ x\ge \dfrac{2}{3}. \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{3}\le x<1.$$

Пример №7

$$\frac{\left|2x^2-11x+10\right|-x^2}{\left|6x^2-11x+4\right|-1}\geq 0,$$ т.к. $x^2=\left|x^2\right|$, а $1=\left|1\right|$, то имеем

$$\frac{\left|2x^2-11x+10\right|-\left|x^2\right|}{\left|6x^2-11x+4\right|-\left|1\right|}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{\left(2x^2-11x+10\right)^2-\left(x^2\right)^2}{\left(6x^2-11x+4\right)^2-1^2}\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x^2-11x+10\right)\left(3x^2-11x+10\right)}{\left(6x^2-11x+3\right)\left(6x^2-11x+5\right)}\geq 0 \Leftrightarrow$$

Продолжение примера №7

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-10)(x-2)\left(x-\frac{5}{3}\right)}{\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-1)\left(x-\frac{5}{6}\right)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-10)(x-2)\left(x-\frac{5}{3}\right)}{\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{5}{6}\right)} \geq 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup$$

$$\cup \left(\frac{5}{6}; 1\right) \cup \left(1; \frac{3}{2}\right) \cup \left[\frac{5}{3}; 2\right] \cup [10; +\infty).$$

Пример №8

$$\frac{\left|\left|x^2-x\right|-1\right|-1}{\left|\left|4x+3\right|-2\right|-1}\geq 0.$$

Воспользуемся дважды тем, что:

$$\frac{|f|-|g|}{|u|-|v|}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{f^2-g^2}{u^2-v^2}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{(f-g)(f+g)}{(u-v)(u+v)}\geq 0.$$

$$\frac{\left|\left|x^2-x\right|-1\right|-1}{\left|\left|4x+3\right|-2\right|-1}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{\left(\left|x^2-x\right|-2\right)\left(\left|x^2-x\right|-1+1\right)}{\left(\left|4x+3\right|-3\right)\left(\left|4x+3\right|-1\right)}\geq 0 \Leftrightarrow$$

Продолжение примера №8

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x^2-x-2\right)\left(x^2-x+2\right)\left|x^2-x\right|}{4x(4x+6)(4x+2)(4x+4)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-2)\left|x^2-x\right|}{x\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)(x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-2)\left|x^2-x\right|}{x\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)} \geq 0, \\ x \neq -1. \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup$$

$$\cup \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \{1\} \cup [2; +\infty).$$

Пример №9

При решении воспользуемся тождествами:

$$|a| = \sqrt{a^2}; \; a = \sqrt[3]{a^3}; \; |a|^2 = a^2.$$

$$\frac{|x+1| - \sqrt{5-2x-2x^2}}{\sqrt[3]{x^3+2x^2-5x+2} - x} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{|x+1|^2} - \sqrt{5-2x-2x^2}}{\sqrt[3]{x^3+2x^2-5x+2} - \sqrt[3]{x^3}} \le 0 \Leftrightarrow$$

Продолжение примера №9

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+2x+1-5+2x+2x^2}{x^3+2x^2-5x+2-x^3} \le 0, \\ 5-2x-2x^2 \ge 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3x^2+4x-4}{2x^2-5x+2} \le 0, \\ 2x^2+2x-5 \le 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+2)\left(x-\dfrac{2}{3}\right)}{(x-2)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)} \le 0, \\ \dfrac{-1-\sqrt{11}}{2} \le x \le \dfrac{-1+\sqrt{11}}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[-2; \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{2}{3}; \frac{-1+\sqrt{11}}{2}\right].$$

Пример №10 (из сборника для экзамена)

$$\frac{\log_3(10x+3)\cdot\log_3(3x+10)}{(\log_3 10x)\cdot\log_3 x}\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{(\log_3(10x+3)-\log_3 1)\cdot(\log_3(3x+10)-\log_3 1)}{(\log_3 10x-\log_3 1)\cdot(\log_3 x-\log_3 1)}\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{(10x+3-1)(3x+10-1)}{(10x-1)(x-1)}\geq 0,\\ x>0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{(10x+2)(3x+9)}{\left(x-\dfrac{1}{10}\right)(x-1)}\geq 0,\\ x>0.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\left(x+\dfrac{1}{5}\right)(x+3)}{\left(x-\dfrac{1}{10}\right)(x-1)}\geq 0,\\ x>0.\end{cases}\Leftrightarrow x\in(0;0,1)\cup(1;+\infty).$$