

МЕТОД ЗАМЕНЫ ФУНКЦИИ

Решение некоторых достаточно
сложных (хотя и стандартных)
неравенств

11 класс

О методе

- Приведенный метод решения неравенств позволяет решать их более компактно, а потому быстрее, что особенно актуально сейчас, когда в задании С3 в ЕГЭ необходимо решить неравенство повышенного уровня сложности.
- Представленный метод позволяет свести решение сложного, громоздкого неравенства к классическому (школьному) методу интервалов для многочленов.

ТЕОРИЯ

- Рассматриваемые методы решения достаточно эффективны при решении неравенств, левая часть которых представляет собой произведение (частное) двух функций указанных ниже видов, а правая часть равна нулю.
- Традиционные решения таких неравенств путем рассмотрения двух случаев (или применение обобщенного метода интервалов) оказываются более громоздкими по сравнению с методом замены функции.

УТВЕРЖДЕНИЕ

Если область определения, нули и промежутки знакопостоянства функции $f(x)$ соответственно совпадают с областью определения, нулями и промежутками знакопостоянства функции $g(x)$, то неравенства:

$$p(x) \{ f(x) (\geq 0) \} \Leftrightarrow p(x) \cdot g(x) \geq 0$$

равносильны.

Что это значит практически?

- Утверждение означает то, что если одна из функций $f(x)$ или $g(x)$ имеет более простой вид, то при решении неравенств указанного выше вида ее можно «**заменить**» на другую. Рассмотрим основные примеры таких пар функций.

Показательные неравенства

1. Функции

$$f(x) = a^{u(x)} - a^{v(x)}$$

(полагая для определенности $a > 1$)

$$\text{и } g(x) = u(x) - v(x)$$

(причем, $D(f)$ совпадает с $D(g)$)

- Действительно,
имеем:

$$\text{при } a > 1 \quad a^{u(x)} - a^{v(x)} \geq 0 \Leftrightarrow a^{u(x)} \geq a^{v(x)} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow u(x) \geq v(x) \Leftrightarrow u(x) - v(x) \geq 0,$$

т.е. для $f(x)$ и $g(x)$ выполнены условия утверждения.

Пример №1

$$\frac{4^{x^2+3x-2} - 0,5^{2x^2+2x-1}}{5^x - 1} \leq 0 \Leftrightarrow$$

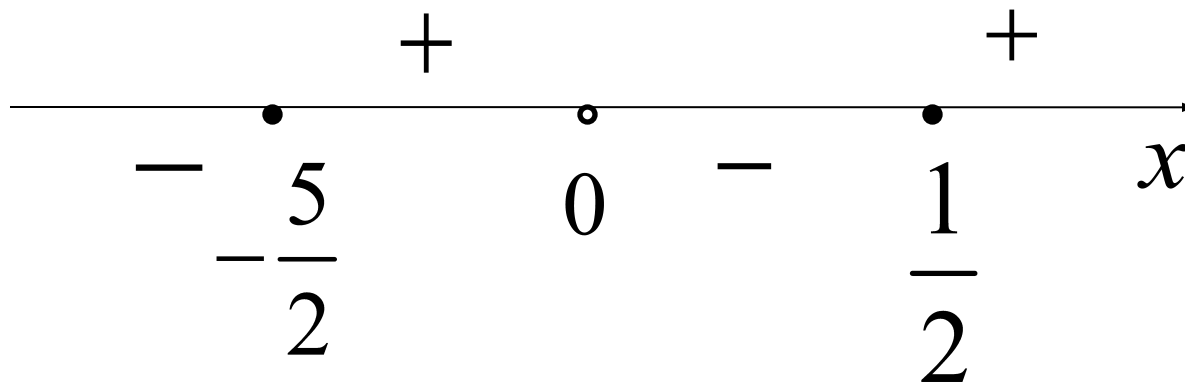
$$\Leftrightarrow \frac{2^{2x^2+6x-4} - 2^{-2x^2-2x+1}}{5^x - 5^0} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 + 6x - 4 - (-2x^2 - 2x + 1)}{x - 0} \leq 0 \Leftrightarrow$$

Продолжение примера №1

$$\Leftrightarrow \frac{4x^2 + 8x - 5}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\left(x + \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)}{x} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{5}{2}\right] \cup \left(0; \frac{1}{2}\right].$$



Неравенства с модулем

2. Функции

$$f(x) = |u(x)| - |v(x)| \quad (g(x) = u^2(x) - v^2(x))$$

(причем, $D(f)$ совпадает с $D(g)$)

Действительно,

имеем: $|u(x)| - |v(x)| \geq 0 \Leftrightarrow |u(x)| \geq |v(x)| \Leftrightarrow$

$$u^2(x) \geq v^2(x) \Leftrightarrow u^2(x) - v^2(x) \geq 0,$$

для $f(x)$ и $g(x)$ выполнены условия

утверждения.

Пример №2

$$\frac{|3x-2|-|2x-3|}{|x^2+x-8|-|x^2-x|} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(3x-2)^2-(2x-3)^2}{(x^2+x-8)^2-(x^2-x)^2} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(3x-2-2x+3)(3x-2+2x-3)}{(x^2+x-8-x^2+x)(x^2+x-8+x^2-x)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)(5x-5)}{(2x-8)(2x^2-8)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-1)}{(x-4)(x-2)(x+2)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty; -2) \cup [-1; 1] \cup (2; 4).$$

Иррациональные неравенства

3. Функции

$$f(x) \in \sqrt[n]{u(x)} \pm \sqrt[n]{v(x)}, \quad g(x) = u(x) - v(x)$$

$$\text{где } D(g) : \begin{cases} u(x) \geq 0, \\ v(x) \geq 0 \end{cases} \text{ при четном } n.$$

Очевидно, что при нечетном n утверждение справедливо. Кроме того, при четном n $D(f)$ совпадает с $D(g)$.

- Действительно, имеем:

$$\sqrt[n]{u(x)} - \sqrt[n]{v(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt[n]{u(x)} \geq \sqrt[n]{v(x)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u(x) \geq v(x), \\ u(x) \geq 0, \\ v(x) \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) - v(x) \geq 0, \\ u(x) \geq 0, \\ v(x) \geq 0. \end{cases}$$

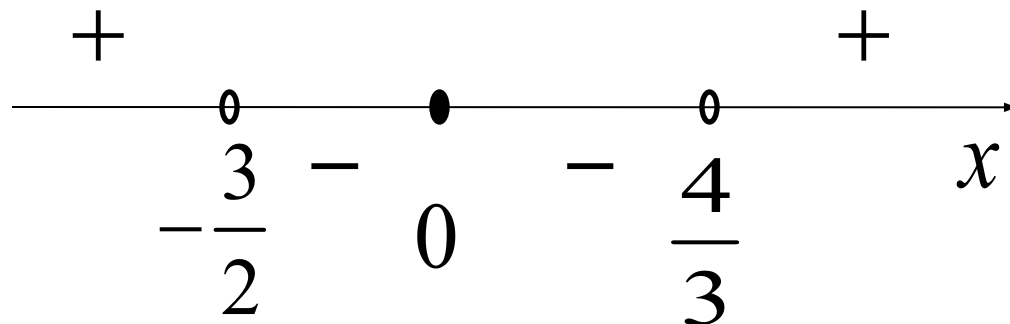
- Следовательно, при четном n для функций $f(x)$ и $g(x)$ также выполнены условия утверждения.

Пример №3

$$\frac{\sqrt{2x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1}}{\sqrt[3]{3x^2 + 4x - 2} + \sqrt[3]{3x^2 + x - 4}} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1}}{\sqrt[3]{3x^2 + 4x - 2} - \sqrt[3]{-3x^2 - x + 4}} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 + x + 1 - x^2 - x - 1}{3x^2 + 4x - 2 - (-3x^2 - x + 4)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{6x^2 + 5x - 6} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{\left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{4}{3}\right)} \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \{0\} \cup \left(\frac{4}{3}; +\infty\right).$$



Логарифмические неравенства

4. Функции

$$f(x) = \log_a u(x) - \log_a v(x) \quad (1)$$

$$\text{и } g(x) = u(x) - v(x),$$

$$\text{где } D(g) : \begin{cases} u(x) > 0, \\ v(x) > 0. \end{cases}$$

- Действительно, очевидно, что области определения этих функций совпадают. Кроме того, при $a > 1$ имеем:

$$\log_a u(x) - \log_a v(x) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u(x) \geq v(x), \\ u(x) > 0, \\ v(x) > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) - v(x) \geq 0, \\ u(x) > 0, \\ v(x) > 0. \end{cases}$$

Следовательно, для функций $f(x)$ и $g(x)$ при

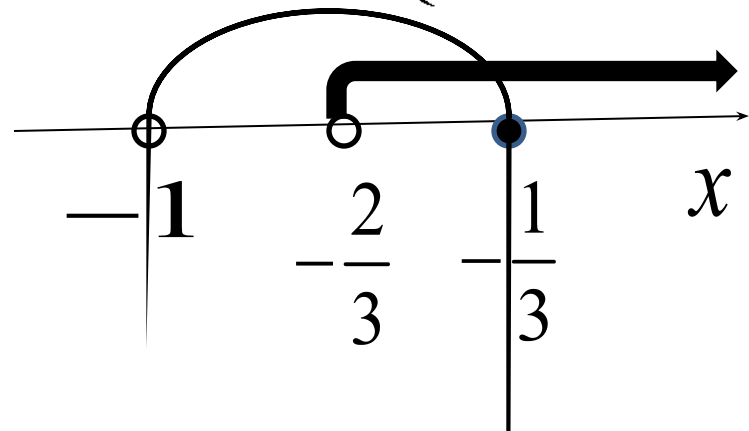
$$\begin{cases} u(x) > 0, \\ v(x) > 0 \end{cases} \text{ выполнены условия утверждения.}$$

Пример №4

$$\frac{\log_2(3x+2)}{\log_3(2x+3)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\log_2(3x+2) - \log_2 1}{\log_3(2x+3) - \log_3 1} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x+2-1}{2x+3-1} \leq 0, \\ x > -\frac{2}{3}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x+1}{2x+2} \leq 0, \\ x > -\frac{2}{3}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+\frac{1}{3}}{x+1} \leq 0, \\ x > -\frac{2}{3}. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{3} < x \leq -\frac{1}{3}.$$



Пример №5

$$\frac{\log_{0,2} \frac{1}{2x-1} + \log_5 (2-x)}{\log_5 (2x-1) + \log_{0,2} \frac{1}{3-2x}} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\log_5 (2x-1) + \log_5 (2-x)}{\log_5 (2x-1) + \log_5 (3-2x)} \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\log_5 (-2x^2 + 5x - 2)}{\log_5 (-4x^2 + 8x - 3)} \geq 0, \\ \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\log_5 (-2x^2 + 5x - 2) - \log_5 1}{\log_5 (-4x^2 + 8x - 3) - \log_5 1} \geq 0, \\ \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow$$

Продолжение примера №5

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-2x^2 + 5x - 3}{-4x^2 + 8x - 4} \geq 0, \\ \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 - 2x + 1} \geq 0, \\ \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-1)\left(x - \frac{3}{2}\right)}{(x-1)^2} \geq 0, \\ \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x - \frac{3}{2}}{x - 1} \geq 0, \\ \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < 1.$$

Пример №6

$$\frac{(\log_2(2x+1) - \log_2(x+2))(|x| - |x-2|)}{\sqrt{3x-2} - \sqrt{2x-1}} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{((2x+1) - (x+2))(x^2 - (x-2)^2)}{(3x-2) - (2x-1)} \leq 0, \\ x \geq \frac{2}{3}. \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{(x-1) \cdot 2 \cdot 2(x-1)}{(x-1)} \leq 0, \\ x \geq \frac{2}{3}. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{(x-1)^2}{(x-1)} \leq 0, \\ x \geq \frac{2}{3}. \end{array} \right. \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq x < 1.$$

Пример №7

$$\frac{|2x^2 - 11x + 10| - x^2}{|6x^2 - 11x + 4| - 1} \geq 0, \text{к.} \quad x^2 = |x^2| \text{ а } 1 = 1, \text{ где имеем}$$

$$\frac{|2x^2 - 11x + 10| - |x^2|}{|6x^2 - 11x + 4| - |1|} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(2x^2 - 11x + 10)^2 - (x^2)^2}{(6x^2 - 11x + 4)^2 - 1^2} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2 - 11x + 10)(3x^2 - 11x + 10)}{(6x^2 - 11x + 3)(6x^2 - 11x + 5)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

Продолжение примера №7

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-10)(x-2)\left(x-\frac{5}{3}\right)}{\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-1)\left(x-\frac{5}{6}\right)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-10)(x-2)\left(x-\frac{5}{3}\right)}{\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{5}{6}\right)} \geq 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup$$

$$\cup \left(\frac{5}{6}; 1\right) \cup \left(1; \frac{3}{2}\right) \cup \left[\frac{5}{3}; 2\right] \cup [10; +\infty).$$

Пример №8

$$\frac{||x^2 - x| - 1| - 1}{||4x + 3| - 2| - 1} \geq 0.$$

Воспользуемся дважды тем, что:

$$\frac{|f| - |g|}{|u| - |v|} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{f^2 - g^2}{u^2 - v^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(f - g)(f + g)}{(u - v)(u + v)} \geq 0.$$

$$\frac{||x^2 - x| - 1| - 1}{||4x + 3| - 2| - 1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(|x^2 - x| - 2)(|x^2 - x| - 1 + 1)}{(|4x + 3| - 3)(|4x + 3| - 1)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

Продолжение примера №8

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2 - x - 2)(x^2 - x + 2)|x^2 - x|}{4x(4x + 6)(4x + 2)(4x + 4)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x + 1)(x - 2)|x^2 - x|}{x\left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)(x + 1)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x - 2)|x^2 - x|}{x\left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)} \geq 0, \\ x \neq -1. \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup$$

$$\cup \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \{1\} \cup [2; +\infty).$$

Пример №9

При решении воспользуемся тождествами:

$$|a| = \sqrt{a^2}; \quad a = \sqrt[3]{a^3}; \quad |a|^2 = a^2.$$

$$\frac{|x+1| - \sqrt{5-2x-2x^2}}{\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 - 5x + 2} - x} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{|x+1|^2} - \sqrt{5-2x-2x^2}}{\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 - 5x + 2} - \sqrt[3]{x^3}} \leq 0 \Leftrightarrow$$

Продолжение примера №9

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 + 2x + 1 - 5 + 2x + 2x^2}{x^3 + 2x^2 - 5x + 2 - x^3} \leq 0, \\ 5 - 2x - 2x^2 \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x^2 + 4x - 4}{2x^2 - 5x + 2} \leq 0, \\ 2x^2 + 2x - 5 \leq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+2)\left(x-\frac{2}{3}\right)}{(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)} \leq 0, \\ \frac{-1-\sqrt{11}}{2} \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{11}}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[-2; \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{2}{3}; \frac{-1+\sqrt{11}}{2}\right].$$

Пример №10 (из сборника для экзамена)

$$\frac{\log_3(10x+3) \cdot \log_3(3x+10)}{(\log_3 10x) \cdot \log_3 x} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\log_3(10x+3) - \log_3 1) \cdot (\log_3(3x+10) - \log_3 1)}{(\log_3 10x - \log_3 1) \cdot (\log_3 x - \log_3 1)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(10x+3-1)(3x+10-1)}{(10x-1)(x-1)} \geq 0, \\ x > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(10x+2)(3x+9)}{\left(x - \frac{1}{10}\right)(x-1)} \geq 0, \\ x > 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\left(x + \frac{1}{5}\right)(x+3)}{\left(x - \frac{1}{10}\right)(x-1)} \geq 0, \\ x > 0. \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; 0,1) \cup (1; +\infty).$$