

Урок итогового
повторения.

*Показательная функция.
Решение показательных
уравнений и неравенств.*

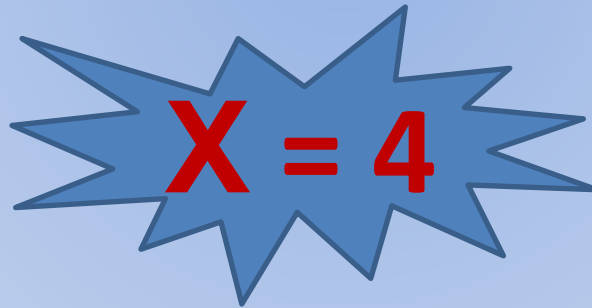
*Цели урока: способствовать
выработке навыка решения
показательных уравнений и
неравенств. Систематизировать
знания по данной теме.*

Повторение изученного материала.

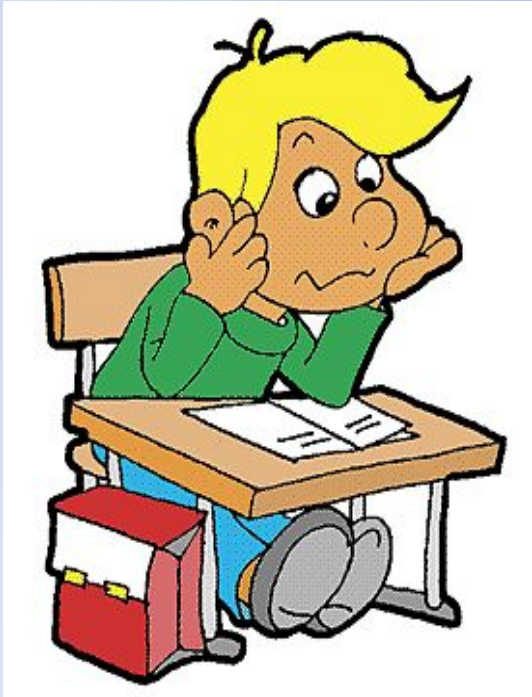
1. Дайте определение показательной функции.
2. Перечислите основные свойства показательной функции.
3. Изобразите схематически графики функций:
 $y = 4^x$, $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$, $y = 6^x$, $y = \left(\frac{1}{6}\right)^x$
4. Как используются свойства показательной функции при решении показательных уравнений и неравенств.

Решите уравнение

$$2^x + 3 \cdot 2^{x-3} = 22$$



X = 4

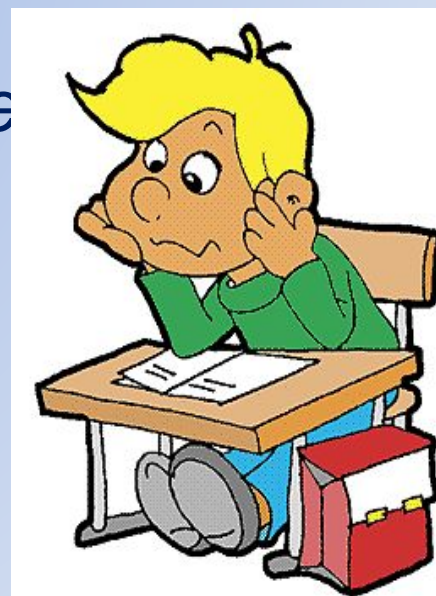


Решите уравнение

$$2^{|x-1|} = 16 \cdot 4^{-0.5}$$

Алгоритм решения:

1. Получим степени с основаниям 2.
2. Используя свойства степени, упростим выражение.
3. Перейдем к равенству показателей степени.
4. Решим уравнение с модулем.
5. Запишем ответ.



$$2^{|x-1|} = 16 \cdot 4^{-0.5}$$

$$2^{|x-1|} = 2^4 \cdot 2^{-1}$$

$$2^{|x-1|} = 2^3$$

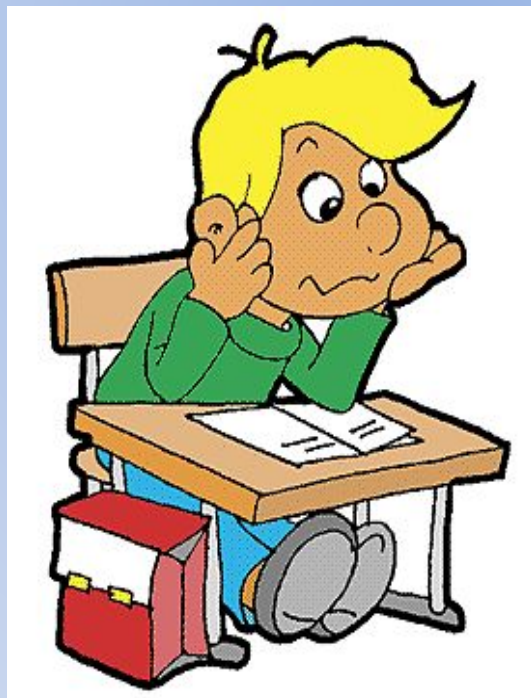
$$|x - 1| = 3$$

$$x - 1 \geq 0$$

$$x - 1 = 3$$

$$x = 4$$

Ответ: -2; 4



$$x - 1 < 0$$

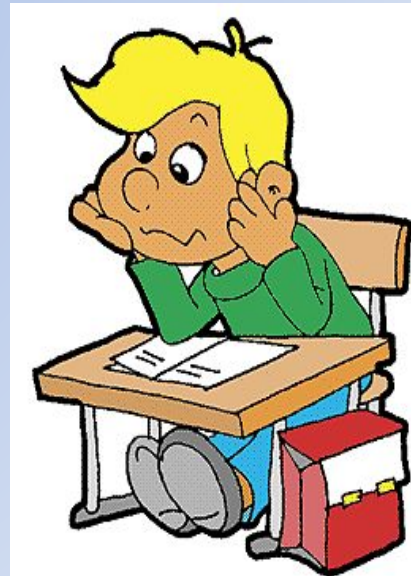
$$x - 1 = -3$$

$$x = -2$$

$$2^{\sqrt{x}} - 2^{1-\sqrt{x}} = 1$$

Алгоритм решения:

1. Найти ОДЗ.
2. Ввести замену $\sqrt{x} = y$
3. Решить полученное уравнение, найти y .
4. Вернуться к замене, решить уравнения относительно x .
5. Записать ответ.



$$2^{\sqrt{x}} - 2^{1-\sqrt{x}} = 1$$

Решение: ОДЗ: $x \geq 0$

Замена $2^{\sqrt{x}} = y$, где $y > 0$. Получаем уравнение

$y - \frac{2}{y} = 1$. Решаем данное уравнение и получаем

$y = -1$ и $y = 2$.

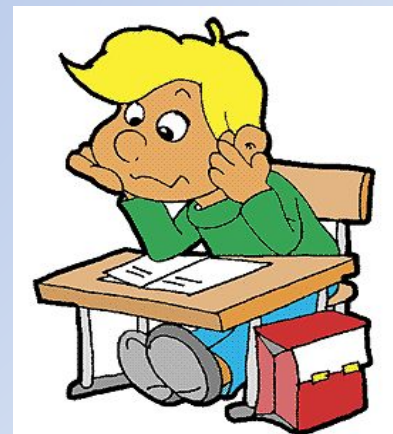
$$2^{\sqrt{x}} = -1$$

Решений нет

$$2^{\sqrt{x}} = 2$$

$$x = 1$$

Ответ: $x = 1$

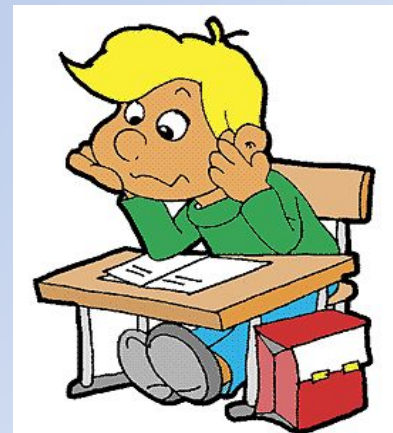


$$4^x + 5^{2x+1} = 6 \cdot 10^x$$

Алгоритм решения:

1. Разделим обе части уравнения на $4^x \neq 0$.
2. Получим равносильное уравнение.
3. Введем замену $\left(\frac{5}{2}\right)^x = y$
4. Решим полученное квадратное уравнение.
5. Вернемся к замене, решим уравнения относительно x .
6. Запишем ответ.

$$0; \log_{\frac{2}{5}} 5$$

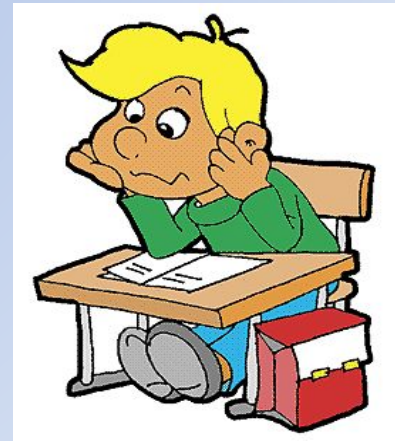


Самостоятельно решите:

$$3 \cdot 16^x + 36^x = 2 \cdot 81^x$$

$$9^x - 2 \cdot 3^x - 63 = 0$$

$$2^{5x+6} - 7^{5x+2} - 2^{5x+3} - 7^{5x+1} = 0$$



Проверь решение

$$3 \cdot 16^x + 36^x = 2 \cdot 81^x \quad \div : 81^x \neq 0$$

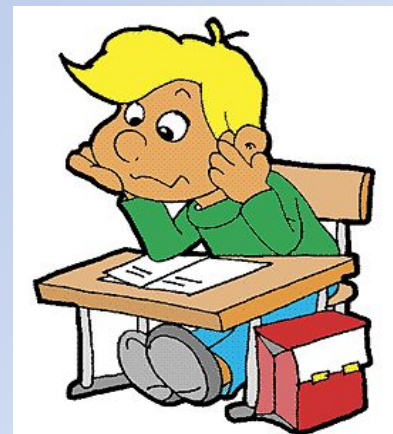
$$3 \cdot \left(\frac{16}{81}\right)^x + \left(\frac{36}{81}\right)^x = 2$$

$$3 \cdot \left(\frac{16}{81}\right)^x + \left(\frac{4}{9}\right)^x = 2, \quad \left(\frac{4}{9}\right)^x = y > 0$$

$$3y^2 + y - 2 = 0, \quad y_1 = -1, \quad y_2 = \frac{2}{3}$$

$$\left(\frac{4}{9}\right)^x = \frac{2}{3}; \quad 2x = 1; \quad x = \frac{1}{2}$$

Ответ: $x = \frac{1}{2}$



Проверь решение

$$9^x - 2 \cdot 3^x - 63 = 0$$

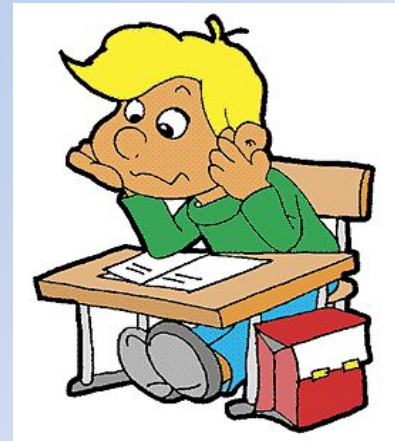
$$3^{2x} - 2 \cdot 3^x - 63 = 0; \quad 3^x = y > 0$$

$$y^2 - 2y - 63 = 0; \quad y_1 = 9; \quad y_2 = -7;$$

$$3^x = 9$$

$$x = 2$$

Ответ: $x = 2$



Проверь решение

$$2^{5x+6} - 7^{5x+2} - 2^{5x+3} - 7^{5x+1} = 0$$

$$2^{5x+6} - 2^{5x+3} = 7^{5x+2} + 7^{5x+1}$$

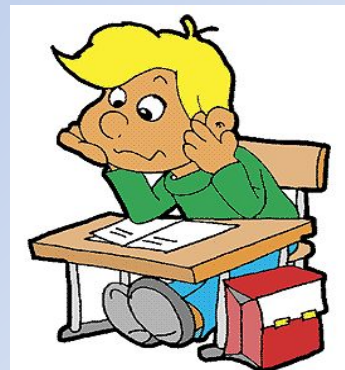
$$2^{5x+1} \cdot (2^5 - 2^2) = 7^{5x+1} \cdot (7 + 1)$$

$$2^{5x+1} \cdot 28 = 7^{5x+1} \cdot 8 : : 7^{5x+1}$$

$$\left(\frac{2}{7}\right)^{5x+1} = \frac{8}{28}; \quad \left(\frac{2}{7}\right)^{5x+1} = \frac{2}{7}$$

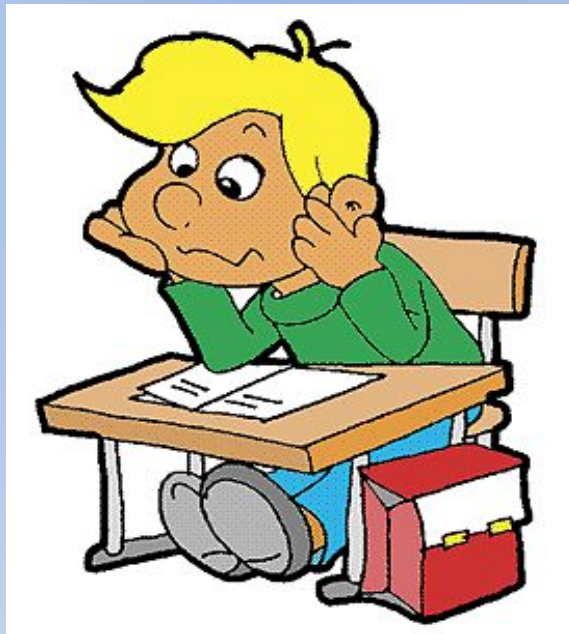
$$5x + 1 = 1; \quad 5x = 0; \quad x = 0$$

Ответ: $x = 0$



Решите уравнение

$$(4 + \sqrt{15})^x + (4 - \sqrt{15})^x = 62$$





Решение:

Заметим, что $(4 + \sqrt{15})^x \cdot (4 - \sqrt{15})^x = 1$

Введем замену

$$(4 + \sqrt{15})^x = y$$

Получим уравнение

Решим данное

уравнение и получим

$$y + \frac{1}{y} = 62$$

$$y_{1,2} = 31 \pm 8\sqrt{15}$$

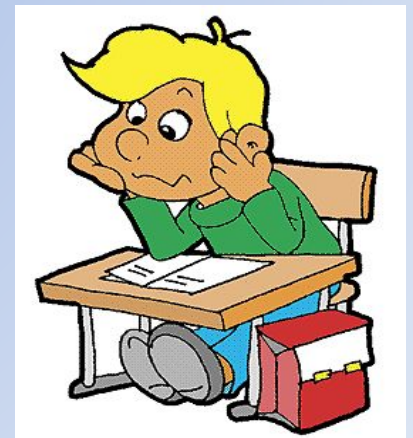
Решение:

Получаем два уравнения

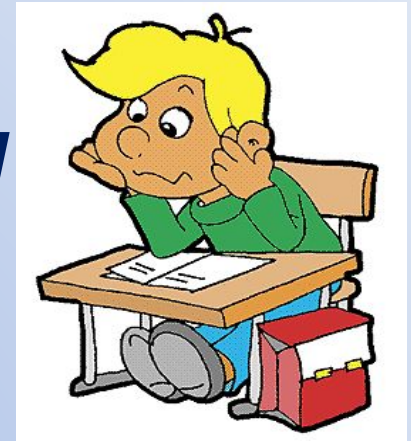
$$(4 + \sqrt{15})^x = 31 + 8\sqrt{15} \text{ и } (4 + \sqrt{15})^x = 31 - 8\sqrt{15}$$

Решаем первое уравнение

$$\begin{aligned} (4 + \sqrt{15})^x &= 31 + 8\sqrt{15} = 16 + 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{15} + 15 = \\ &= (4 + \sqrt{15})^2 \Rightarrow x = 2 \end{aligned}$$



Решаем второе уравнен



$$(4 + \sqrt{15})^x = 31 - 8\sqrt{15}$$

$$\begin{aligned}(4 + \sqrt{15})^x &= \frac{1}{(4 - \sqrt{15})^x} = (4 - \sqrt{15})^{-x} = \\ &= 31 - 8\sqrt{15} = 16 - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{15} + 15 = \\ &= (4 - \sqrt{15})^2\end{aligned}$$

$$(4 - \sqrt{15})^{-x} = (4 - \sqrt{15})^2 \Rightarrow -x = 2 \Rightarrow x = -2$$

Ответ: $x_1 = 2$; $x_2 = -2$

Решите неравенство:

$$4^x - 3 \cdot 2^x - 4 < 0$$

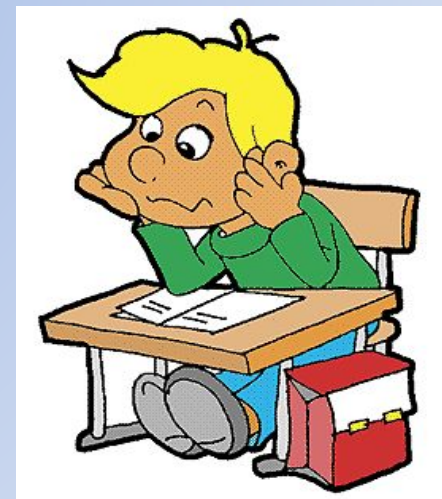
$$3^{x+1} \cdot 2^{1-x} + 3^3 \cdot 2^{-x} < 10,5$$

$$2^{2x+2} > 6^x + 2 \cdot 3^{2x+2}$$

$$2^{2x+1} - 21 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3} + 2 \geq 0$$

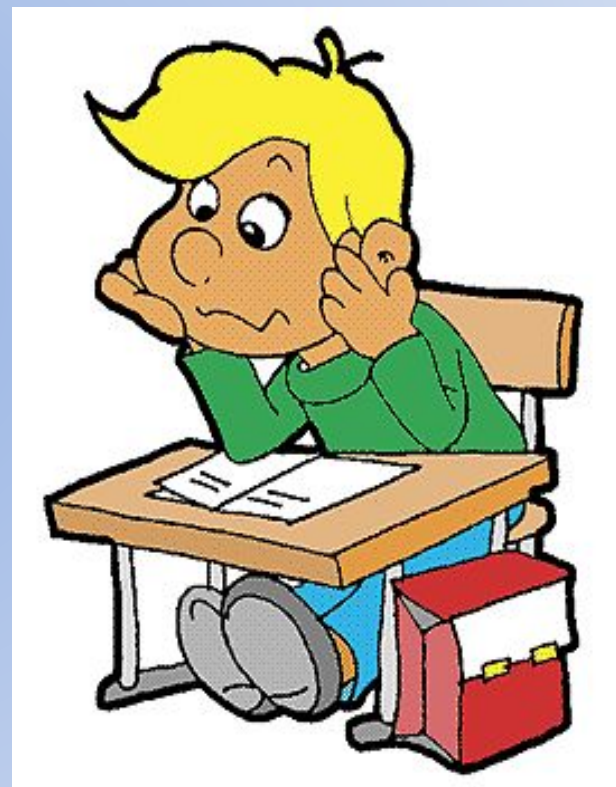
$$\left(\frac{1}{4}\right)^x - 2^{1-x} - 8 < 0$$

$$1,3^{x^2-4x+2} \leq 1,69$$



Ответы к неравенствам

1. $x \in (-\infty; 2)$
2. $x \in (-\infty; 1)$
3. $x \in (-\infty; -2)$
4. $x \in \left[\frac{1}{2} \log_2 \frac{3}{4}; \infty\right)$
5. $x \in (-2; \infty)$
6. $x \in [0; 4]$



$$3^{x+1} \cdot 2^{1-x} + 3^3 \cdot 2^{-x} < 10,5$$

Решение:

$$\frac{3^x \cdot 3 \cdot 2}{2^x} + \frac{3^x}{2^x} < \frac{21}{2}$$

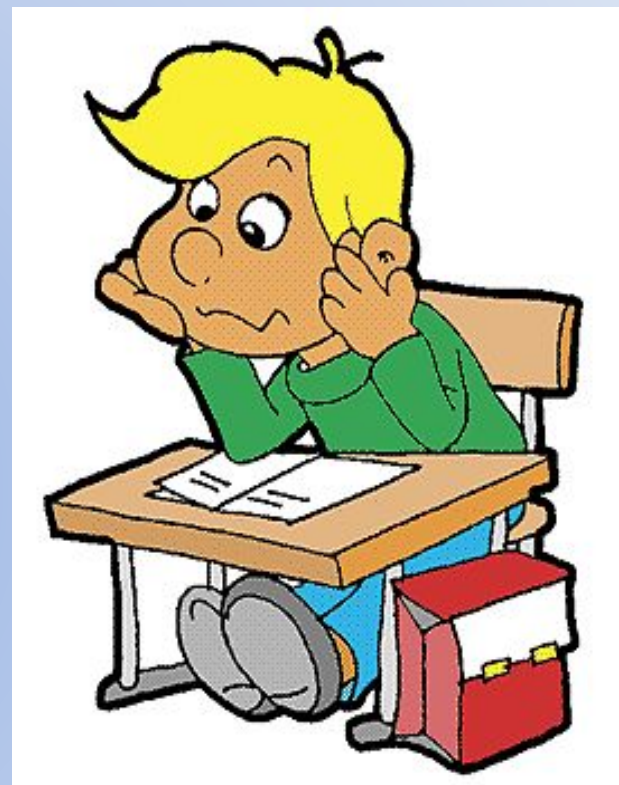
$$\frac{7 \cdot 3^x}{2^x} < \frac{21}{2}$$

$$\frac{3^x}{2^x} < \frac{3}{2}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x < \frac{3}{2}; y = a^x \text{ возрастающая}$$

$$x < 1;$$

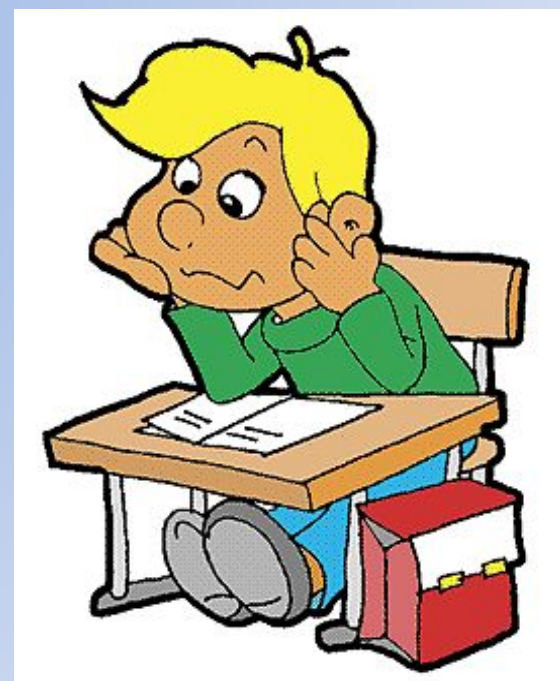
ответ: $x \in (-\infty; 1)$



$$2^{2x+2} > 6^x + 2 \cdot 3^{2x+2}$$

Подсказка

*Поделить обе части неравенства на 3^{2x} и
сделать замену $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$, где $y > 0$*



$$2^{2x+1} - 21 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3} + 2 \geq 0$$

Решение: введем замену $y = 2^{2x+1}$, $y > 0$,
переходим к системе

$$\begin{cases} y - \frac{21}{4y} + 2 \geq 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y^2 + 8y - 21 \geq 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \leq -\frac{7}{2} \text{ или } y \geq \frac{3}{2} \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow y \geq \frac{3}{2}$$

Переходим к переменной x

$$2^{2x+1} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2^{2x} \geq \frac{3}{4}$$

Так как $y = 2^t$ возрастающая функция, то

$$2x \geq \log_2 \frac{3}{4}$$

$$x \geq \frac{1}{2} \log_2 \frac{3}{4}$$

ответ: $x \in \left[\frac{1}{2} \log_2 \frac{3}{4}; \infty \right)$