<u>Урок итогового повторения.</u> Показательная функция. Решение показательных уравнений и неравенств.

Цели урока: способствовать выработке навыка решения показательных уравнений и неравенств. Систематизировать знания по данной теме.

Повторение изученного материала.

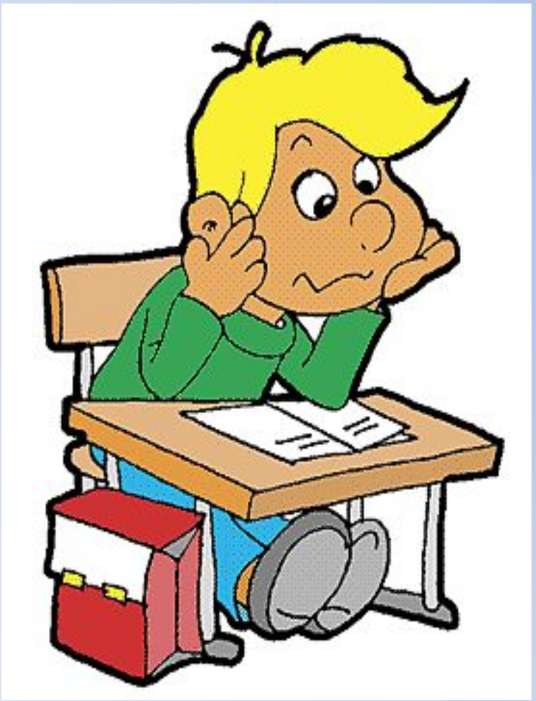
1. Дайте определение показательной функции.
2. Перечислите основные свойства показательной функции.
3. Изобразите схематически графики функций:

   $y = 4^x;\ y = \left(\frac{1}{4}\right)^x;\ y = 6^x;\ y = \left(\frac{1}{6}\right)^x$

4. Как используются свойства показательной функции при решении показательных уравнений и неравенств.

Решите уравнение

$$2^x + 3 \cdot 2^{x-3} = 22$$



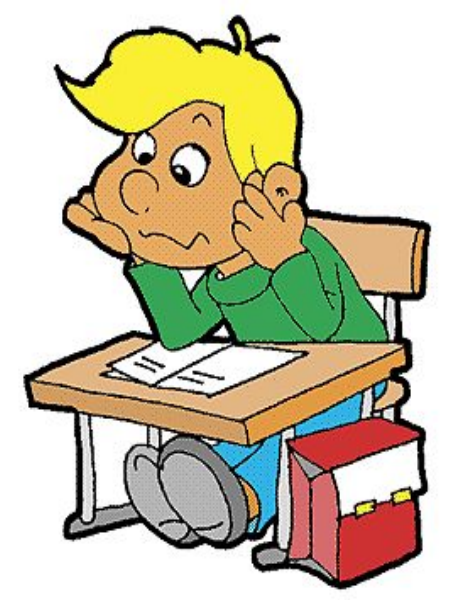
X = 4

Решите уравнение

$$2^{|x-1|} = 16 \cdot 4^{-0.5}$$

Алгоритм решения:

1. Получим степени с основаниям 2.
2. Используя свойства степени, упростим выражение.
3. Перейдем к равенству показателе степени.
4. Решим уравнение с модулем.
5. Запишем ответ.



$$2^{|x-1|} = 16 \cdot 4^{-0.5}$$

$$2^{|x-1|} = 2^4 \cdot 2^{-1}$$

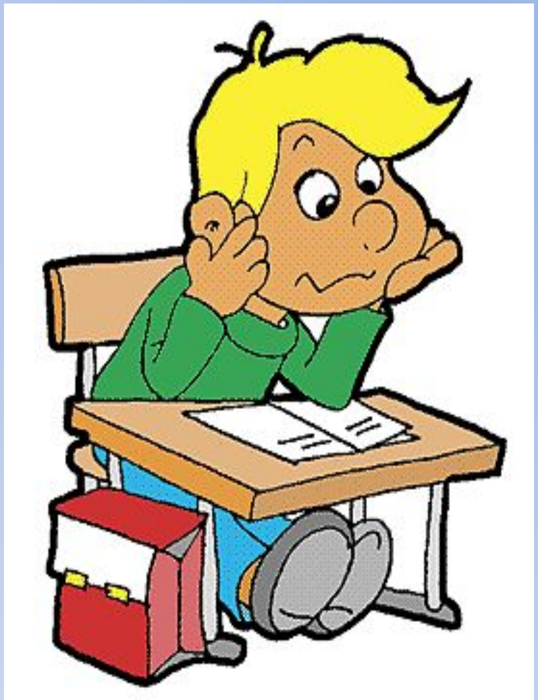
$$2^{|x-1|} = 2^3$$

$$|x-1| = 3$$

$x - 1 \geq 0$

$x - 1 = 3$

$x = 4$



$x - 1 < 0$

$x - 1 = -3$

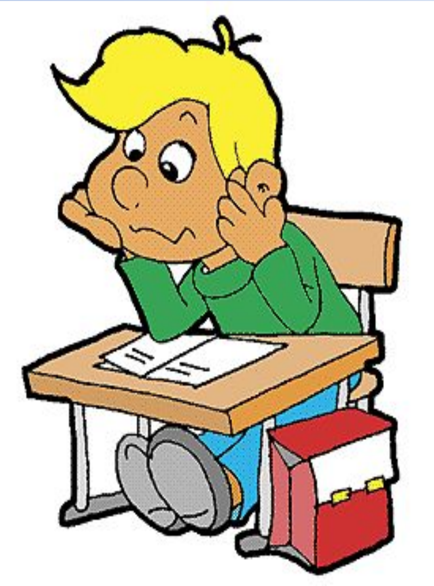
$x = -2$

Ответ: -2; 4

$$2^{\sqrt{x}} - 2^{1-\sqrt{x}} = 1$$

<u>Алгоритм решения:</u>

1. Найти ОДЗ.
2. Ввести замену $2^{\sqrt{x}} = y$
3. Решить полученное уравнение, найти у.
4. Вернуться к замене, решить уравнения относительно х.
5. Записать ответ.



$$2^{\sqrt{x}} - 2^{1-\sqrt{x}} = 1$$

Решение: ОДЗ: $x \geq 0$

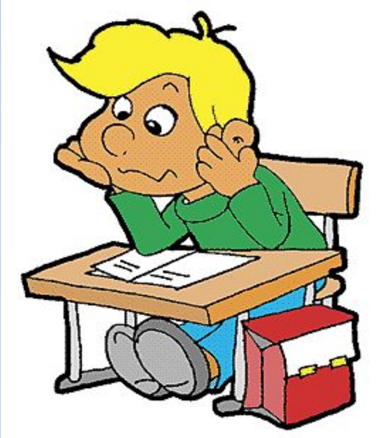
Замена $2^{\sqrt{x}} = y$, где $y > 0$. Получаем уравнение

$y - \frac{2}{y} = 1$. *Решаем данное уравнение и получаем*

y = - 1 и y = 2.

$2^{\sqrt{x}} = -1$ $2^{\sqrt{x}} = 2$

Решений нет *x = 1*

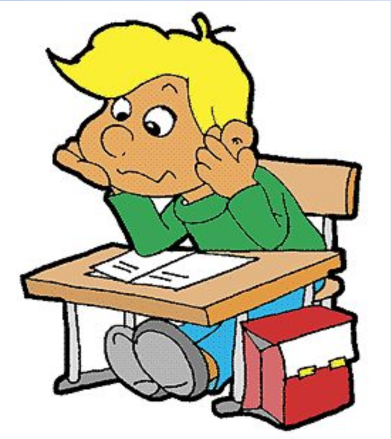


Ответ: x = 1

$$4^x + 5^{2x+1} = 6 \cdot 10^x$$

Алгоритм решения:

1. Разделим обе части уравнения на $4^x \neq 0$.
2. Получим равносильное уравнение.
3. Введем замену $\left(\frac{5}{2}\right)^x = y$
4. Решим полученное квадратное уравнение.
5. Вернемся к замене, решим уравнения относительно x.
6. Запишем ответ. $0; \log_{\frac{2}{5}} 5$

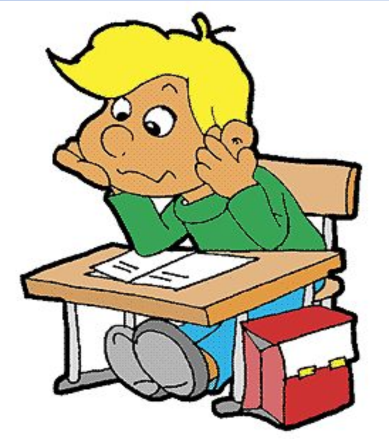


Самостоятельно решите:

$$3 \cdot 16^x + 36^x = 2 \cdot 81^x$$

$$9^x - 2 \cdot 3^x - 63 = 0$$

$$2^{5x+6} - 7^{5x+2} - 2^{5x+3} - 7^{5x+1} = 0$$



Проверь решение

$$3 \cdot 16^x + 36^x = 2 \cdot 81^x \; \vdots \quad : 81^x \neq 0$$

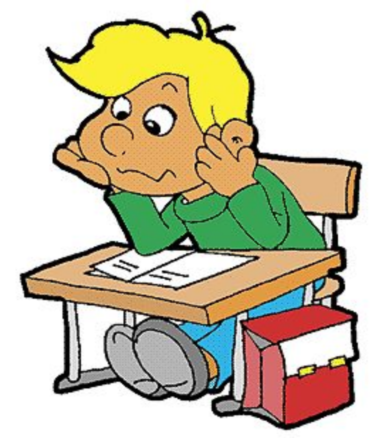
$$3 \cdot \left(\frac{16}{81}\right)^x + \left(\frac{36}{81}\right)^x = 2$$

$$3 \cdot \left(\frac{16}{81}\right)^x + \left(\frac{4}{9}\right)^x = 2, \quad \left(\frac{4}{9}\right)^x = y > 0$$

$$3y^2 + y - 2 = 0, y_1 = -1, y_2 = \frac{2}{3}$$

$$\left(\frac{4}{9}\right)^x = \frac{2}{3}; \quad 2x = 1; \quad x = \frac{1}{2}$$

Ответ: $x = \frac{1}{2}$



Проверь решение

$$9^x - 2 \cdot 3^x - 63 = 0$$

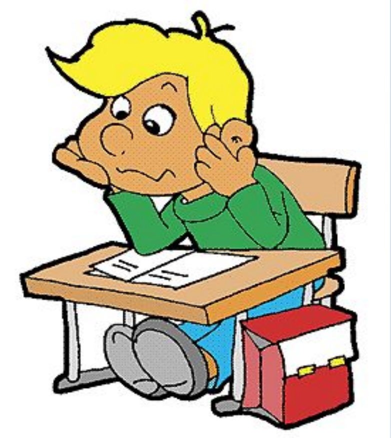
$$3^{2x} - 2 \cdot 3^x - 63 = 0; \quad 3^x = y > 0$$

$$y^2 - 2y - 63 = 0; y_1 = 9; y_2 = -7;$$

$$3^x = 9$$

$$x = 2$$

Ответ: x = 2



Проверь решение

$$2^{5x+6} - 7^{5x+2} - 2^{5x+3} - 7^{5x+1} = 0$$

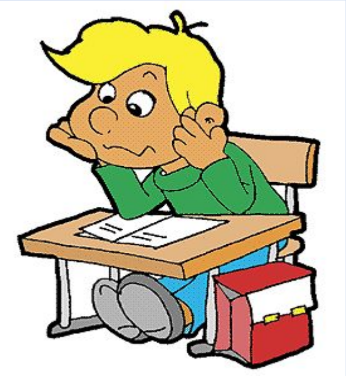
$$2^{5x+6} - 2^{5x+3} = 7^{5x+2} + 7^{5x+1}$$

$$2^{5x+1} \cdot \left(2^5 - 2^2\right) = 7^{5x+1} \cdot (7 + 1)$$

$$2^{5x+1} \cdot 28 = 7^{5x+1} \cdot 8 \,| : 7^{5x+1}$$

$$\left(\frac{2}{7}\right)^{5x+1} = \frac{8}{28}; \quad \left(\frac{2}{7}\right)^{5x+1} = \frac{2}{7}$$

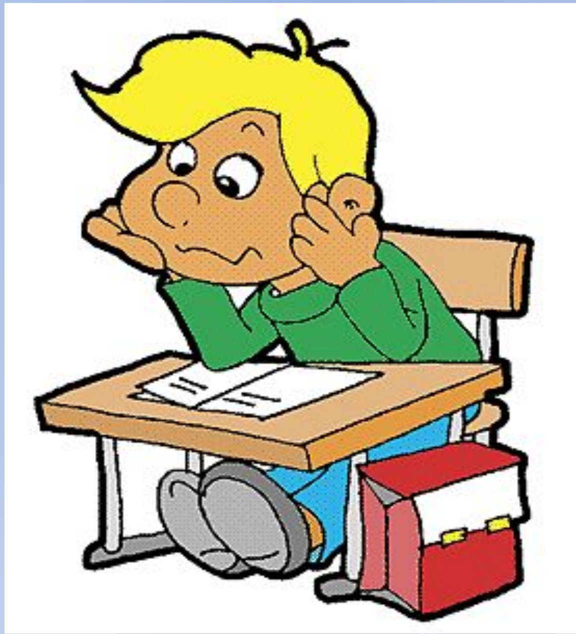
$$5x + 1 = 1; \quad 5x = 0; \quad x = 0$$



Ответ: x = 0

Решите уравнение

$$\left(4+\sqrt{15}\right)^{x}+\left(4-\sqrt{15}\right)^{x}=62$$



Решение:

Заметим, что $\left(4+\sqrt{15}\right)^{x}\cdot\left(4-\sqrt{15}\right)^{x}=1$

Введем замену $\left(4+\sqrt{15}\right)^{x}=y$

Получим уравнение

Решим данное уравнение и получим

$$y+\frac{1}{y}=62$$

$$y_{1,2}=31\pm8\sqrt{15}$$

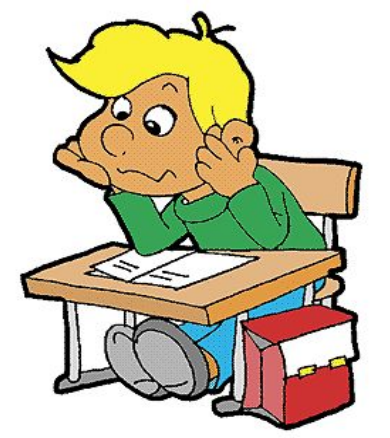
Решение:

Получаем два уравнения

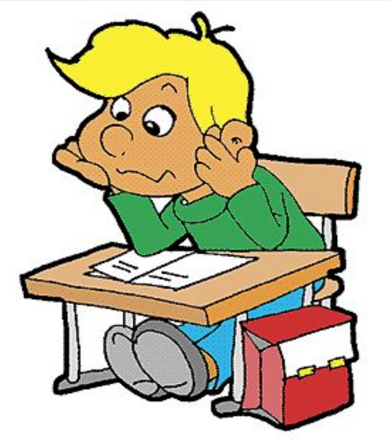
$\left(4+\sqrt{15}\right)^{x}=31+8\sqrt{15}$ *и* $\left(4+\sqrt{15}\right)^{x}=31-8\sqrt{15}$

Решаем первое уравнение

$$\left(4+\sqrt{15}\right)^{x}=31+8\sqrt{15}=16+2\cdot 4\cdot\sqrt{15}+15=$$
$$=\left(4+\sqrt{15}\right)^{2}\Rightarrow x=2$$



Решаем второе уравнен



$$\left(4+\sqrt{15}\right)^{x} = 31 - 8\sqrt{15}$$

$$\left(4+\sqrt{15}\right)^{x} = \frac{1}{\left(4-\sqrt{15}\right)^{x}} = \left(4-\sqrt{15}\right)^{-x} =$$

$$= 31 - 8\sqrt{15} = 16 - 2\cdot 4\cdot\sqrt{15} + 15 =$$

$$= \left(4-\sqrt{15}\right)^{2}$$

$$\left(4-\sqrt{15}\right)^{-x} = \left(4-\sqrt{15}\right)^{2} \Rightarrow -x = 2 \Rightarrow x = -2$$

Ответ: $x_1 = 2;\ x_2 = -2$

Решите неравенство:

$$4^x - 3 \cdot 2^x - 4 < 0$$

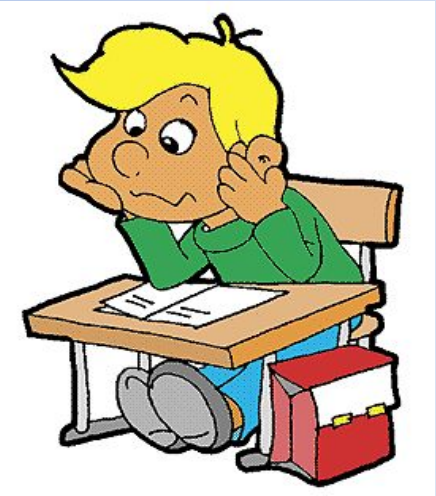
$$3^{x+1} \cdot 2^{1-x} + 3^3 \cdot 2^{-x} < 10{,}5$$

$$2^{2x+2} > 6^x + 2 \cdot 3^{2x+2}$$

$$2^{2x+1} - 21 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3} + 2 \geq 0$$

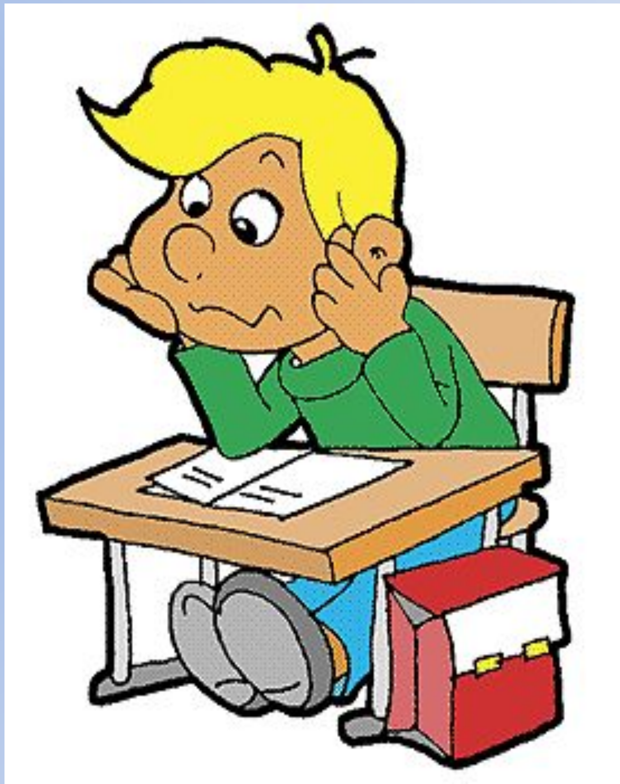
$$\left(\frac{1}{4}\right)^x - 2^{1-x} - 8 < 0$$

$$1{,}3^{x^2-4x+2} \leq 1{,}69$$



Ответы к неравенствам

1. $x \in (-\infty; 2)$
2. $x \in (-\infty; 1)$
3. $x \in (-\infty; -2)$
4. $x \in \left[\frac{1}{2}\log_2 \frac{3}{4}; \infty\right)$
5. $x \in (-2; \infty)$
6. $x \in [0; 4]$



$$3^{x+1} \cdot 2^{1-x} + 3^3 \cdot 2^{-x} < 10,5$$

Решение:

$$\frac{3^x \cdot 3 \cdot 2}{2^x} + \frac{3^x}{2^x} < \frac{21}{2}$$

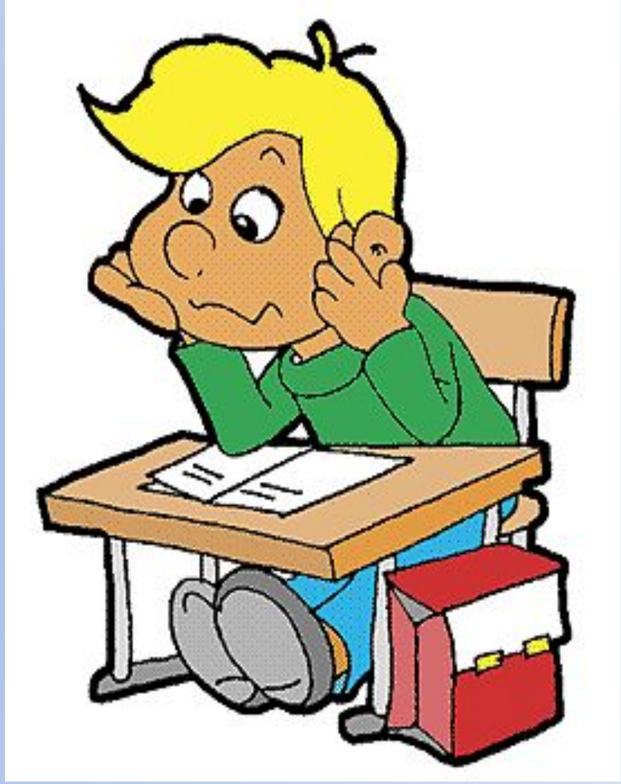
$$\frac{7 \cdot 3^x}{2^x} < \frac{21}{2}$$

$$\frac{3^x}{2^x} < \frac{3}{2}$$

$\left(\frac{3}{2}\right)^x < \frac{3}{2}$; $y = a^x$ ***возрастающая***

$x < 1;$

ответ: $x \in (-\infty; \mathbf{1})$

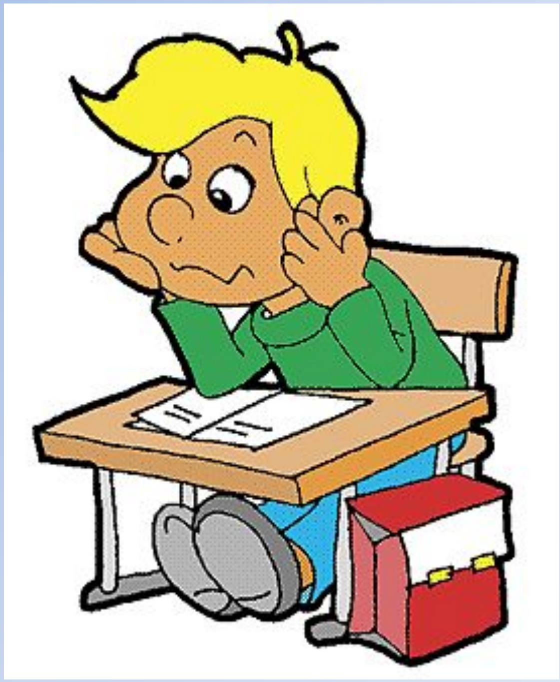


$$2^{2x+2} > 6^{x} + 2 \cdot 3^{2x+2}$$

Подсказка

Поделить обе части неравенства на 3^{2x} *и*

сделать замену $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{x}$*, где* $y > 0$



$$2^{2x+1} - 21 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3} + 2 \geq 0$$

Решение: введем замену $y = 2^{2x+1}, y > 0,$

переходим к системе

$$\begin{cases} y - \frac{21}{4y} + 2 \geq 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y^2 + 8y - 21 \geq 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \leq -\frac{7}{2} \text{ или } y \geq \frac{3}{2} \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow y \geq \frac{3}{2}$$

Переходим к переменной х

$$\mathbf{2^{2x+1} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2^{2x} \geq \frac{3}{4}}$$

Так как $y = 2^t$ *возрастающая функция, то*

$$2x \geq \log_2 \frac{3}{4}$$

$$x \geq \frac{1}{2} \log_2 \frac{3}{4}$$

ответ: $x \in \left[\frac{1}{2} \log_2 \frac{3}{4};\ \infty\right)$