

Муниципальное общеобразовательное учреждение
Гимназии №2 «Квантор».
Секция математики.

Проект по алгебре.

Тема:

«Эффективные пути решения неравенств. Метод замены множителей».

Разработчики:

Марченко А. Д.

Коршакова А. О.

Учитель:

Зайцева Е. В.

г. Коломна

2008 год

Эффективные пути решений неравенств. Метод замены множителей.

Все неравенства с одной переменной, которые рассматриваются в школе или предлагаются в конкурсных заданиях вступительных экзаменов, имеют одну и ту же структуру ответа промежутков или объединение промежутков.

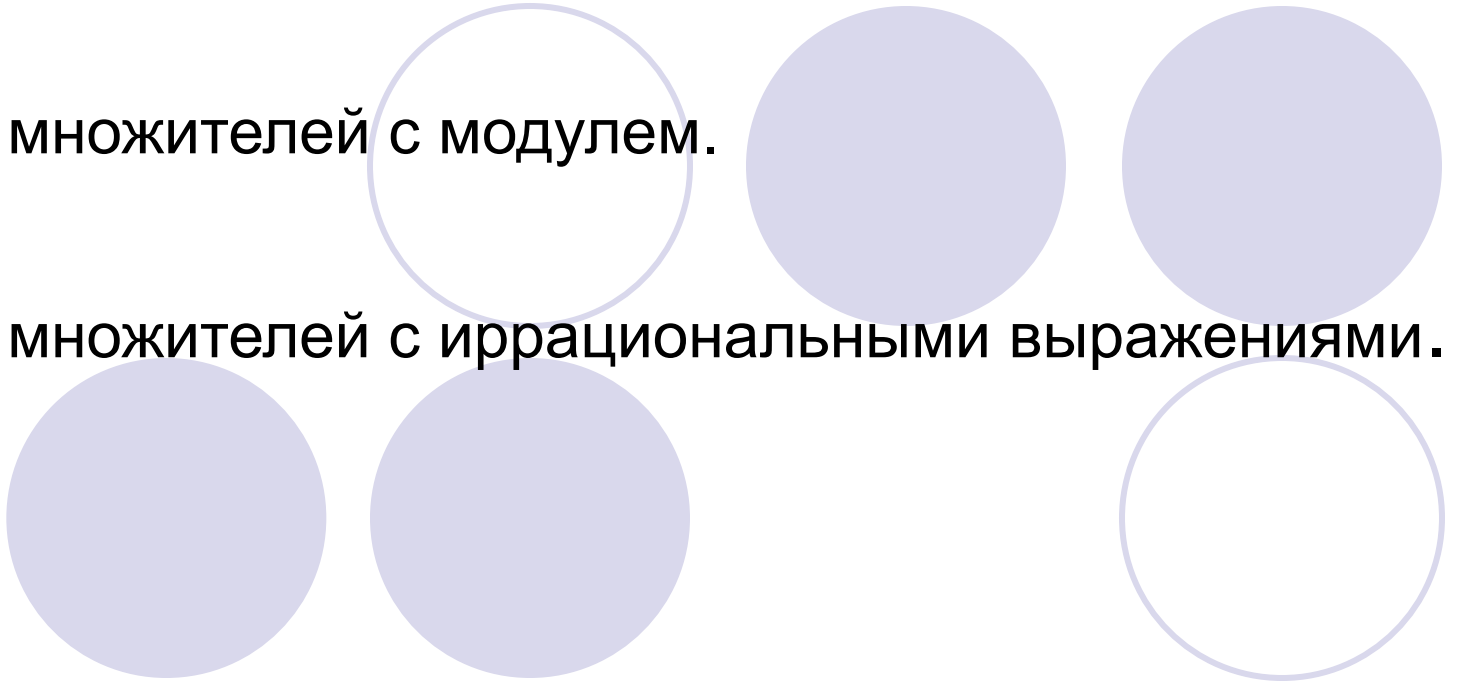
Легко усваиваемыми учащимися неравенствами являются рациональные неравенства, решение которых рассмотрено в школьных учебниках и многочисленных пособиях для поступающих в вузы. Поэтому естественным признать желание свести решение неравенств повышенной сложности к решению рациональных неравенств. Оказывается, достаточно широкий класс неравенств подобную попытку допускает. Рассмотрим применение метода замены множителей.

Содержание:

1. Замена знакопостоянных множителей.

2. Замена множителей с модулем.

3. Замена множителей с иррациональными выражениями.



1. Замена знакопостоянных множителей.

1) Метод замены множителей применяется в неравенствах вида:

$$\frac{M_1 * M_2 * M_3 \dots M_n}{M_1 * M_2 * M_3 \dots M_n} \quad \forall 0$$

Символ « \forall » означает один из четырех возможных знаков неравенства:
 $<$; \leq ; \geq ; $>$.

2) Основная идея метода замены множителей состоит в замене любого множителя M на знаковосовпадающей с ним и имеющий одни и те же корни (в области существования всех множителей) множитель L .

Замечание. Преобразованное таким образом неравенство всегда равносильно исходному в области существования последнего.

Предупреждение. Указанная замена возможна только тогда, когда заменяемый множитель находится в числителе или знаменателе дроби, которая сравнивается с нулем.

Пример 1.

(МГУ факультет вычислительной математики и кибернетики, задача №1 из пяти)

Решите неравенство:

$$(X^2 - 9)\sqrt{X^2 - X - 2} \geq 0$$

Решение:

В неравенстве есть знакопостоянный множитель $\sqrt{X^2 - X - 2}$

который провоцирует следующее неправильное решение. Так как

произведение двух множителей $(X^2 - 9)$ и $\sqrt{X^2 - X - 2}$

неотрицательно, и второй множитель неотрицателен, то и первый

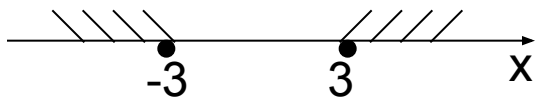
множитель $(X^2 - 9)$ должен быть неотрицательным. Поэтому решение

неравенства определяется следующей системой:

$$\begin{cases} X^2 - 9 \geq 0 \\ X^2 - X - 2 \geq 0 \end{cases}$$

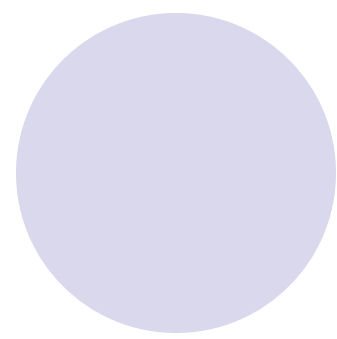
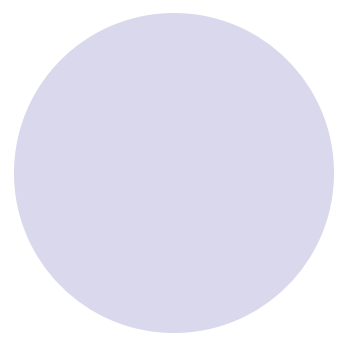
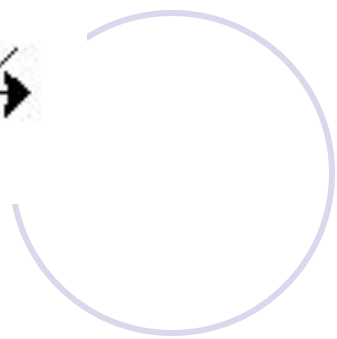
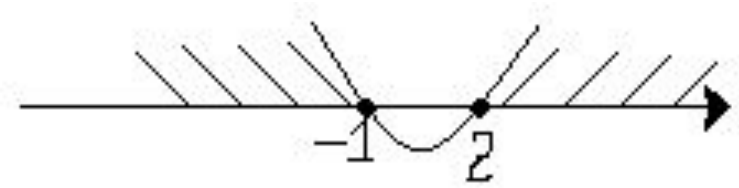
$$)|X| \geq 3$$

$$\begin{cases} X \geq 3 \\ X \leq -3 \end{cases}$$

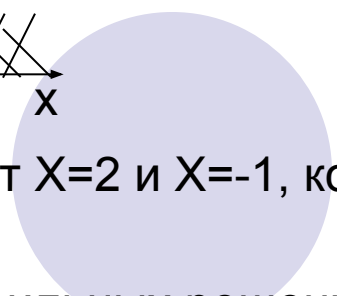
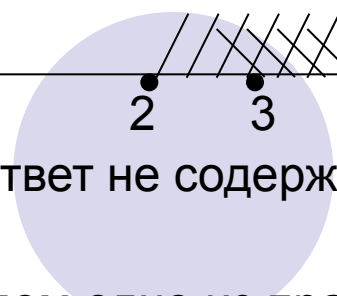
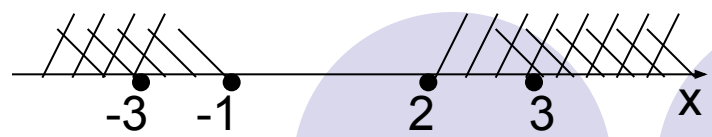


$$2) X^2 - X - 2 = 0$$

$$\begin{cases} X = 2 \\ X = -1 \end{cases}$$



$$3) X \in (-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$$

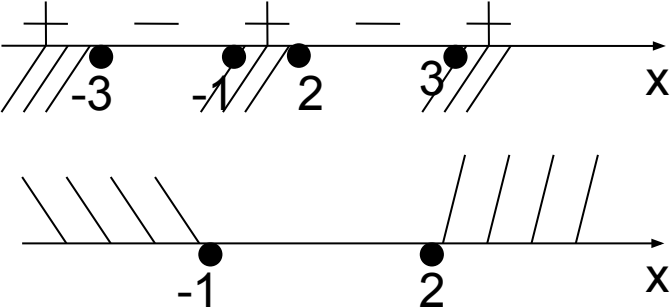


Полученный ответ не содержит $X=2$ и $X=-1$, которые были потеряны в результате решения.

Теперь приведем одно из правильных решений.

Корень из трехчлена в области допустимых значений всегда совпадают по знаку с этим трехчленом, поэтому имеем:

$$(X^2 - 9)\sqrt{X^2 - X - 2} \geq 0 \quad \begin{cases} (X^2 - 9)(X^2 - X - 2) \geq 0 \\ X^2 - X - 2 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} X \leq -3 \cup -1 \leq X \leq 2 \cup X \geq 3 \\ X \leq -1 \cup X \geq 2 \end{cases}$$



$$X \in (-\infty; -3] \cup X = -1 \cup X = 2 \cup X = 3$$

Ответ: $X \in (-\infty; -3] \cup [3; +\infty); -1; 2$.

Замена множителя $\sqrt{X^2 - X - 2}$ на $X^2 - X - 2$ позволило перейти от иррационального неравенства к стандартному рациональному неравенству в области допустимых значений исходного неравенства.

2. Замена множителей модулем.

Опорная информация, позволяющая указать удобные замены, заключается в двух основных свойствах модуля: $|m|^2 = m^2$, $|m| \geq 0$ для всех m , а так же в монотонном возрастании на множестве неотрицательных чисел функции $y = t^2$

Типы замен:

$$(|f| - |g|) \longleftrightarrow (f - g)(f + g)$$

$$(|f| - g) \xrightarrow{g \geq 0} (f - g)(f + g)$$

$$(|f| - \sqrt{g}) \xrightarrow{g \geq 0} (f^2 - g)$$

$$(|f| - \sqrt{|g|}) \longleftrightarrow (f^2 - g)(f^2 + g)$$

$$(\sqrt{|f|} - \sqrt{|g|}) \longleftrightarrow (f - g)(f + g)$$

Удобно указать частные случаи замен:

$$|f| - (ax^2 + bx + c) \longleftrightarrow (f - ax^2 - bx - c)(f + ax^2 + bx + c)$$

$a > 0$ и $D \leq 0$

$$(ax^2 + bx + c - |f|) \longleftrightarrow (ax^2 + bx + c + f)(ax^2 + bx + c - f)$$

Пример 2.

Решите неравенство:

$$\frac{(|X - 2| - 4 - X^2)(|X + 4| - \sqrt{X^2 - X - 2})}{(|1 - X| - 4)(|3 - X| - |X - 5|)} > 0$$

Решение:

Каждый множитель как в числителе так и в знаменателе есть разность неотрицательных чисел. Поэтому заменяя их на разность квадратов, получим равносильное неравенство в области значения.

$$\frac{(|X - 2| - (4 + X^2))(|X + 4| - \sqrt{X^2 - X - 2})}{(|1 - X| - 4)(|3 - X| - |X - 5|)} > 0$$

$$\begin{cases} \frac{((|X-2|)^2 - (4+X^2)^2)((|X+4|)^2 - (\sqrt{X^2 - X - 2})^2)}{((|1-X|)^2 - 4^2)((|3-x|)^2 - (|X-5|)^2)} > 0 \\ X^2 - X - 2 \geq 0 \end{cases}$$

Далее, пользуясь свойством модуля $|m|^2 = m^2$ и раскладывая на множитель разности квадратов, получим.

$$\begin{cases} \frac{((X-2)^2 - (4+X^2)^2)((X+4)^2 - (X^2 - X - 2))}{((1-X)^2 - 4^2)((3+X)^2 - (X-5)^2)} > 0 \\ \begin{cases} X \leq -1 \\ X \geq 2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{(-X^2 + X - 6)(X^2 + X + 2)(9X + 18)}{(-X - 3)(5 - X)8(2X - 2)} > 0 \\ \begin{cases} X \leq -1 \\ X \geq 2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1) -X^2 + X - 6 = 0 \\ D = 1 - 24 < 0 \\ -X^2 + X - 6 < 0 \\ \text{При } X \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) X^2 + X + 2 = 0 \\ D = 1 - 8 < 0 \\ X^2 + X + 2 > 0 \\ \text{При } X \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Заменим первый множитель на (-1); второй – на множитель (1)

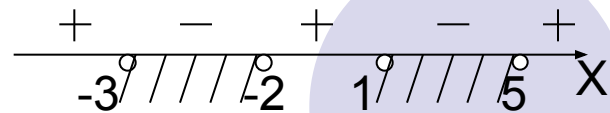
Получим:

$$\frac{-1*1*(9X+18)}{-(X+3)(5-X)*8*2(X-1)} > 0$$

$$\frac{-9(X+2)}{16(X+3)(X-5)(X-1)} > 0$$

Следует:

$$\frac{X+2}{(X+3)(X-5)(X-1)} < 0$$



$$\begin{cases} -3 < X < -2 \\ 1 < X < 5 \end{cases}$$

Вернемся к системе:

$$\begin{cases} -3 < X < -2 \\ 1 < X < 5 \\ X \leq -1 \\ X \geq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 < X < -2 \\ 2 \leq X < 5 \end{cases}$$

Ответ: $(-3; -2) \cup [2; 5)$

Пример 3.

Решить неравенство:

$$\frac{(\sqrt{X+9} - \sqrt{X^2 - X + 1})(2X^2 - X + 1 - |X+1|)}{|X+5| + X - 2X^2 - 1} < 0$$

Решение:

$$\frac{(\sqrt{X+9} - \sqrt{X^2 - X + 1})((2X^2 - X + 1) - |X+1|)}{|X+5| - (2X^2 - X + 1)} < 0$$

$$\frac{((\sqrt{X+9})^2 - (\sqrt{X^2 - X + 1})^2)((2X^2 - X + 1)^2 - (|X+1|)^2)}{(|X+5|)^2 - (2X^2 - X + 1)^2} < 0$$

$$\begin{cases} \frac{((X+9) - (X^2 - X + 1))((2X^2 - X + 1)^2 - (X+1)^2)}{(X+5)^2 - (2X^2 - X + 1)^2} < 0 \\ X \geq -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{(-X^2 + 2X + 8)(2X^2 - X + 1 + X + 1)(2X^2 - X + 1 - X - 1)}{(X + 5 - 2X^2 + X - 1)(X + 5 + 2X^2 - X + 1)} < 0 \\ X \geq -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{(-X^2 + 2 + 2X + 8)(2X^2 + 2)(2X^2 - 2X)}{(-2X^2 + 2X + 4)(2X^2 + 6)} < 0 \\ X \geq -9 \end{cases}$$

1) $-X^2 + 2X + 8 = 0$
 $X^2 - 2X - 8 = 0$

$$\begin{cases} X = 4 \\ X = -2 \end{cases}$$

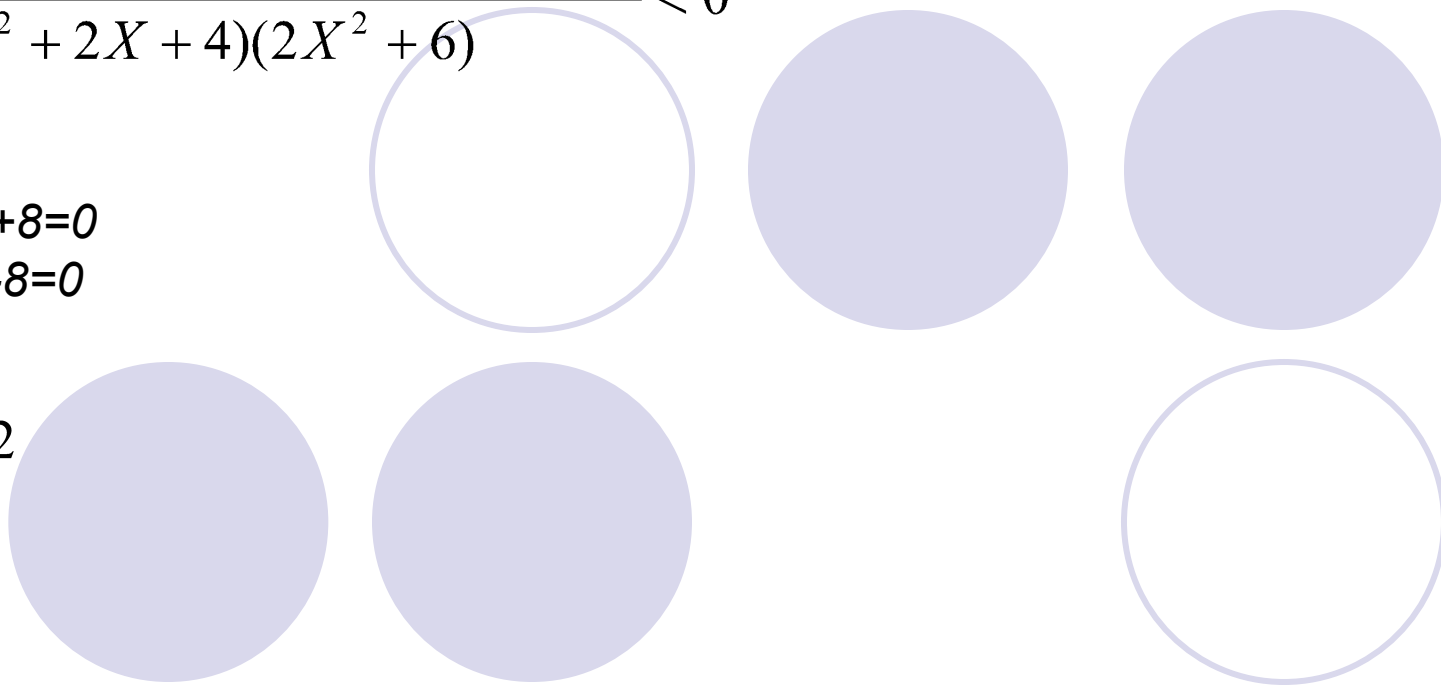
2) $2X^2 + 2 > 0$
 При $X \in \mathbb{R}$
 Заменяем (1)

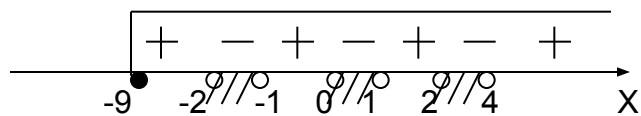
3) $2X^2 + 6 > 0$
 При $X \in \mathbb{R}$

Заменяем (1)

4) $X^2 - X - 2 = 0$

$$\begin{cases} X = 2 \\ X = -1 \end{cases}$$





$$X \in (-2; -1) \cup (0; 1) \cup (2; 4)$$

Ответ: $(-2; -1) \cup (0; 1) \cup (2; 4)$

Пример 4.

$$(\sqrt{X+10} - 3X)(|X+14| - 2X) < 0$$

В этом неравенстве уже нельзя множители $(\sqrt{X+10})$ и $(|X+14| - 2X)$ рассматривать как разности неотрицательных чисел, так как выражения $3x$ и $2x$ в области допустимых значений (т.е. $x \geq -10$) могут принимать как положительные так и отрицательные значения.

Однако, если область допустимых значений исходного неравенства разбить на два промежутка $-10 \leq x \leq 0$ и $x > 0$ (точка $x=0$ есть точка смены знака выражений $3x$ и $2x$, то заметим, что на промежутке $-10 \leq x \leq 0$ имеем произведение двух положительных чисел, и поэтому неравенство ложно, а при $x > 0$ каждый множитель есть разность двух неотрицательных чисел, а следовательно можно воспользоваться методом замены множителей.

Итак.

$$(\sqrt{X+10} - 3X)(|X+14| - 2X) < 0$$

$$\begin{cases} -10 \leq X \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\sqrt{X+10} - 3X)(|X+14| - 2X) < 0 \end{cases}$$

А это ложно;

$$\begin{cases} X > 0 \\ ((\sqrt{X+10})^2 - (3X)^2)((|X+14|)^2 - (2X)^2) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X > 0 \\ -(9X^2 - X - 10)(X+14 - 2X)(X+14 + 2X) < 0 \end{cases}$$

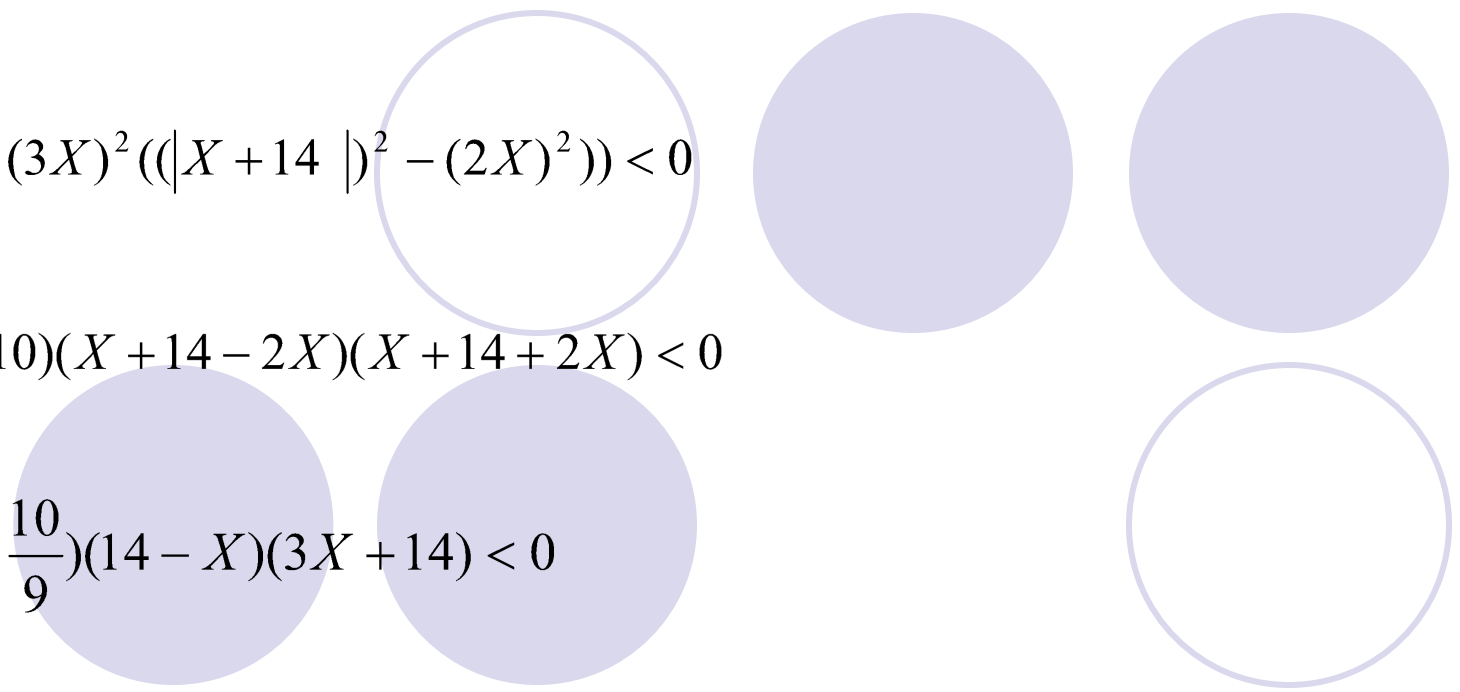
$$\begin{cases} X > 0 \\ -(X+1)(X - \frac{10}{9})(14 - X)(3X + 14) < 0 \end{cases}$$

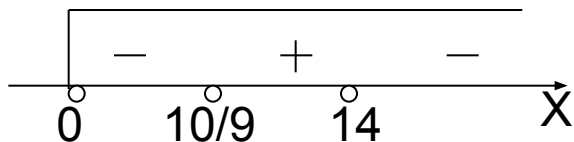
При $X > 0$

1) $X+1 > 0$

2) $3X+14 > 0$

$$\begin{cases} X > 0 \\ (X - \frac{10}{9})(14 - X) > 0 \end{cases}$$





$$X \in (10/9; 14)$$

Ответ: (10/9; 14)

Пример 4.

Наводит на мысль, как действовать в произвольной подобной ситуации: область допустимых значений неравенства разбить на промежутки знакопостоянства выражений, которые необходимо возводить в квадрат, чтобы воспользоваться методом замены множителей; далее на каждом из полученных промежутков решать исходное неравенство и полученные ответы объединить.

Рассмотрим пример.

Пример 5.

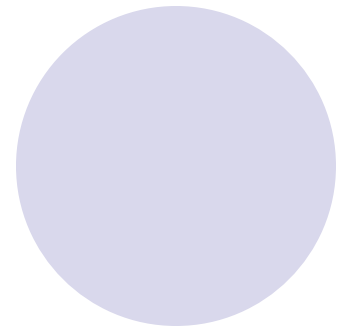
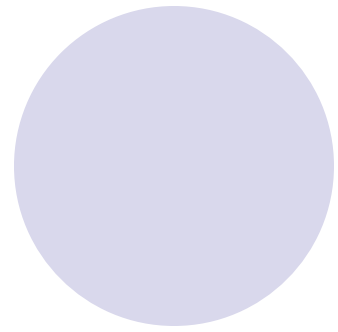
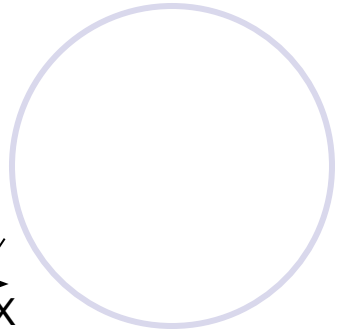
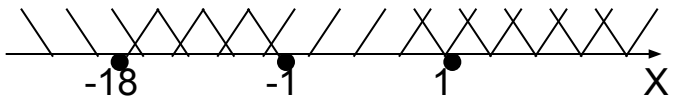
Решить неравенство:

$$\frac{(X + \sqrt{X + 18} - 2)(\sqrt{X^2 - 1} - X)}{|2X - 8| - (X^2 - 2X)} > 0$$

1) О.Д.З.

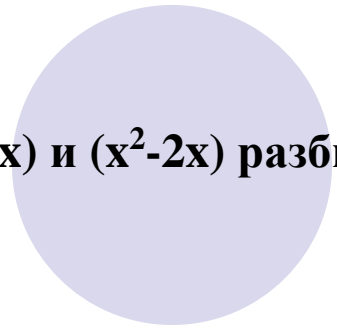
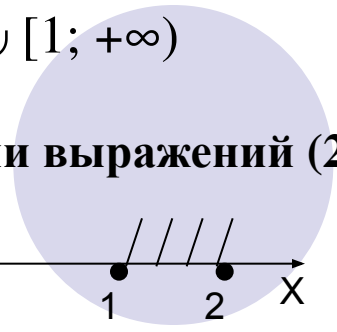
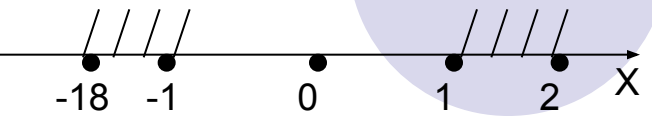
$$\begin{cases} X \geq -18 \\ |X| \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X \geq -18 \\ X \geq 1 \\ X \leq -1 \end{cases}$$



$$X \in [-18; -1] \cup [1; +\infty)$$

2) О.Д.З. нулями выражений $(2-x)$ и (x^2-2x) разбивается на три промежутка.



1. $-18 \leq x \leq -1$; 2. $1 \leq x \leq 2$; 3. $x \geq 2$.

1. Решаем неравенство на (1) промежутке.

$$-18 \leq x \leq -1$$

Заметим: 1) $\sqrt{X^2 - 1} - X > 0$ (заменяем (1))

$$2) 2-x>0; 3) x(x-2)>0$$

Проведём замену, получим

$$\frac{(X+18-(2-X)^2)}{(2X-8)^2-(X^2-2X)^2} > 0$$

$$\frac{X+18-4+4X-X^2}{(2X-8+X^2-2X)(2X-8-X^2+2X)} > 0$$

$$\frac{-X^2+5X+14}{(X^2-8)(-X^2+4X-8)} > 0$$

$$\frac{-(X^2-5X-14)}{-(X-2\sqrt{2})(X+2\sqrt{2})(X^2-4X+8)} > 0$$

$$\frac{(X-7)(X+2)}{(X-2\sqrt{2})(X+2\sqrt{2})} > 0$$

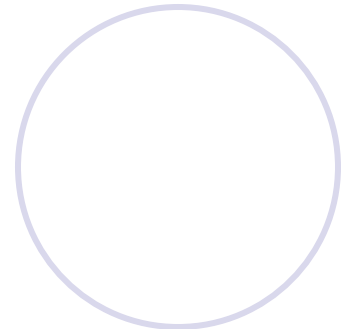
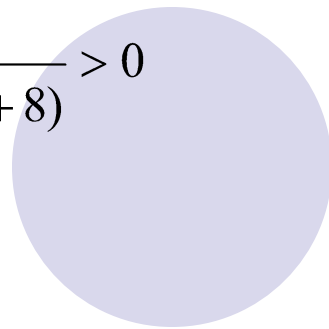
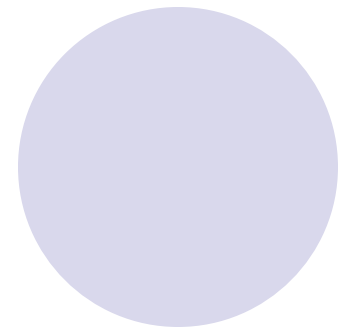
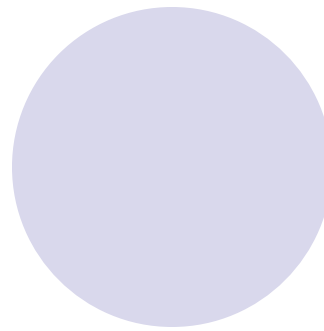
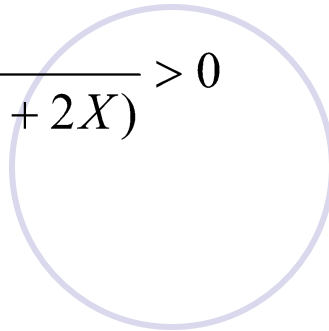
1. $x-2\sqrt{2} < 0$ заменим на (-1);

$$2. x^2-4x+8=0$$

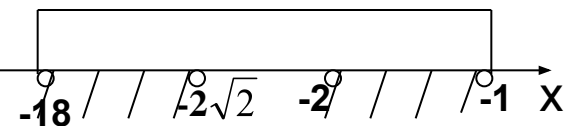
$x^2-4x+8 > 0$ при

x принадл. \mathbb{R} , заменим на (1)

3. $x-7 < 0$ заменим на (-1)



$$\begin{cases} \frac{(X+2)}{X+2\sqrt{2}} > 0 \\ -18 \leq X \leq -1 \end{cases}$$



2. Рассмотрим неравенство на втором промежутке x принадлежит $[1;2]$.

$$\begin{cases} \frac{(\sqrt{X+18} - (2-X))(\sqrt{X^2-1} - X)}{|2X-8| - X(X-2)} > 0 \\ 1 \leq X \leq 2 \end{cases}$$

1. $x > 0$

2. $x(x-2) \leq 0$,

след. $|2x-8| - (x-2) > 0$, заменим на (1).

3. $2-x > 0$,

Тогда:

$$(\sqrt{X+18} - (\sqrt{X^2-1} - X) > 0$$

$$((\sqrt{X+18})^2)((\sqrt{X^2-1})^2 - X^2) > 0$$

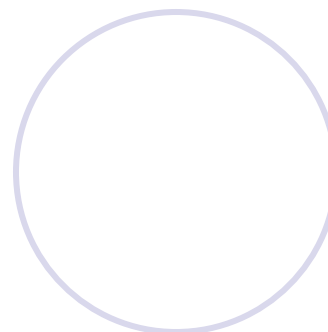
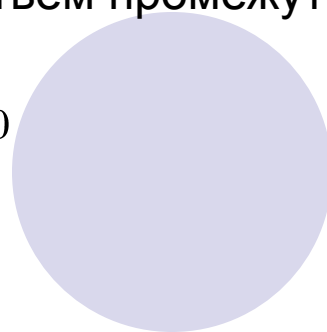
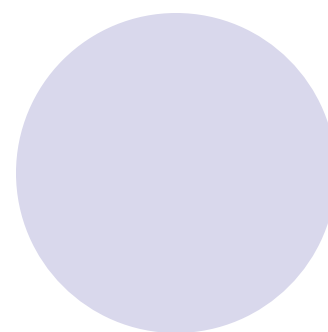
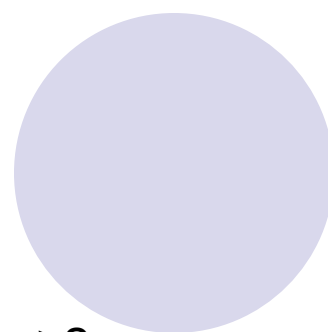
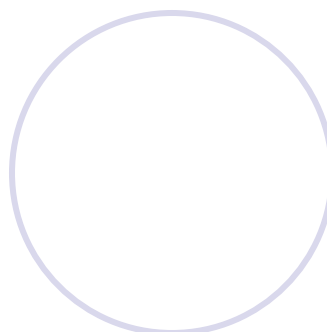
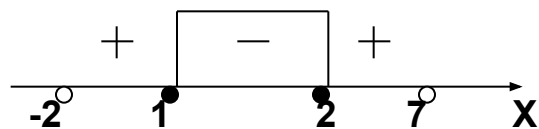
$$(X + 18 - 4 + 4X - X^2)(X^2 - 1 - X^2) > 0$$

$$(-X^2 + 5X + 14)(-1) > 0$$

$$X^2 - 5X - 14 > 0$$

$$\begin{cases} (X - 7)(X + 2) > 0 \\ 1 \leq X \leq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (X - 7)(X + 2) > 0 \\ 1 \leq X \leq 2 \end{cases}$$



3. Решаем неравенство на третьем промежутке $x \geq 2$

- При $x \geq 2$
1. $2 - x = 0$ на (-1)
 2. $\sqrt{X + 18} - (2 - X) > 0$
 3. $x > 0$
 4. $x(x - 2) \geq 0$

Получим
$$\begin{cases} \frac{\sqrt{X^2 - 1} - X}{|2X - 8| - (X^2 - 2X)} > 0 \\ X \geq 2 \end{cases}$$

$$\frac{((\sqrt{X^2 - 1})^2 - X^2)}{(|2X - 8|)^2 - (X^2 - 2X)^2} > 0$$

$$\frac{X^2 - 1 - X^2}{(2X - 8 - X^2 + 2X)(2X - 8 + X^2 - 2X)} > 0$$

$$(-X^2 + 4X - 8)(X^2 - 8) < 0$$

$$(X^2 - 4X + 8)(X - 2\sqrt{2})(X + 2\sqrt{2}) > 0$$

$X^2 - 4x + 8 > 0$, при x принадлеж. \mathbb{R} ($D > 0$).

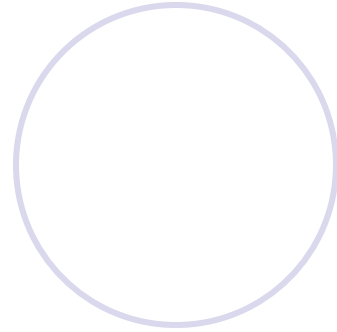
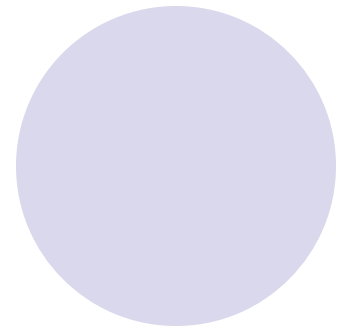
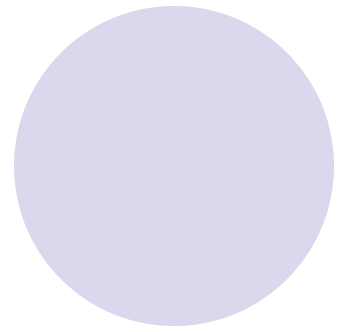
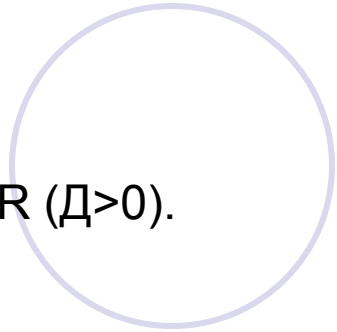
$$\begin{cases} (X - 2\sqrt{2})(X + 2\sqrt{2}) > 0 \\ X \geq 2 \end{cases}$$

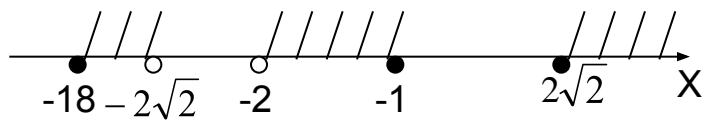
Тогда

$$\begin{cases} X - 2\sqrt{2} > 0 \\ X \geq 2 \end{cases}$$

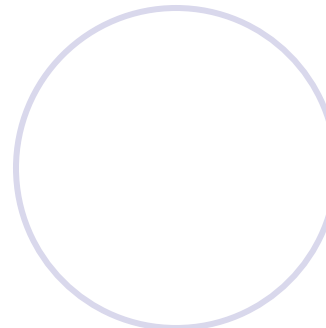
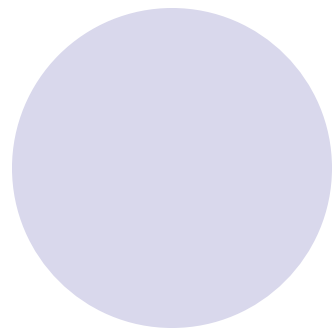
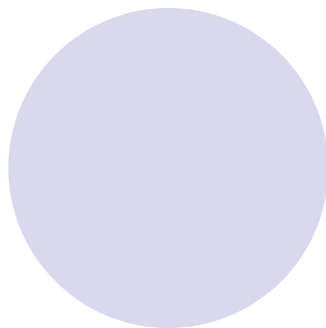
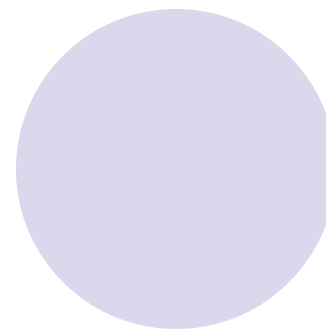
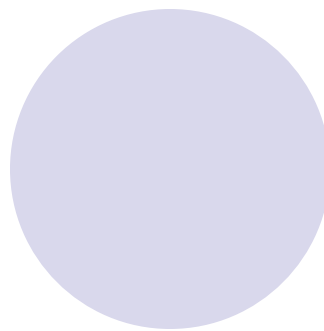
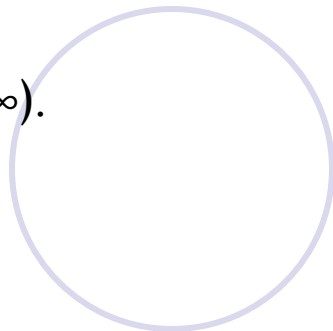
5. Объединим ответы, полученные в разобранных трёх случаях.

$$\begin{cases} -18 \leq X < -2\sqrt{2} \\ -2 < X \leq -1 \\ X \geq 2\sqrt{2} \end{cases}$$





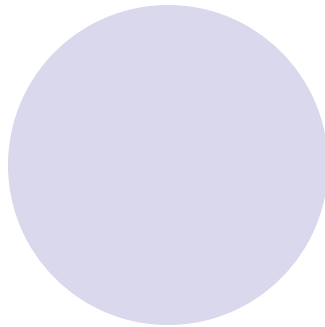
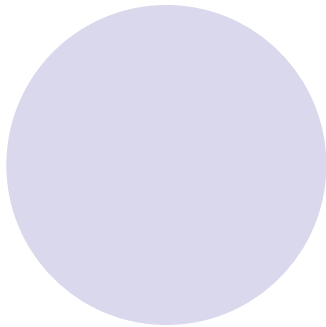
Ответ: $(-18; -2\sqrt{2}) * (-2; -1) * [2\sqrt{2}; +\infty)$.



Вывод:

Рассмотрев данные примеры, можно сделать вывод, что, овладев техникой применения метода данных множителей можно значительно быстрее двигаться к ответу при решении неравенств, предлагаемых в конкурсных заданиях. Мы рассмотрели задания, предлагаемые на вступительных экзаменах по математике на основных факультетах МГУ.

Метод замены множителей применяется при решении неравенств, содержащих показательные и логарифмические выражения.



Используемая литература:

1) «Квантор» В. И. Голубев; В. И. Тарасов. «Эффективные пути решения неравенств».

2) «Сборник по математике для поступающих в вузы» под редакцией М. И. Сканави.

3) Задания из практики приёмных экзаменов МГУ им. М. В. Ломоносова.

