Муниципальное общеобразовательное учреждение
Гимназии №2 «Квантор».
Секция математики.

Проект по алгебре.
Тема:
«Эффективные пути решения неравенств. Метод замены множителей».

Разработчики:
Марченко А. Д.
Коршакова А. О.
Учитель:
Зайцева Е. В.

г. Коломна
2008 год

Эффективные пути решений неравенств. Метод замены множителей.

Все неравенства с одной переменной, которые рассматриваются в школе или предлагаются в конкурсных заданиях вступительных экзаменов, имеют одну и ту же структуру ответа промежуток или объединение промежутков.

Легко усваиваемыми учащимися неравенствами являются рациональные неравенства, решение которых рассмотрено в школьных учебниках и многочисленных пособиях для поступающих в вузы. Поэтому естественным признать желание свести решение неравенств повышенной сложности к решению рациональных неравенств. Оказывается, достаточно широкий класс неравенств подобную попытку допускает.

Рассмотрим применение метода замены множителей.

Содержание:

1.Замена знакопостоянных множителей.

2.Замена множителей с модулем.

3.Замена множителей с иррациональными выражениями.

1. Замена знакопостоянных множителей.

1) Метод замены множителей применяется в неравенствах вида:

$$\frac{M_1 * M_2 * M_3 \ldots M_n}{M_1 * M_2 * M_3 \ldots M_n} \quad V\ 0$$

Символ «V» означает один из четырех возможных знаков неравенства:

<; ≤; ≥; >.

2) Основная идея метода замены множителей состоит в замене любого множителя М на знакосовпадающей с ним и имеющий одни и те же корни (в области существования всех множителей) множитель L.

<u>Замечание.</u> Преобразованное таким образом неравенство всегда равносильно исходному в области существования последнего.

<u>Предупреждение.</u> Указанная замена возможна только тогда, когда заменяемый множитель находится в числителе или знаменателе дроби, которая сравнивается с нулем.

Пример 1.

(МГУ факультет вычислительной математики и кибернетики, задача №1 из пяти)

Решите неравенство:

(X2 – 9) $\sqrt{X^2 - X - 2}$ ≥0

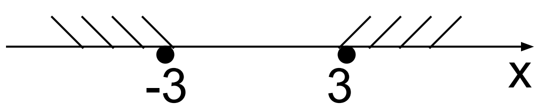
Решение:

В неравенстве есть знакопостоянный множитель $\sqrt{X^2 - X - 2}$ который провоцирует следующее неправильное решение. Так как произведение двух множителей $(X^2 - 9)$ и $\sqrt{X^2 - X - 2}$ неотрицательно, и второй множитель неотрицателен, то и первый множитель *(X2 – 9)* должен быть неотрицательным. Поэтому решение неравенства определяется следующей системой:

$$\begin{cases} X^2 - 9 \geq 0 \\ X^2 - X - 2 \geq 0 \end{cases}$$

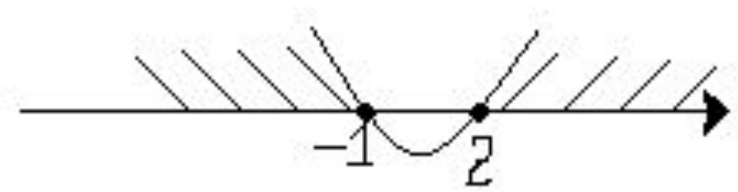
)|X| ≥ 3

$$\left[\begin{array}{l} X \geq 3 \\ X \leq -3 \end{array}\right.$$

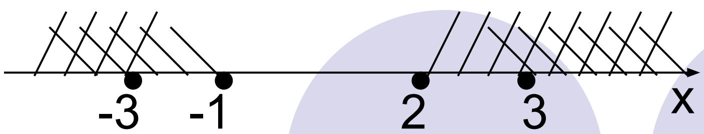


2) X2 – X – 2 = 0

$$\left[\begin{array}{l} X = 2 \\ X = -1 \end{array}\right.$$



3) $x \in (-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$

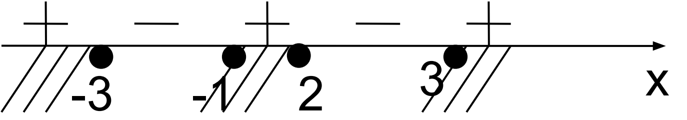


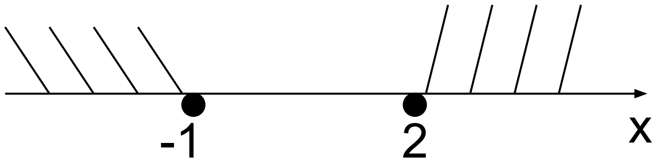
Полученный ответ не содержит X=2 и X=-1, которые были потерянны в результате решения.

<u>Теперь приведем одно из правильных решений.</u>

Корень из трехчлена в области допустимых значений всегда совпадают по знаку с этим трехчленом, поэтому имеем:

(X2 – 9) $\sqrt{X^2 - X - 2}$ ≥0 $\quad \begin{cases} (X^2 - 9)(X^2 - X - 2) \geq 0 \\ X^2 - X - 2 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} X \leq -3 \cup -1 \leq X \leq 2 \cup X \geq 3 \\ X \leq -1 \cup X \geq 2 \end{cases}$





$X \in (-\infty; -3] \cup X=-1 \cup X=2 \cup X=3$

Ответ: $X \in (-\infty; -3] \cup [3; +\infty); -1; 2.$

Замена множителя $\sqrt{X^2 - X - 2}$ на $X^2 - X - 2$ позволило перейти от иррационального неравенства к стандартному рациональному неравенству в области допустимых значений исходного неравенства.

2. Замена множителей модулем.

Опорная информация, позволяющая указать удобные замены, заключается в двух основных свойствах модуля: $|m|^2 = m^2$ $|m| \geq 0$ для всех m, а так же в монотонном возрастании на множестве неотрицательных чисел функции $y=t^2$

Типы замен:

$$(|f| - |g|) \longleftrightarrow (f - g)(f + g)$$

$$(|f| - g) \xleftrightarrow{g \geq 0} (f - g)(f + g)$$

$$(|f| - \sqrt{g}) \xleftrightarrow{g \geq 0} (f^2 - g)$$

$$(|f| - \sqrt{|g|}) \longleftrightarrow (f^2 - g)(f^2 + g)$$

$$(\sqrt{|f|} - \sqrt{|g|}) \longleftrightarrow (f - g)(f + g)$$

Удобно указать частные случаи замен:

$$|f| - (ax^2+bx+c) \longleftrightarrow (f-ax^2-bx-c)(f+ax^2+bx+c)$$

a>0 и D≤0

$$(ax^2+bx+c-|f|) \longleftrightarrow (ax^2+bx+c+)(ax^2+bx+c-f)$$

Пример 2.

Решите неравенство:

$$\frac{(|X-2| - 4 - X^2)(|X+4| - \sqrt{X^2 - X - 2)}}{(|1-X| - 4)(|3-X| - |X-5|)} > 0$$

Решение:

Каждый множитель как в числителе так и в знаменателе есть разность неотрицательных чисел. Поэтому заменяя их на разность квадратов, получим равносильное неравенство в области значения.

$$\frac{(|X-2| - (4 + X^2))(|X+4| - \sqrt{X^2 - X - 2}}{(|1-X| - 4)(|3-X| - |X-5|)} > 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{((|X-2|)^2-(4+X^2)^2)((|X+4|)^2-(\sqrt{X^2-X-2})^2)}{((|1-X|)^2-4^2)((|3-x|)^2-(|X-5|)^2)}>0 \\ X^2-X-2\geq 0 \end{cases}$$

Далее, пользуясь свойством модуля $|m|^2=m^2$ и раскладывая на множитель разности квадратов, получим.

$$\begin{cases} \dfrac{((X-2)^2-(4+X^2)^2)((X+4)^2-(X^2-X-2))}{((1-X)^2-4^2)((3+X)^2-(X-5)^2)}>0 \\ \left[\begin{array}{l} X\leq -1 \\ X\geq 2 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{(-X^2+X-6)(X^2+X+2)(9X+18)}{(-X-3)(5-X)8(2X-2)}>0 \\ \left[\begin{array}{l} X\leq -1 \\ X\geq 2 \end{array}\right. \end{cases}$$

1) $-X^2+X-6=0$

$D=1-24<0$

$-X^2+X-6<0$

При $X \in/R$

2) $X^2+X+2=0$

$D=1-8<0$

$X^2+X+2>0$

При $X \in/R$

Заменим первый множитель на (-1); второй – на множитель (1)

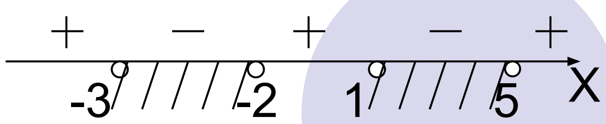
Получим:

$$\frac{-1*1*(9X+18)}{-(X+3)(5-X)*8*2(X-1)}>0$$

$$\frac{-9(X+2)}{16(X+3)(X-5)(X-1)}>0$$

Следует:

$$\frac{X+2}{(X+3)(X-5)(X-1)}<0$$



$$\left[\begin{array}{l}-3<X<-2\\ 1<X<5\end{array}\right.$$

Вернемся к системе:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}-3<X<-2\\ 1<X<5\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}X\le -1\\ X\ge 2\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} -3 < X < -2 \\ 2 \le X < 5 \end{array}\right.$$

Ответ: (- 3; - 2) $\cup$[2; 5)

Пример 3.

Решить неравенство:

$$\frac{(\sqrt{X+9}-\sqrt{X^2-X+1})(2X^2-X+1-|X+1|)}{|X+5|+X-2X^2-1} < 0$$

Решение:

$$\frac{(\sqrt{X+9}-\sqrt{X^2-X+1})((2X^2-X+1)-|X+1|)}{|X+5|-(2X^2-X+1)} < 0$$

$$\frac{((\sqrt{X+9})^2-(\sqrt{X^2-X+1})^2)((2X^2-X+1)^2-(|X+1|)^2)}{(|X+5|)^2-(2X^2-X+1)^2} < 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{((X+9)-(X^2-X+1))((2X^2-X+1)^2-(X+1)^2)}{(X+5)^2-(2X^2-X+1)^2} < 0 \\ X \ge -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{(-X^2+2X+8)(2X^2-X+1+X+1)(2X^2-X+1-X-1)}{(X+5-2X^2+X-1)(X+5+2X^2-X+1)} < 0 \\ X \geq -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{(-X^2+2+2X+8)(2X^2+2)(2X^2-2X)}{(-2X^2+2X+4)(2X^2+6)} < 0 \\ X \geq -9 \end{cases}$$

1) *–X2+2X+8=0*

X2-2X-8=0

$$\left[\begin{array}{l} X=4 \\ X=-2 \end{array}\right.$$

2) $2X^2+2>0$

При $X \in$ */R*

Заменим (1)

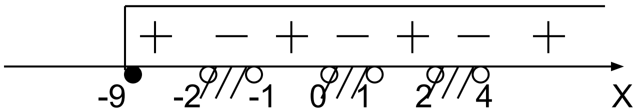
3) $2X^2+6>0$

При $X \in$ */R*

Заменим (1)

4)X2-X-2=0

$$\left[\begin{array}{l} X=2 \\ X=-1 \end{array}\right.$$



X $\in$ **(-2; -1)** $\cup$ **(0; 1)** $\cup$ **(2; 4)**

Ответ: ***(-2; -1)*** $\cup$ ***(0; 1)*** $\cup$ ***(2; 4)***

<u>Пример 4.</u>

$$\left(\sqrt{X+10}-3X\right)\left(\left|X+14\right|-2X\right)<0$$

В этом неравенстве уже нельзя множители ($\sqrt{X+10}-3X$**) и (**$|X+14|-2X$**) рассматривать как разности неотрицательных чисел, так как выражения 3x и 2x в области допустимых значений (т.е x≥-10) могут принимать как положительные так и отрицательные значения.**

Однако, если область допустимых значений исходного неравенства разбить на два промежутка -10≤x≤0 и x>0 (точка x=0 есть точка смены знака выражений 3x и 2x, то заметим, что на промежутке -10≤x≤0 имеем произведение двух положительных чисел, и поэтому неравенство ложно, а при x>0 каждый множитель есть разность двух неотрицательных чисел, а следовательно можно воспользоваться методом замены множителей.

<u>Итак.</u>

$(\sqrt{X+10}-3X)(|X+14|-2x)<0$

$$\begin{cases} -10 \le X \le 0 \\ (\sqrt{X+10}-3X)(|X+14|-2X)<0 \end{cases}$$

А это ложно;

$$\begin{cases} X>0 \\ ((\sqrt{X+10})^2-(3X)^2((|X+14|)^2-(2X)^2))<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X>0 \\ -(9X^2-X-10)(X+14-2X)(X+14+2X)<0 \end{cases}$$

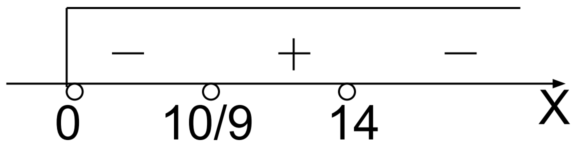
$$\begin{cases} X>0 \\ -(X+1)(X-\frac{10}{9})(14-X)(3X+14)<0 \end{cases}$$

При X>0

1) X+1>0

2) 3X+14>0

$$\begin{cases} X>0 \\ (X-\frac{10}{9})(14-X)>0 \end{cases}$$



$X \in (10/9;\ 14)$

Ответ: (10/9; 14)

<u>Пример 4.</u>

Наводит на мысль, как действовать в произвольной подобной ситуации: область допустимых значений неравенства разбить на промежутки знакопостоянства выражений, которые необходимо возводить в квадрат, чтобы воспользоваться методом замены множителей; далее на каждом из полученных промежутков решать исходное неравенство и полученные ответы объединить. Рассмотрим пример.

<u>Пример 5.</u>

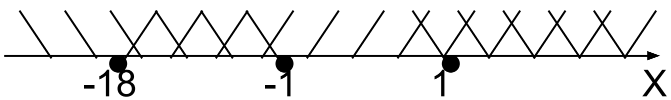
<u>Решить неравенство:</u>

$$\frac{(X+\sqrt{X+18}-2)(\sqrt{X^2-1}-X)}{\left|2X-8\right|-(X^2-2X))}>0$$

<u>1) О.Д.З.</u>

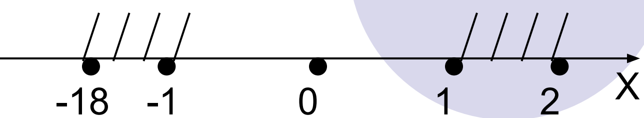
$$\begin{cases} X \ge -18 \\ |X| \ge 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X \ge -18 \\ \left[\begin{array}{l} X \ge 1 \\ X \le -1 \end{array}\right. \end{cases}$$



$X \in [-18; -1] \cup [1; +\infty)$

2)О.Д.З. **нулями выражений (2-x) и (x^2-2x) разбивается на три промежутка.**



1. -18≤x≤-1;   2.1≤x≤2; 3.x≥2.

1. Решаем неравенство на (1) промежутке.

-18≤x≤-1

Заметим: 1) $\sqrt{X^2-1} - X > 0$ (заменим (1))

2) 2-x>0; 3) x(x-2)>0

Проведём замену, получим

$$\frac{(X+18-(2-X)^2)}{(2X-8)^2-(X^2-2X)^2}>0$$

$$\frac{X+18-4+4X-X^2}{(2X-8+X^2-2X)(2X-8-X^2+2X)}>0$$

$$\frac{-X^2+5X+14}{(X^2-8)(-X^2+4X-8)}>0$$

$$\frac{-(X^2-5X-14)}{-(X-2\sqrt{2})(X+2\sqrt{2})(X^2-4X+8)}>0$$

$$\frac{(X-7)(X+2)}{(X-2\sqrt{2})(X+2\sqrt{2})}>0$$

1.x-2$\sqrt{2}$ <0 заменим на (-1);

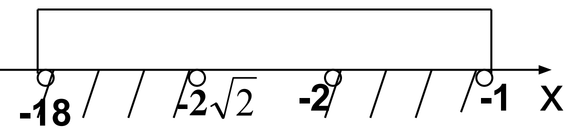
2.x2-4x+8=0

X2-4x+8>0 при

x принадл. R, заменим на (1)

3.x-7<0 заменим на (-1)

$$\begin{cases} \dfrac{(X+2)}{X+2\sqrt{2}} > 0 \\ -18 \le X \le -1 \end{cases}$$



2.Рамотрим неравенство на втором промежутке х принадлежит [1;2].

$$\begin{cases} \dfrac{(\sqrt{X+18}-(2-X))(\sqrt{X^2-1}-X)}{|2X-8|-X(X-2)} > 0 \\ 1 \le X \le 2 \end{cases}$$

1.x>0

2.x(x-2)≤0,

след. |2x-8|-(x-2)>0, заменим на (1).

3.2-x>0,

Тогда:

$$(\sqrt{X+18}-(\sqrt{X^2-1}-X>0$$

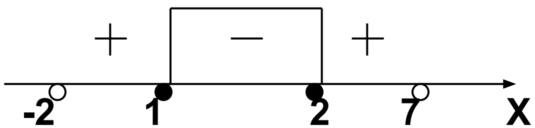
$$((\sqrt{X+18})^2)((\sqrt{X^2-1})^2-X^2)>0$$

$$(X+18-4+4X-X^2)(X^2-1-X^2)>0$$

$$(-X^2+5X+14)(-1)>0$$

X2-5X-14>0

$$\begin{cases}(X-7)(X+2)>0\\ 1\le X\le 2\end{cases}$$



3.Решаем неравенство на третьем промежутке x≥2

При x≥2 1. 2-x=0 на (-1)

2. $\sqrt{X+18}-(2-X)>0$

3.x>0

4.x(x-2)≥0

Получим $\begin{cases}\dfrac{\sqrt{X^2-1}-X}{|2X-8|-(X^2-2X)}>0\\ X\ge 2\end{cases}$

$$\frac{((\sqrt{X^2-1})^2-X^2)}{(|2X-8|)^2-(X^2-2X)^2}>0$$

$$\frac{X^2-1-X^2}{(2X-8-X^2+2X)(2X-8+X^2-2X)}>0$$

(-X2+4X-8)(X2-8)<0

$(X^2-4X+8)(X-2\sqrt{2})(X+2\sqrt{2})>0$

X2-4x+8>0, при x принадлеж. IR (Д>0).

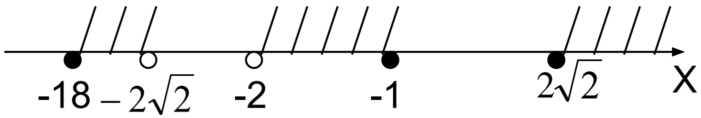
$$\begin{cases}(X-2\sqrt{2})(X+2\sqrt{2})>0\\ X\geq 2\end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases}X-2\sqrt{2}>0\\ X\geq 2\end{cases}$$

5.Объединим ответы, полученные в разобранных трёх случаях.

$$\left[\begin{array}{l}-18\leq X<-2\sqrt{2}\\ -2<X\leq -1\\ X\geq 2\sqrt{2}\end{array}\right.$$



Ответ: $[-18;-2\sqrt{2})*(-2;-1]*[2\sqrt{2};+\infty)$.

Вывод:

Рассмотрев данные примеры, можно сделать вывод, что, овладев техникой применения метода данных множителей можно значительно быстрее двигаться к ответу при решении неравенств, предлагаемых в конкурсных заданиях. Мы рассмотрели задания, предлагаемые на вступительных экзаменах по математике на основных факультетах МГУ.

Метод замены множителей применяется при решении неравенств, содержащих показательные и логарифмические выражения.

Используемая литература:

1)«Квантор» В. И. Голубев; В. И. Тарасов. «Эффективные пути решения неравенств».
2)«Сборник по математике доя поступающих в вузы» под редакцией М. И. Сканави.
3)Задания из практики приёмных экзаменов МГУ им. М. В. Ломоносова.