

# Золотое сечение

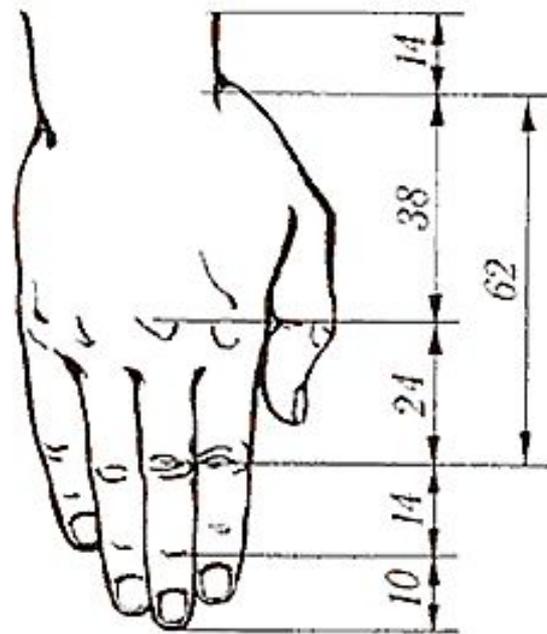
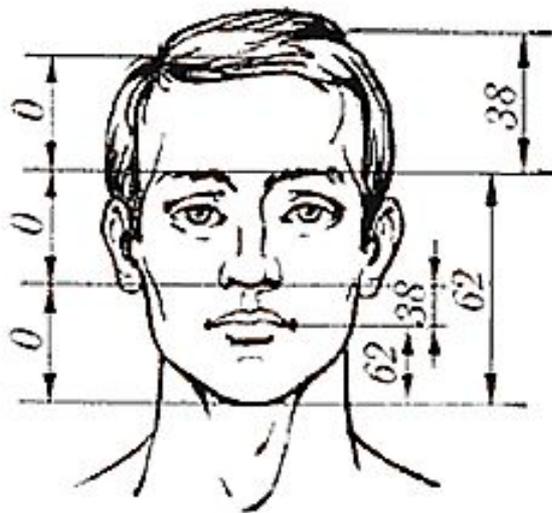
Золотым сечением называется такое делением целого на две неравные части, при котором меньшая часть так относится к большей, как большая часть относится ко всему целому.

Выясним, каким числом выражается золотое сечение. Для этого выберем произвольный отрезок и примем его длину за единицу. Разобьем этот отрезок на две неравные части, и большую из них обозначим через  $x$ . Тогда меньшая часть равна  $1-x$ . По определению золотого отношения должно выполняться равенство  $(1-x) : x = x : 1$ . Мы получили уравнение относительно  $x$ , которое легко свести к квадратному  $x^2 + x - 1 = 0$ . Положительный корень этого уравнения равен  $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0,6$ .



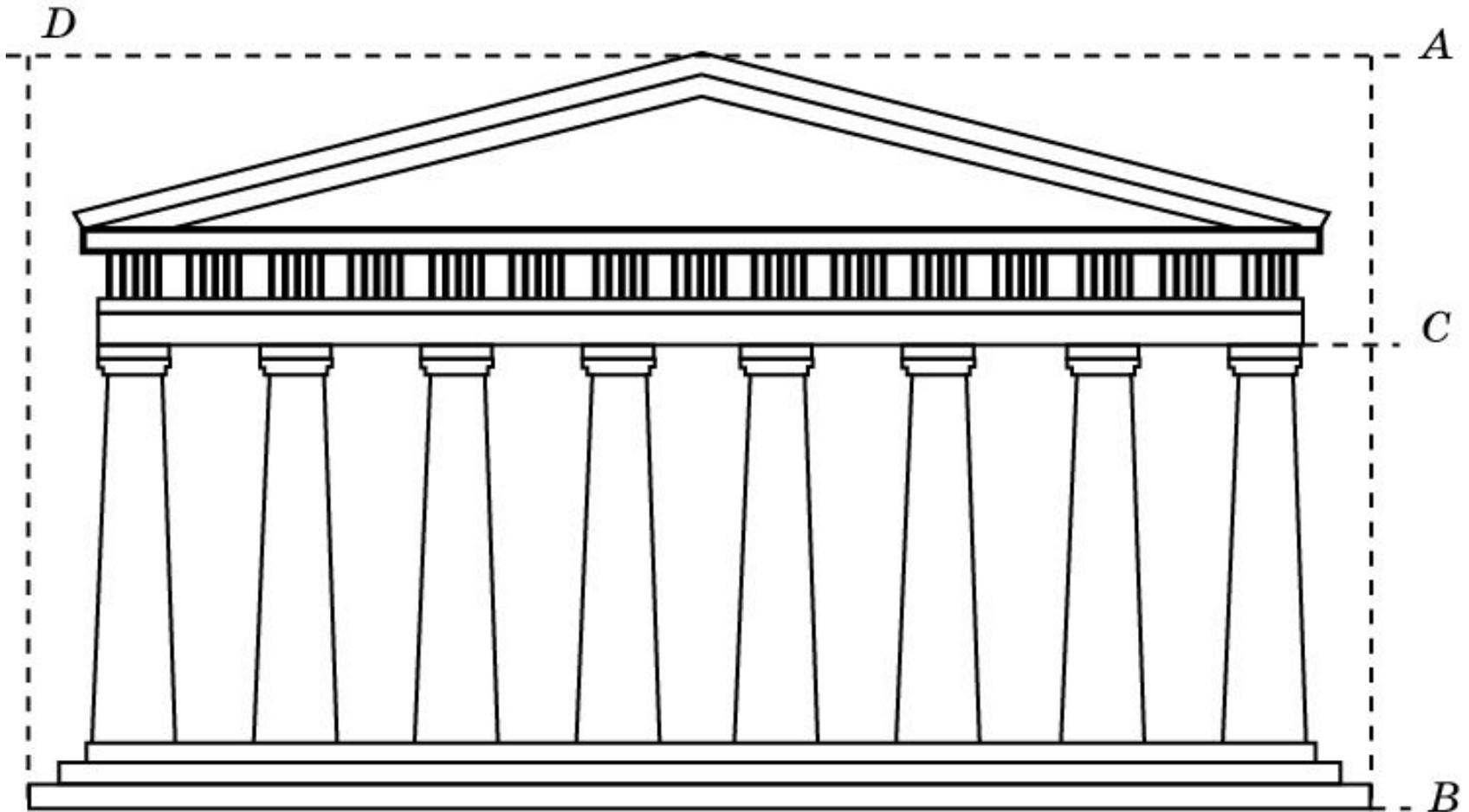
Полученное число обозначается буквой  $\phi$ . Это первая буква в имени великого древнегреческого скульптора Фидия.

# Пропорции головы и руки человека



# Парфенон

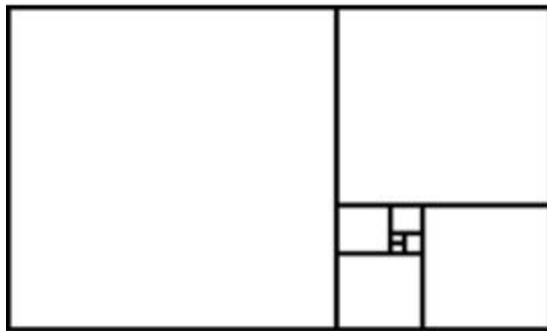
Одно из красивейших произведений древнегреческой архитектуры - Парфенон в Афинах (V в. до н.э.) содержит в себе золотые пропорции. Так отношение высоты  $AB$  здания к его длине  $AD$  равно  $\phi$ . Кроме того, отношение  $AC$  к  $BC$  также равно  $\phi$ .



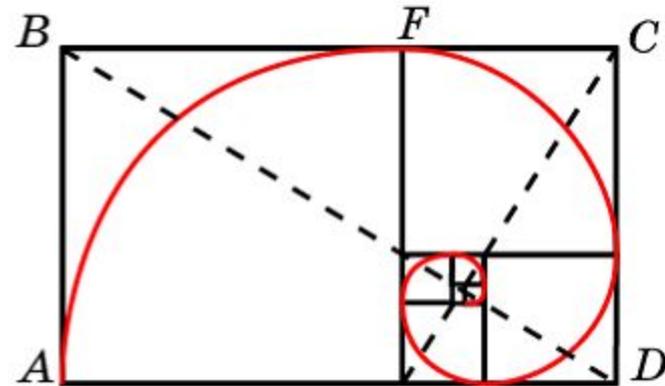
# Золотой прямоугольник

Прямоугольник, стороны которого находятся в золотом отношении, называется **золотым прямоугольником**.

Если от золотого прямоугольника отрезать квадрат со стороной, равной меньшей стороне прямоугольника, то снова получим золотой прямоугольник меньших размеров, подобный исходному.



а)



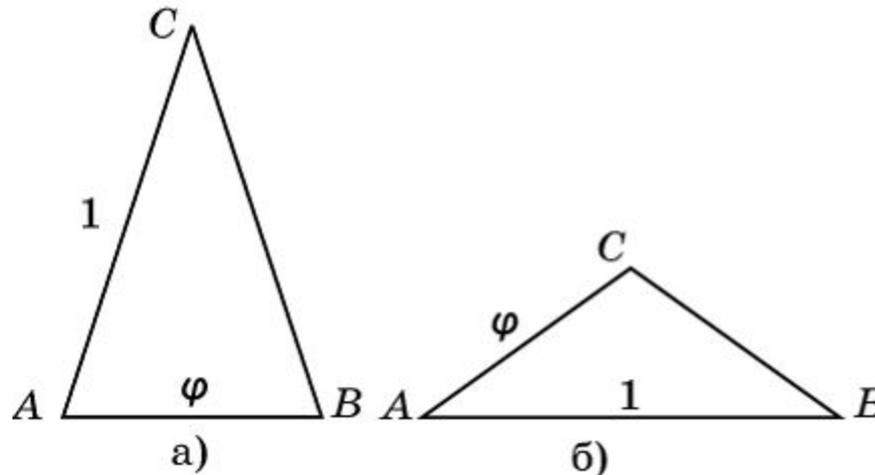
б) E

Если этот процесс продолжить, то мы получим так называемые вращающиеся квадраты, и весь прямоугольник окажется составленным из этих квадратов (рис. а). Если вершины квадратов соединить плавной кривой, то получим кривую, называемую **золотой спиралью** (рис. б).

# Золотые треугольники

Равнобедренный треугольник называется **ЗОЛОТЫМ**, если его боковая сторона и основание находятся в золотом отношении.

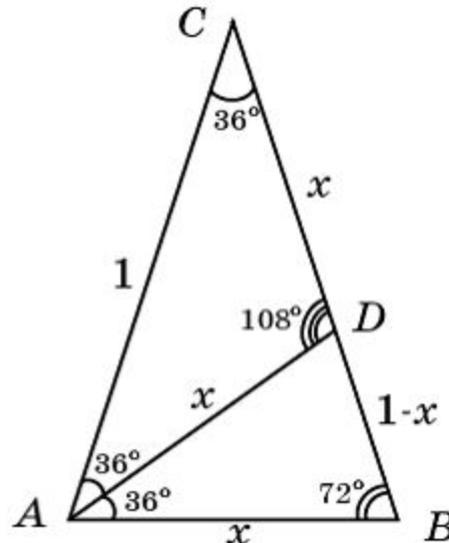
Возможны два типа золотых треугольников. В первом случае  $AB : AC = \varphi$ . Во втором случае  $AC : AB = \varphi$ .



# Золотые треугольники

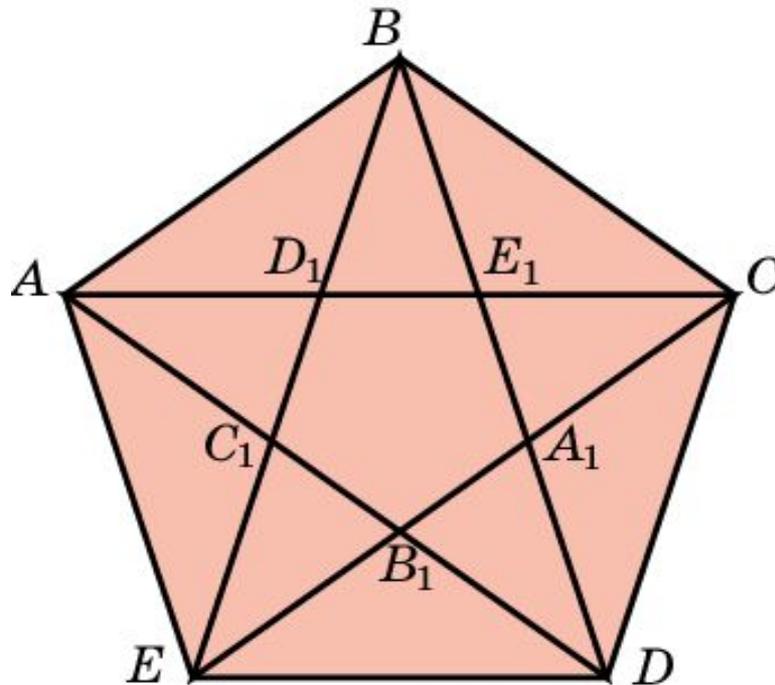
**Теорема.** Золотыми треугольниками являются равнобедренные треугольники с углами при вершинах  $36^\circ$  и  $108^\circ$ .

**Доказательство.** Пусть  $ABC$  – равнобедренный треугольник ( $AC = BC = 1$ ,  $AB = x$ ), угол  $C$  равен  $36^\circ$ . Проведем биссектрису  $AD$ . Треугольники  $ABD$  и  $ACB$  подобны по трем углам. Следовательно,  $BD : AB = AB : AC$ , т.е.  $1 - x : x = x : 1$ . Решая это уравнение относительно  $x$ , находим  $x = \varphi$ . Значит, треугольник  $ABC$  – золотой. Заметим, что треугольник  $ACD$  – также золотой.



# Пентаграмма

Правильный пятиугольник с проведенными в нем диагоналями, образующими звездчатый правильный пятиугольник называется **пентаграммой**. Все треугольники, на которые при этом разбивается пятиугольник, являются золотыми.



# Вопрос 1

Что называется золотым сечением?

**Ответ:** Золотым сечением называется такое делением целого на две неравные части, при котором меньшая часть так относится к большей, как большая часть относится ко всему целому.

## Вопрос 2

Каким числом выражается золотое сечение?

Ответ:  $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ .

## Вопрос 3

Как обозначается число, выражающее золотое сечение?

Ответ:  $\varphi$ .

## Вопрос 4

В честь кого золотое сечение обозначается буквой φ?

**Ответ:** В честь древнегреческого скульптора Фидия.

## Вопрос 5

Какой прямоугольник называется золотым?

**Ответ:** Золотым прямоугольником называется прямоугольник, стороны которого находятся в золотом отношении.

## Вопрос 6

Какие треугольники называются золотыми?

**Ответ:** Золотым называется равнобедренный треугольник, боковая сторона и основание которого находятся в золотом отношении.

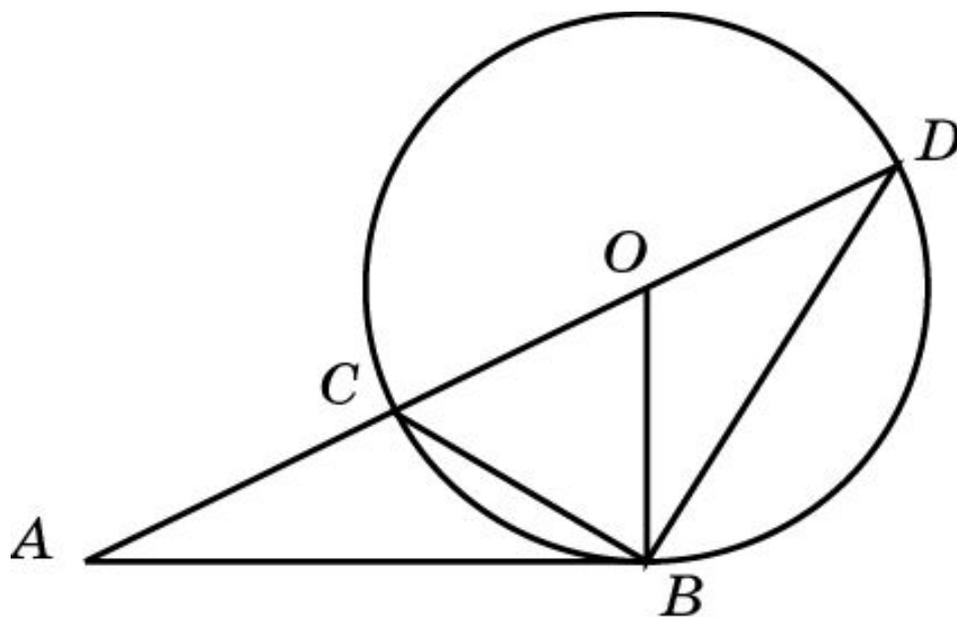
## Вопрос 7

Что такое пентаграмма?

**Ответ:** Пентаграммой называется правильный пятиугольник с проведенными в нем диагоналями.

## Упражнение 1

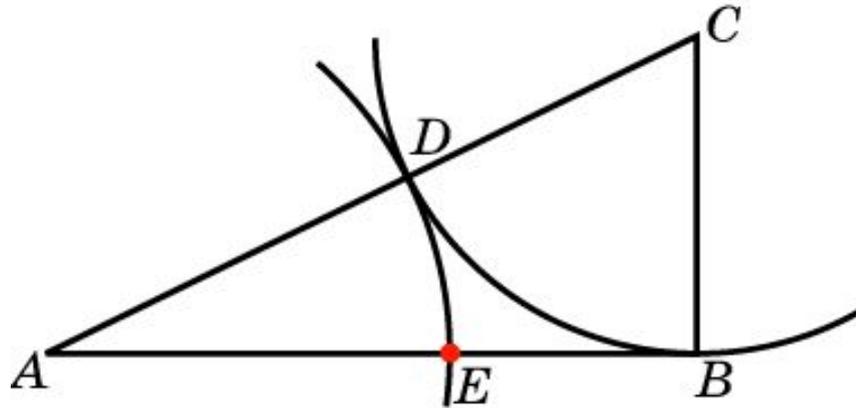
На рисунке окружность с центром в точке  $O$  касается прямой  $AB$  в точке  $B$ ,  $2OB = AB$ .  
Найдите отношение отрезков  $AC$  и  $AB$ .



Ответ:  $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ .

## Упражнение 2

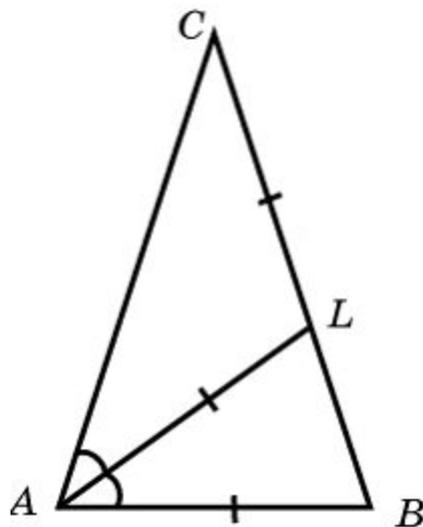
Используя циркуль и линейку, разделите данный отрезок  $AB$  в золотом отношении.



**Решение:** Через точку  $B$  проведем прямую, перпендикулярную прямой  $AB$ , отложим на ней отрезок  $BC$ , равный половине отрезка  $AB$ . Проведем отрезок  $AC$ . С центром в точке  $C$  проведем окружность радиуса  $BC$ , ее точку пересечения с отрезком  $AC$  обозначим  $D$ . С центром в точке  $A$  проведем окружность радиуса  $AD$ , ее точку пересечения с отрезком  $AB$  обозначим  $E$ . Эта точка и будет делить отрезок  $AB$  в золотом отношении.

## Упражнение 3

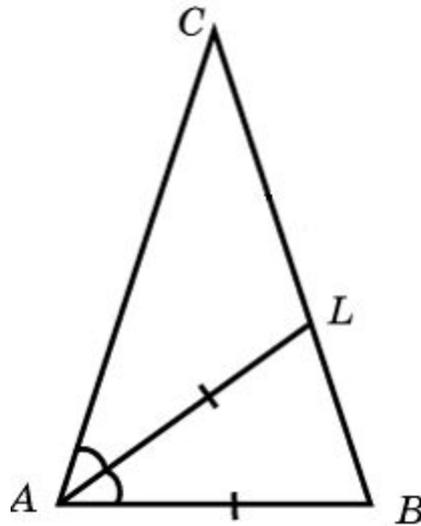
В треугольнике  $ABC$  биссектриса  $AL$  равна отрезку  $LC$  и стороне  $AB$ . Найдите угол  $C$ .



Ответ:  $36^\circ$ .

## Упражнение 4

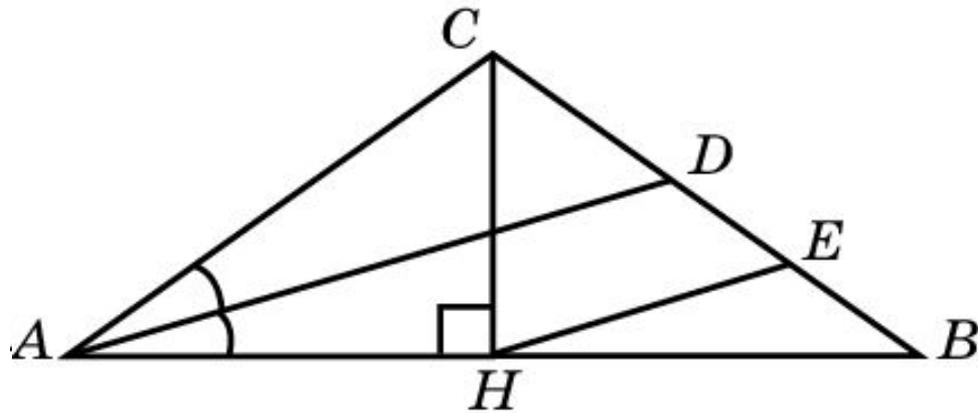
Биссектриса, проведенная из вершины основания равнобедренного треугольника, равна основанию. Найдите угол при основании этого треугольника.



Ответ:  $72^\circ$ .

## Упражнение 5

Угол при основании равнобедренного треугольника  $ABC$  ( $AC = BC$ ) равен  $36^\circ$ . Высота  $CH$ , опущенная на основание, равна 1. Найдите биссектрису  $AD$ , проведенную из вершины основания.

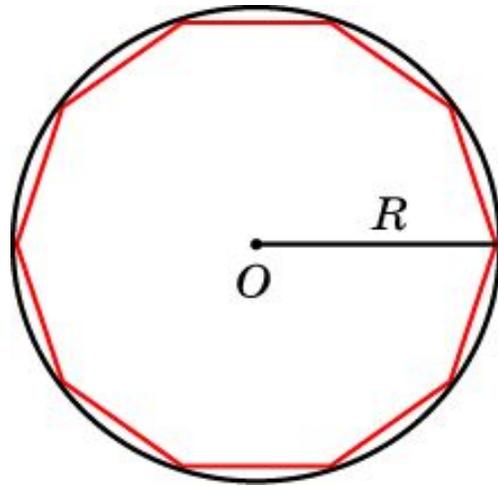


**Решение.** Проведем среднюю линию  $HE$  треугольника  $ABD$ . Угол  $HEB$  равен углу  $ADB$  и равен  $54^\circ$ . Угол  $HCE$  также равен  $54^\circ$ . Следовательно, треугольник  $HCE$  – равнобедренный,  $HC = HE = 0,5$ .

**Ответ.** 0,5.

## Упражнение 6

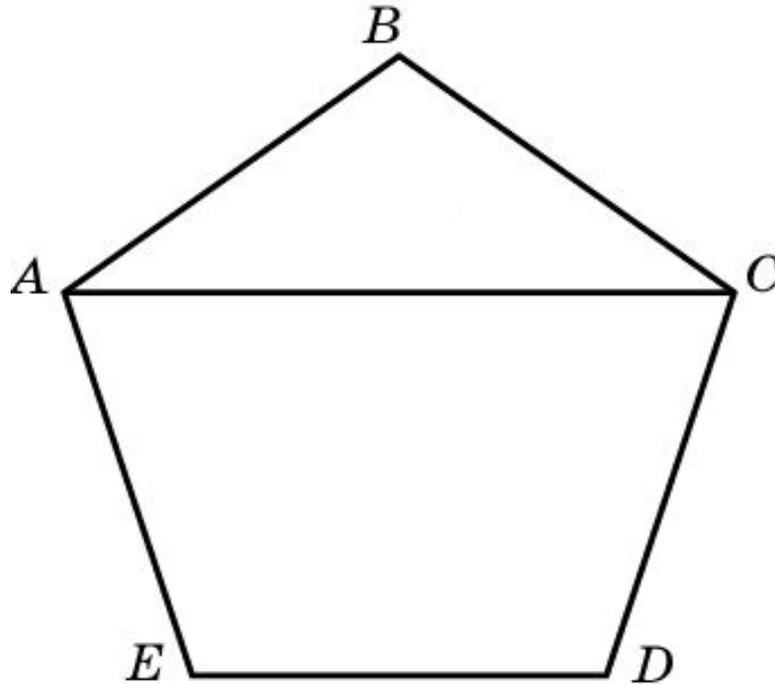
Найдите радиус окружности, описанной около правильного десятиугольника со стороной 1.



Ответ:  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

## Упражнение 7

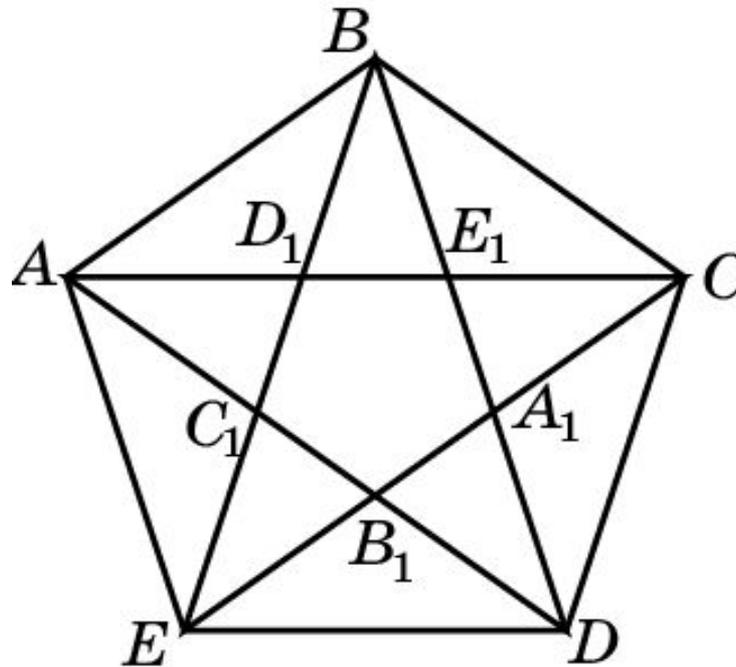
Сторона правильного пятиугольника равна 1.  
Найдите его диагональ.



Ответ:  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

## Упражнение 8

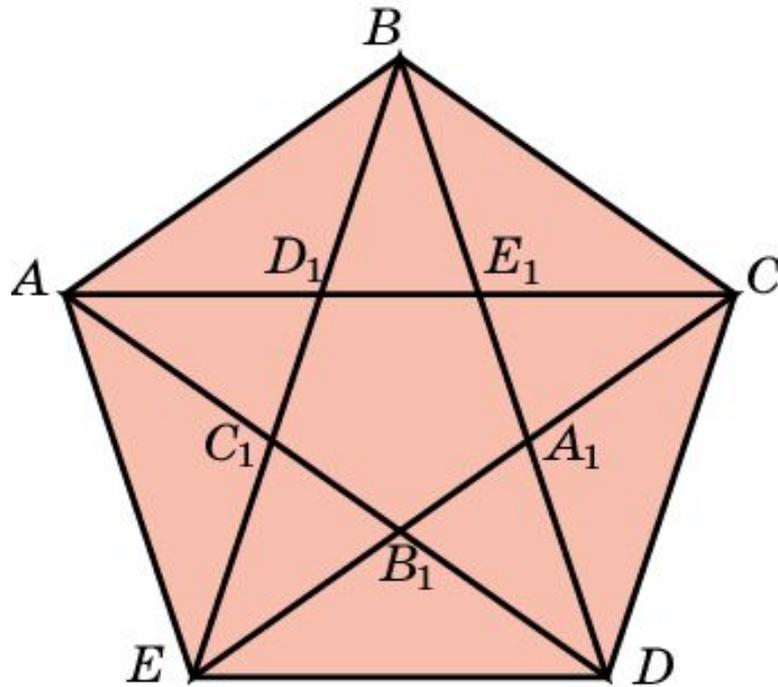
В каком отношении точка  $E_1$  делит отрезок  $AC$ ?



**Ответ:** В золотом.

## Упражнение 9

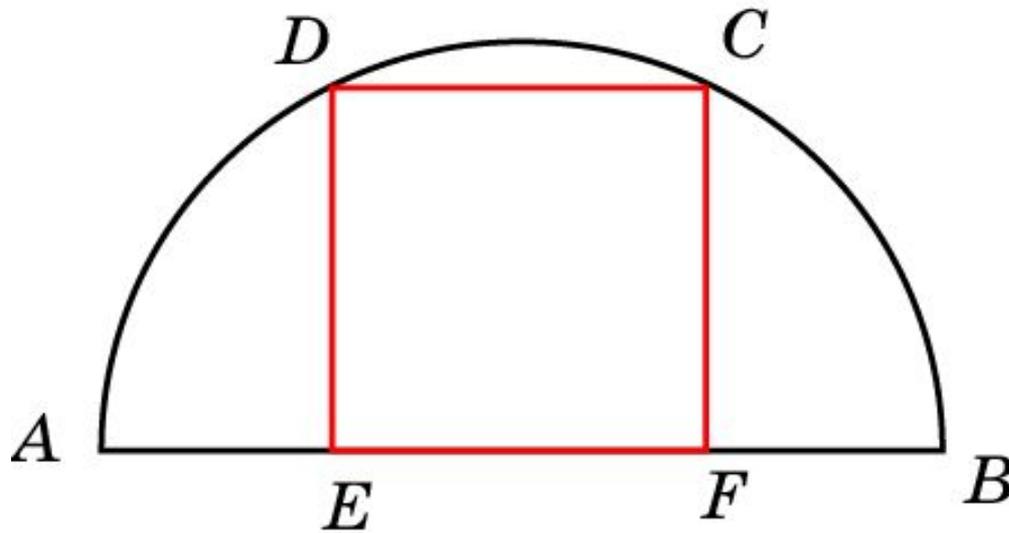
Докажите, что диагонали правильного пятиугольника образуют правильный пятиугольник. Найдите сторону этого пятиугольника, если сторона исходного пятиугольника равна 1.



Ответ:  $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ .

## Упражнение 10

В полукруг с диаметром  $AB$  вписан квадрат  $CDEF$ . Найдите отношение отрезков  $AE$  и  $ED$ .



Ответ:  $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ .

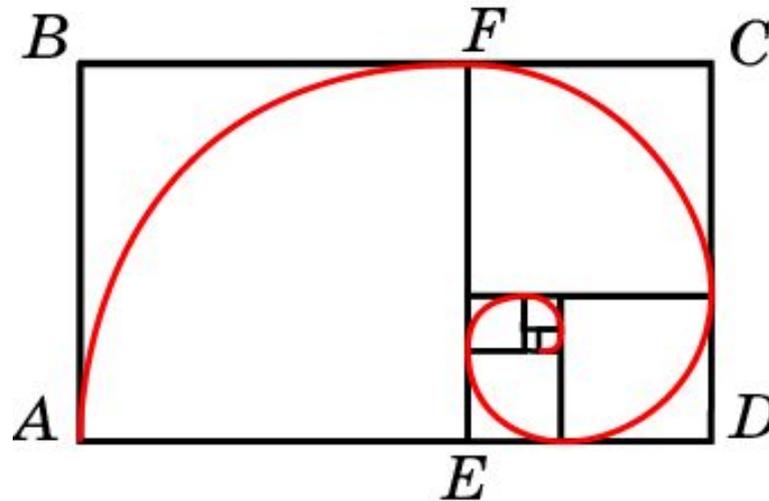
## Упражнение 11

Катет прямоугольного треугольника равен 1. Найдите его гипотенузу, если угол, противолежащий данному катету, равен: а)  $18^\circ$ ; б)  $54^\circ$ .

**Ответ:** а)  $\sqrt{5} + 1$ ;  
б)  $\sqrt{5} - 1$ .

## Упражнение 12

Докажите, что каждый следующий виток золотой спирали подобен предыдущему. Найдите коэффициент подобия.

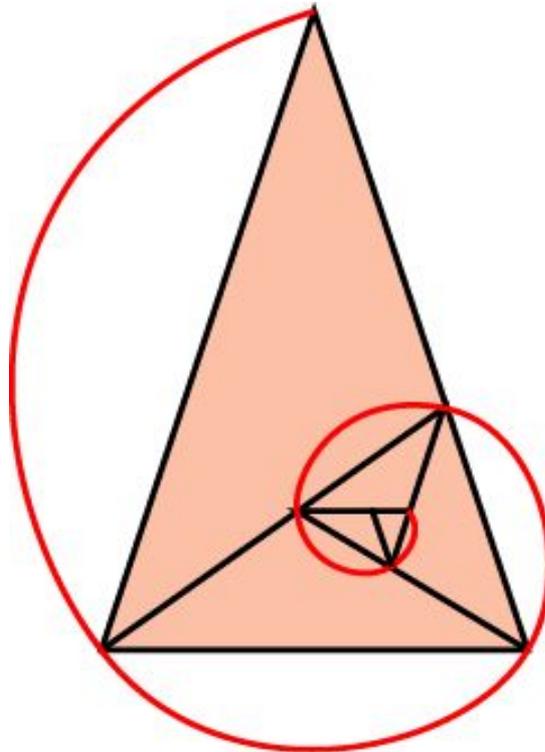


Ответ:  $\varphi^4 = 2 - 3\varphi = \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}$ .

## Упражнение 13

Отсекая золотые треугольники, аналогично тому, как это было сделано для золотого прямоугольника, постройте последовательность вращающихся золотых треугольников.

Ответ:



## Упражнение 14\*

Бумажная лента постоянной ширины завязана простым узлом и затем расправлена так, чтобы узел стал плоским. Докажите, что узел имеет форму правильного пятиугольника.

