

РЯДЫ ДИНАМИКИ

Данные, используемые в статистическом исследовании, могут быть 2-ух типов:

- пространственные;
- временные (временные ряды).

Одной из важнейших задач статистики является изучение изменений показателей во времени, т.е. их динамики. Эта задача решается с помощью анализа рядов динамики (временных рядов, time series).

Временной ряд (time series), или ***ряд динамики*** – расположенные в хронологической последовательности числовые значения показателя (показателей), характеризующие изменение явления во времени.

В каждом ряду динамики выделяют 2 основных элемента:

1) Время (t) – это момент или период времени, к которому относятся числовое значение показателя (показателей).

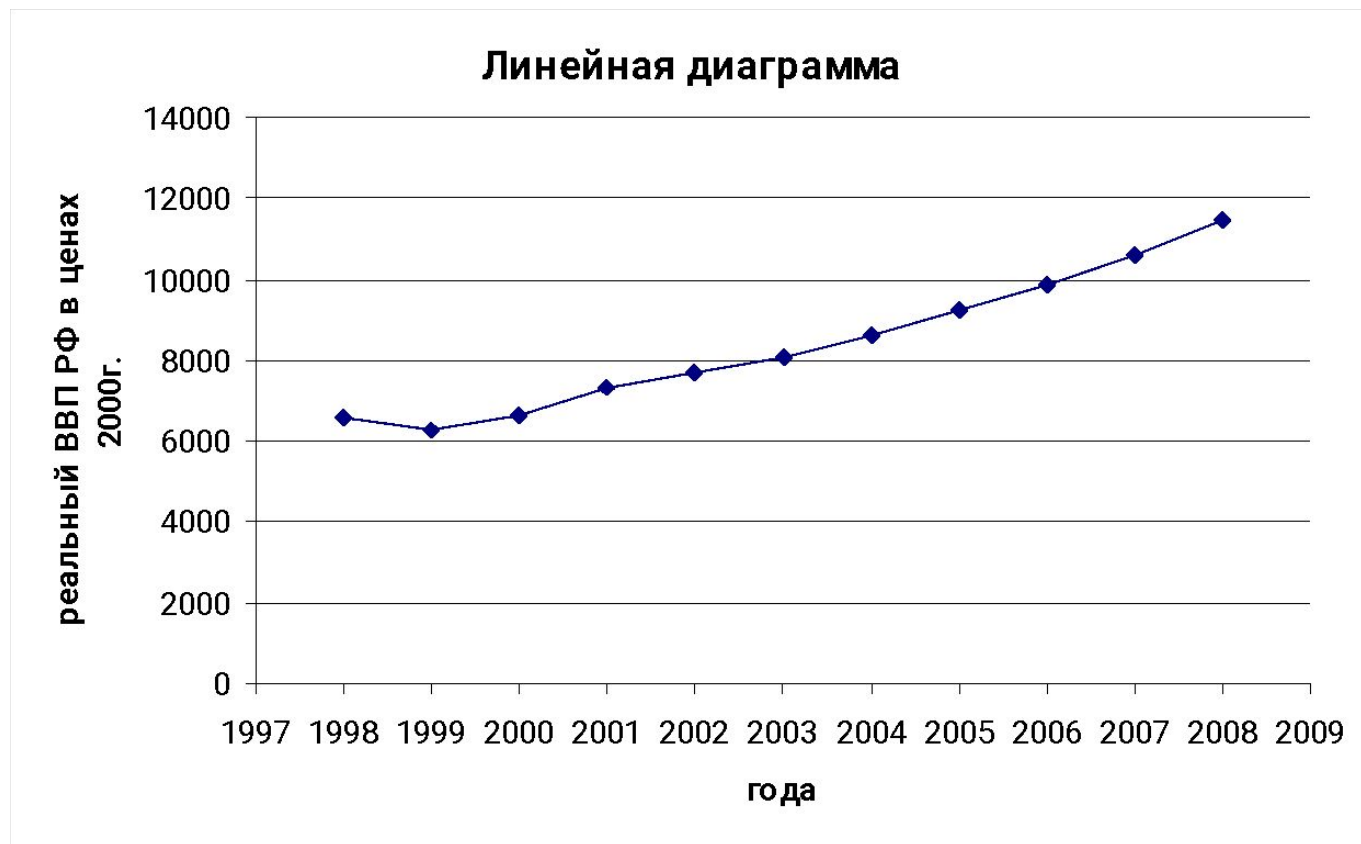
2) Уровень ряда (Y) – это числовое значение показателя, относящееся к определенному моменту или периоду времени.

Оформляется ряд динамики в виде таблицы.

t_1	t_2	...	t_N
Y_1	Y_2	...	Y_N

Длина ряда динамики определяется числом уровней (периодов или моментов времени). Длина приведенного выше ряда равна N .

Ряды динамики могут быть изображены графически. Наиболее распространенным видом графического изображения является линейная диаграмма, которая строится в прямоугольной системе координат. По оси абсцисс откладывается время, а по оси ординат – уровни ряда. Другие способы графического изображения рядов динамики: столбиковая диаграмма; секторная диаграмма и другие.



ВИДЫ РЯДОВ ДИНАМИКИ.

1. В зависимости от вида показателя - уровня динамического ряда, выделяют ряды *из абсолютных, средних или относительных величин.*

Показатели строительства квартир в России

Способ выражения уровня	Показатель – уровень ряда	Периоды времени				
		1980	1985	1992	1993	1994
Абсолютная величина	Число квартир, тыс.	1190	1151	682	682	630
Средняя величина	Средний размер общей площади квартир, м ²	49,9	54,4	60,8	61,3	61,9
Относительная величина	Удельный вес жилой площади в общей площади квартир, %	62,7	60,7	60,0	60,1	60,1

2. По времени, отраженному в динамических рядах, динамические ряды разделяются на моментные и интервальные (периодические).

Моментным называется ряд динамики, уровни которого характеризуют состояние явления (наличие явления) на определенные даты (моменты) времени.

Примером моментного ряда могут служить данные о численности населения Российской Федерации на конец года. Численность постоянного населения РФ (на конец года), млн. чел.

t	1980	1990	1995	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Y	138,8	148,3	148,3	146,3	145,6	145	144,2	143,5	142,8	142,2	142

Поскольку в каждом последующем уровне содержится полностью или частично значение предыдущего уровня, суммировать уровни моментного ряда нельзя, т.к. это приводит к повторному счету.

Интервальным (периодическим) рядом называется ряд динамики, уровни которого характеризуют размер явления за конкретный период времени (год, месяц и т.п.). Уровни такого ряда динамики характеризуют результат, накопленный или вновь произведенный за определенный период времени. Примером такого ряда могут служить данные о реальном ВВП РФ в ценах 2000г., трлн.руб. - Y:

<i>t</i>	1998	1999	2000	2001	2002	2003
Y	6 596,3	6 246,7	6 646,5	7 311,1	7 684,0	8 045,2
<i>t</i>	2004	2005	2006	2007	2008	
Y	8 632,5	9 254,0	9 846,3	10574,9	11431,4	

Значения уровней интервального ряда из абсолютных показателей в отличие от уровней моментного ряда не содержатся в предыдущих или последующих уровнях, их можно суммировать, что позволяет получать ряды динамики укрупненных периодов.

3. В зависимости от расстояния между уровнями во времени, ряды динамики подразделяются на ряды **с равноотстоящими** уровнями и **неравноотстоящими** уровнями.

Ряды динамики следующих друг за другом периодов или следующих через определенные (одинаковые) промежутки моментов называются равноотстоящими (например, данные о реальном ВВП РФ).

Если же в рядах какие-то периоды пропущены или приведены неравные промежутки между моментами, то ряды называются неравноотстоящими (например, данные о численности населения).

4. Выделяют **стационарные** и **нестационарные ряды динамики**.

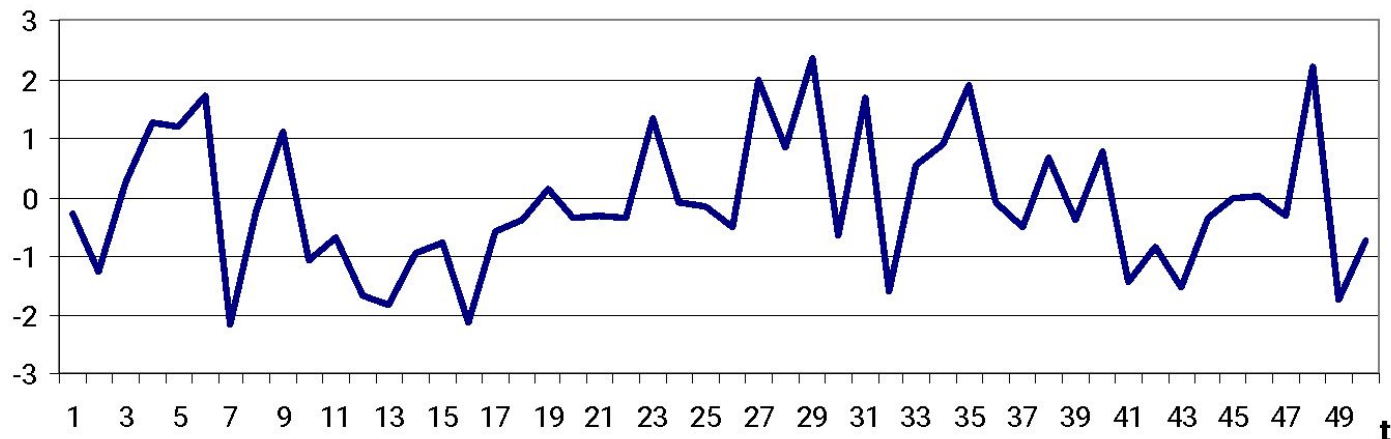
Если математическое ожидание и дисперсия уровня ряда (основные характеристики случайного процесса) – постоянны, не зависят от времени, то процесс считается стационарным в узком смысле слова, и ряды динамики тоже называются стационарными.

Следовательно, стационарным будет тот ряд динамики, значения которого с течением времени колеблются вокруг фиксированного уровня, не возрастая и не убывая.

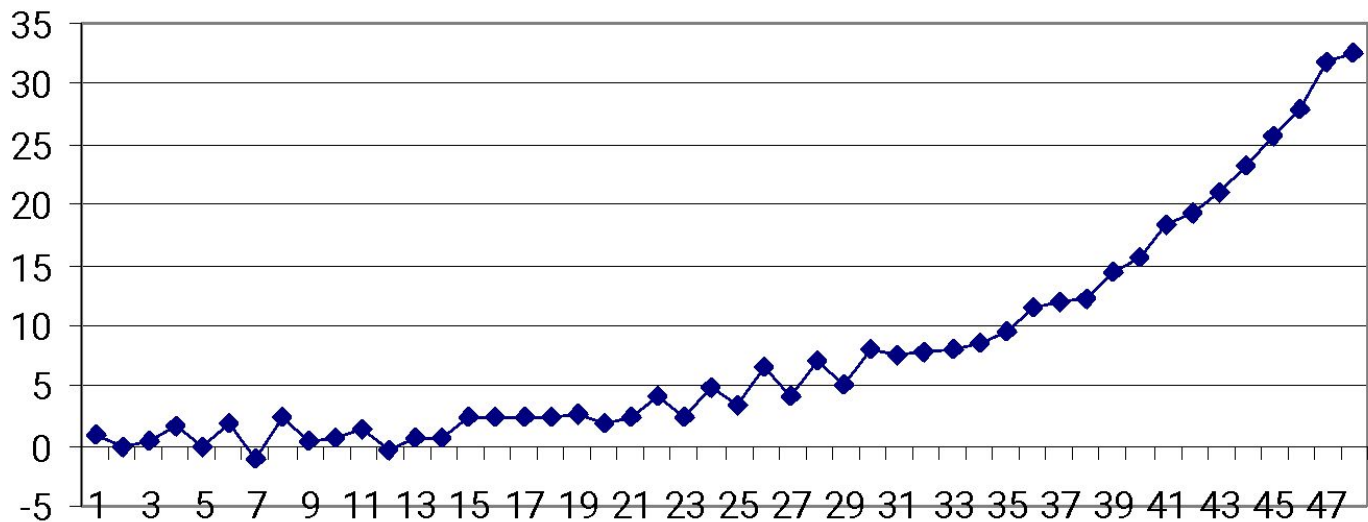
Если мат.ожидание или дисперсия уровня ряда с течением времени закономерно меняются, то ряд считается нестационарным в узком смысле. Такой ряд имеет тренд (т.е. имеет тенденцию к возрастанию или убыванию).

Экономические процессы во времени обычно не являются стационарными, но их можно преобразовать в стационарные путем исключения тренда (основной тенденции).

Пример стационарного временного ряда



Пример нестационарного временного ряда



5. В зависимости от того содержит ряд хронологическую последовательность одного или нескольких показателей - уровней, различают - изолированные ряды (содержащие только один показатель - уровень) - и комплексные ряды (содержащие несколько взаимосвязанных показателей). Примером может служить комплексный ряд, приведенный в таблице 1 (показатели строительства квартир).

СОПОСТАВИМОСТЬ УРОВНЕЙ И СМЫКАНИЕ РЯДОВ ДИНАМИКИ.

Важнейшим условием правильного построения ряда динамики является сопоставимость всех входящих в него уровней. За выполнением данного требования следят в процессе сбора или обработки данных.

Если этого сделать не удалось, прибегают к пересчету данных.

Для приведения уровней к сопоставимому виду прибегают к приему - **смыканию рядов динамики.**

Под **смыканием** понимают объединение в один ряд (более длинный) двух или нескольких рядов динамики, уровни которых исчислены по разной методологии или в разных территориальных границах. Для осуществления смыкания необходимо, чтобы для одного из периодов – переходного - имелись данные, исчисленные по разной методологии (или в разных территориальных границах).

Существует **два способа смыкания рядов:**

- 1) пересчет по коэффициенту соотношения уровней 2-х рядов;
- 2) приведение к одному основанию.

Согласно *первому способу* нужно найти соотношение между уровнями одного периода (момента), рассчитанными по новой и старой методикам. Затем умножить на полученный коэффициент уровни, рассчитанные по старой методике.

Согласно *второму способу* нужно уровень, относящийся к периоду, в котором произошли изменения, принять за 100%, а остальные пересчитать в процентах по отношению к данному. Причем для уровней, рассчитанных по старой методике, за 100% принимается значение уровня переходного периода, соответствующего старой методике. А для уровней, рассчитанных по новой методике, за 100% принимается значение уровня переходного периода, соответствующего новой методике.

Пример:

Имеются данные о динамике объема производства

Годы	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Объем продукции (млн.руб.)							
По старой мет-ке	19,7	20,0	21,2	-	-	-	-
По новой методике	-	-	22,8	23,6	24,5	26,2	28,1
Сомкнутый (сопоставимый) ряд абсолютных величин - 1ый способ	21,7	22,0	22,8	23,6	24,5	26,2	28,1
Сопоставимый ряд относительных величин, в % к 2001г. - 2ой способ	92,9	94,3	100	103,5	107,5	114,9	123,2

В нашем примере период времени - 2001г. является переходным, т.к. для которого имеются данные об объеме продукции по новой и старой методикам.

В соответствии с *первым способом* пересчета найдем переводной коэффициент. Для этого разделим уровень 2001 г. по новой методике на уровень того же года по старой методике: $22,8 : 21,2 = 1,1$. Это и будет переводной коэффициент. Умножая на полученный коэффициент данные за 1999-2001гг., приводим их в сопоставимый вид с последующими уровнями. Смотри предпоследнюю строку таблицы .

В соответствии со *вторым* способом для условия нашего примера за 100% принимаются уровни 2001г. Уровни 1999-2000гг. пересчитываются в процентах по отношению к 22,2 (т.е. к уровню 2001г., соответствующего старой методике). А уровни 2002-2005гг. пересчитываются в процентах по отношению к 22,8 (т.е. к уровню 2001г., соответствующего новой методике). В результате получаем сомкнутый ряд динамики, который показан в последней строке таблицы.

ПОКАЗАТЕЛИ ИЗМЕНЕНИЯ УРОВНЕЙ РЯДОВ ДИНАМИКИ (ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ ДИНАМИКИ)

Анализ скорости и интенсивности развития явлений во времени осуществляется с помощью статистических показателей:

- *абсолютного прироста,*
- *абсолютного ускорения,*
- *коэффициента роста,*
- *темпа роста,*
- *темпа прироста,*
- *абсолютного значения одного процента прироста,*
- *пункта роста.*

Каждому из них соответствует свой временной ряд значений.

Длина такого ряда меньше (обычно на единицу) длины исходного ряда динамики.

При расчете индивидуального показателя динамики сопоставляются 2 уровня исходного ряда:

- текущий уровень (который сравнивается);
- базисный уровень - база сравнения (с которым производят сравнение).

В зависимости от того, какой уровень берется в качестве базы сравнения, возможны два варианта построения индивидуального показателя динамики:

1) Показатель динамики с постоянной базой сравнения (**базисный показатель**) получается при сравнении с одним и тем же (чаще всего начальным) уровнем, принятым за базу сравнения. Базисный показатель характеризует окончательный результат всех изменений в уровнях ряда от периода (момента), к которому относится базисный уровень, до текущего периода (момента).

2) Показатель динамики с переменной базой сравнения (**цепной показатель**) получается при сравнении с предшествующим уровнем. Цепной показатель характеризует изменение уровня от периода к периоду (или от даты к дате).

Абсолютный прирост – Δy_i

Формула расчета		Интерпретация	Свойства
Базисного показателя	Цепного показателя		
$\Delta y_i^{\text{б}} = y_i - y_1$	$\Delta y_i^{\text{ц}} = y_i - y_{i-1}$	Показывает на сколько текущий уровень превышает базисный (абсолютная скорость роста)	Сумма последовательных цепных абсолютных приростов равна базисному приросту последнего периода (момента) времени $\sum_{i=2}^N \Delta y_i^{\text{ц}} = \Delta y_N^{\text{б}}$

Абсолютное ускорение – $\Delta^2 y_i$

Формула расчета		Интерпретация	Свойства
Базисного показателя	Цепного показателя		
	$\Delta^2 y_i = \Delta^c y_i - \Delta^c y_{i-1}$	Прирост абсолютного прироста (абсолютное ускорение)	

Сила роста или коэффициент роста – Kp_i

Формула расчета		Интерпретация	Свойства
Базисного показателя	Цепного показателя		
$Kp_i^{\text{б}} = y_i / y_1$	$Kp_i^{\text{ц}} = y_i / y_{i-1}$	Показывает во сколько раз текущий уровень превышает базисный	Произведение последовательных цепных коэффициентов роста равно базисному коэффициенту роста за весь промежуток времени $Kp_2^{\text{ц}} \cdot Kp_3^{\text{ц}} \cdot \dots \cdot Kp_N^{\text{ц}} = Kp_N^{\text{б}}$

Темп роста – Tr_i

Формула расчета		Интерпретация	Свойства
Базисного показателя	Цепного показателя		
$Tr_i^б = Kp_i^б \cdot 100\%$	$Tr_i^ц = Kp_i^ц \cdot 100\%$	Показывает сколько процентов составляет текущий уровень от базисного	

Темп прироста – $T_{пр}_i$

Формула расчета		Интерпретация	Свойства
Базисного показателя	Цепного показателя		
$T_{пр}_i^б = \frac{\Delta y_i^б}{y_1} = \frac{(y_i - y_1)}{y_1} 100\% = \frac{y_i}{y_1} \cdot 100\% - 100\% = T_{р}_i^б - 100\%$	$T_{пр}_i^ц = \frac{\Delta y_i^ц}{y_{i-1}} = \frac{(y_i - y_{i-1})}{y_{i-1}} 100\% = \frac{y_i}{y_{i-1}} 100\% - 100\% = T_{р}_i^ц - 100\%$	<p>Показывает на сколько процентов текущий уровень больше (меньше) базисного</p>	

Абсолютное значение одного процента прироста – A_i

Формула расчета		Интерпретация
Базисного показателя	Цепного показателя	
	$A_i = \frac{(y_i - y_{i-1})}{Tnp_i^y} =$ $= \frac{(y_i - y_{i-1}) \cdot y_{i-1}}{(y_i - y_{i-1})100\%} =$ $= 0,01 \cdot y_{i-1}$	Показывает, какое абсолютное значение скрывается за относительным показателем 1% прироста

Пункт роста – P_i

Формула расчета	Интерпретация
$P_i = Tr_i^{\bar{b}} - Tr_{i-1}^{\bar{b}} =$ $= \frac{y_i}{y_1} - \frac{y_{i-1}}{y_1} = \frac{y_i - y_{i-1}}{y_1} = \frac{\Delta y_i^y}{y_1}$	Показывает на сколько изменился базисный темп роста за период

Область допустимых значений коэффициента роста и темпа роста от нуля до плюс бесконечности. Область допустимых значений абсолютного прироста, темпа прироста, абсолютного ускорения от минус бесконечности до плюс бесконечности.

Абсолютные показатели динамики (абсолютный прирост, абсолютное ускорение, абсолютное значение одного процента прироста) – именованные величины; имеют те же единицы измерения, что и уровень ряда. Относительные показатели динамики выражены в процентах или в долях единицы. Если уровень ряда принимает разнознаковые значения, например, y - результат деятельности предприятия (прибыль или убыток), то рассчитывать относительные показатели динамики (K_p , T_p , $T_{пр}$, P) нельзя, т.к. получаются величины, неподдающиеся интерпретации.

СВОДНЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ РЯДА ДИНАМИКИ

Для обобщающей характеристики динамики исследуемого явления определяют средние показатели динамики: *средний уровень ряда и средние показатели изменения уровней ряда.*

СРЕДНИЙ УРОВЕНЬ РЯДА

Метод расчета **среднего уровня ряда** динамики зависит от вида временного ряда.

Для *интервального* ряда средний уровень рассчитывается по формуле среднего арифметического. В случае равноотстоящих интервалов - по формуле простого среднего арифметического:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^N y_i}{N}$$

При неравноотстоящих интервалах - по формуле взвешенного арифметического с весами равными расстоянию между уровнями по времени.

Средний уровень *моментного* ряда определяется по формуле среднего хронологического. Для моментных рядов с равноотстоящими уровнями средний уровень моментного ряда будет равен простому среднему хронологическому:

$$\bar{y} = \frac{\frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{y_2 + y_3}{2} + \dots + \frac{y_{N-1} + y_N}{2}}{N-1} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_{N-1} + \frac{y_N}{2}}{N-1}$$

При расчете среднего уровня моментный ряд преобразуется в условно интервальный. Интервалы образуют соседние моменты. Уровни такого ряда определяются как средние из уровней на начало и конец интервала. Например, $(y_1+y_2)/2$ - средний уровень за период времени между моментами t_1 и t_2 ; $(y_2+y_3)/2$ – средний уровень за период между моментами t_2 и t_3 и т.д. Средний уровень ряда за весь рассматриваемый промежуток времени $(t_1 - t_N)$ определяется как простое среднее арифметическое из средних, исчисленных за отдельные периоды между датами (всего их будет $N - 1$).

Средний уровень моментного ряда с неравноотстоящими уровнями определяется по формуле среднего хронологического взвешенного с весами - T_i , равными продолжительность промежутков времени между моментами i и $(i+1)$:

$$\bar{y} = \frac{\frac{y_1 + y_2}{2} \cdot T_1 + \frac{y_2 + y_3}{2} \cdot T_2 + \dots + \frac{y_{N-1} + y_N}{2} \cdot T_{N-1}}{(T_1 + T_2 + \dots + T_{N-1})} =$$
$$= \frac{(y_1 + y_2) \cdot T_1 + (y_2 + y_3) \cdot T_2 \dots (y_{N-1} + y_N) \cdot T_{N-1}}{2(T_1 + T_2 + \dots + T_{N-1})}$$

Пример: На основании следующих данных о численности безработных региона -Y, тыс.чел.

На 01.01.2005	1,5
На 01.06.2005.....	0,8
На 01.08.2005.....	0,9
На 01.10.2005.....	1,2
На 01.01.2006.....	1,7

Определите среднегодовую численность безработных.

Решение: Так как ряд моментный с неравноотстоящими уровнями, то воспользуемся формулой средней хронологической взвешенной с весами равными продолжительности периодов между датами:

$$\bar{y} = \frac{(1,5 + 0,8) \cdot 5 + (0,8 + 0,9) \cdot 2 + (0,9 + 1,2) \cdot 2 + (1,2 + 1,7) \cdot 3}{2 \cdot (5 + 2 + 2 + 3)} =$$

$$= \frac{27,8}{2 \cdot 12} = 1,158(\text{тыс.чел.})$$

При определении средних уровней временного ряда нужно иметь в виду, что средняя будет достаточно надежной характеристикой ряда динамики, если она характеризует период с более или менее стабильными уровнями развития. Если же за исследуемый период можно выделить этапы, в течение которых условия развития существенно менялись, то пользоваться общей средней не всегда целесообразно, а предпочтение нужно отдать средним, рассчитанным для отдельных этапов.

СРЕДНИЕ ПОКАЗАТЕЛИ ИЗМЕНЕНИЯ УРОВНЕЙ РЯДА

Средние показатели изменения уровней ряда рассчитываются усреднением цепных показателей динамики.

Средний абсолютный прирост $\overline{\Delta y}$ рассчитывается как простая средняя арифметическая из показателей абсолютных цепных приростов:

$$\overline{\Delta Y} = \frac{\sum_{i=2}^N \Delta Y_i^{\text{ц}}}{N-1} = \frac{\Delta Y_N^{\text{б}}}{N-1} = \frac{Y_N - Y_1}{N-1}$$

Средний абсолютный прирост показывает, насколько в среднем изменяется уровень ряда за единичный промежуток времени.

Средний коэффициент роста (сила роста) - рассчитывается по формуле среднего геометрического из показателей цепных коэффициентов роста:

$$\overline{Kp} = \sqrt[N-1]{Kp_2^y \cdot Kp_3^y \cdot \dots \cdot Kp_N^y} = \sqrt[N-1]{Kp_N^y} = \sqrt[N-1]{\frac{Y_N}{Y_1}}$$

Средний коэффициент роста показывает, во сколько раз в среднем изменяется уровень ряда за единичный промежуток времени.

Средний темп роста представляет собой средний коэффициент роста, выраженный в процентах:

$$\overline{Tr} = \overline{Kp} \cdot 100\%$$

и показывает, сколько процентов в среднем за единичный промежуток времени составляет уровень ряда от предыдущего уровня.

Средний темп прироста показывает, на сколько процентов в среднем за единичный промежуток времени изменяется уровень ряда. Рассчитывается он на основе среднего темпа роста, вычитанием из последнего 100%: $\overline{T_{np}} = \overline{T_p} - 100\%$

Если уровни ряда динамики снижаются, то средний темп роста будет меньше 100%, а средний темп прироста будет отрицательной величиной.

СТРУКТУРА РЯДА ДИНАМИКИ.

Уровни ряда динамики формируются под совокупным влиянием множества факторов, различных по характеру и силе воздействия:

1) Факторов *эволюционного характера*, которые оказывают практически *постоянное воздействие* и формируют в рядах динамики основную тенденцию (тренд).

2) Факторов *осциллятивного характера*, воздействие которых *периодическое*. Влияние факторов осциллятивного характера вызывает циклические (конъюнктурные) и сезонные колебания. Под колебаниями понимают отклонения от тренда.

Сезонные колебания – периодические колебания, которые имеют определенный и постоянный период равный году.

Конъюнктурные колебания связаны с большими экономическими циклами, период таких колебаний – несколько лет.

3) Факторов *нерегулярного воздействия*, вызывающие нерегулярные колебания, которые делятся на: а) спорадически наступающие изменения, вызванные, например, войной, экологической катастрофой; б) случайные колебания, являющиеся результатом действия большого числа относительно слабых второстепенных факторов.

Модель ряда динамики : $Y = f (T, K, S, E)$,

где Y – уровень ряда;

T- трендовый компонент;

K - циклический компонент;

S - сезонный компонент;

E- случайный компонент.

Аддитивная модель

$$Y = T + K + S + E$$

Мультипликативная модель

$$Y = T \cdot K \cdot S \cdot E$$

Выявление основной тенденции (тренда) или трендового компонента **T** называется в статистике **выравниванием ряда динамики**. При этом предполагается, что через время можно выразить влияние всех основных факторов на уровень ряда.

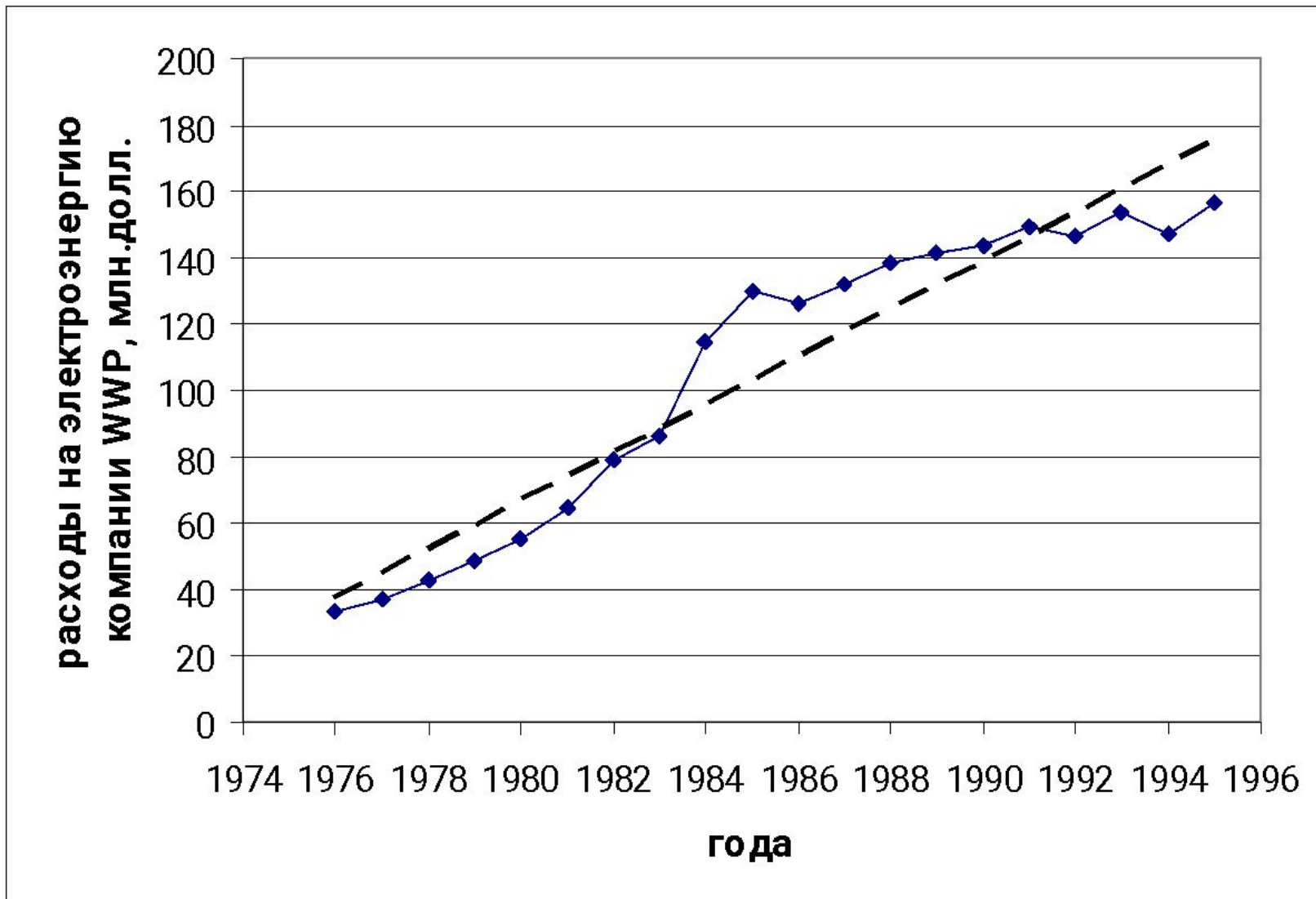
Методы выявления основной тенденции (T):

- 1) сглаживание или механическое выравнивание;
- 2) аналитическое выравнивание - выравнивание с применением аналитической модели (формулы): $T = f(t)$

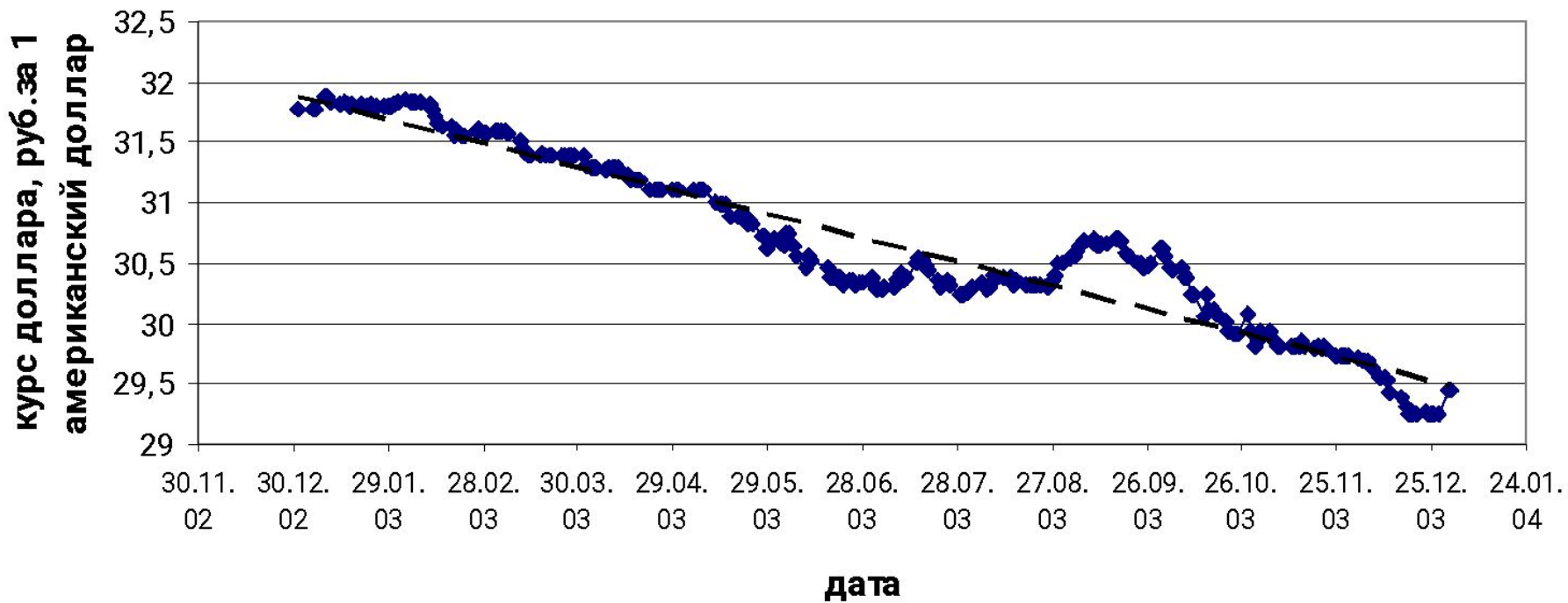
К методам первой группы относятся:

1.1) *Графический метод*. Данный метод основан на визуальном анализе графика, характеризующего ряд динамики. Наиболее распространенным видом графического изображения является линейная диаграмма. Анализ линейной диаграммы позволяет делать вывод о присутствии (отсутствии) тренда в уровнях ряда динамики.

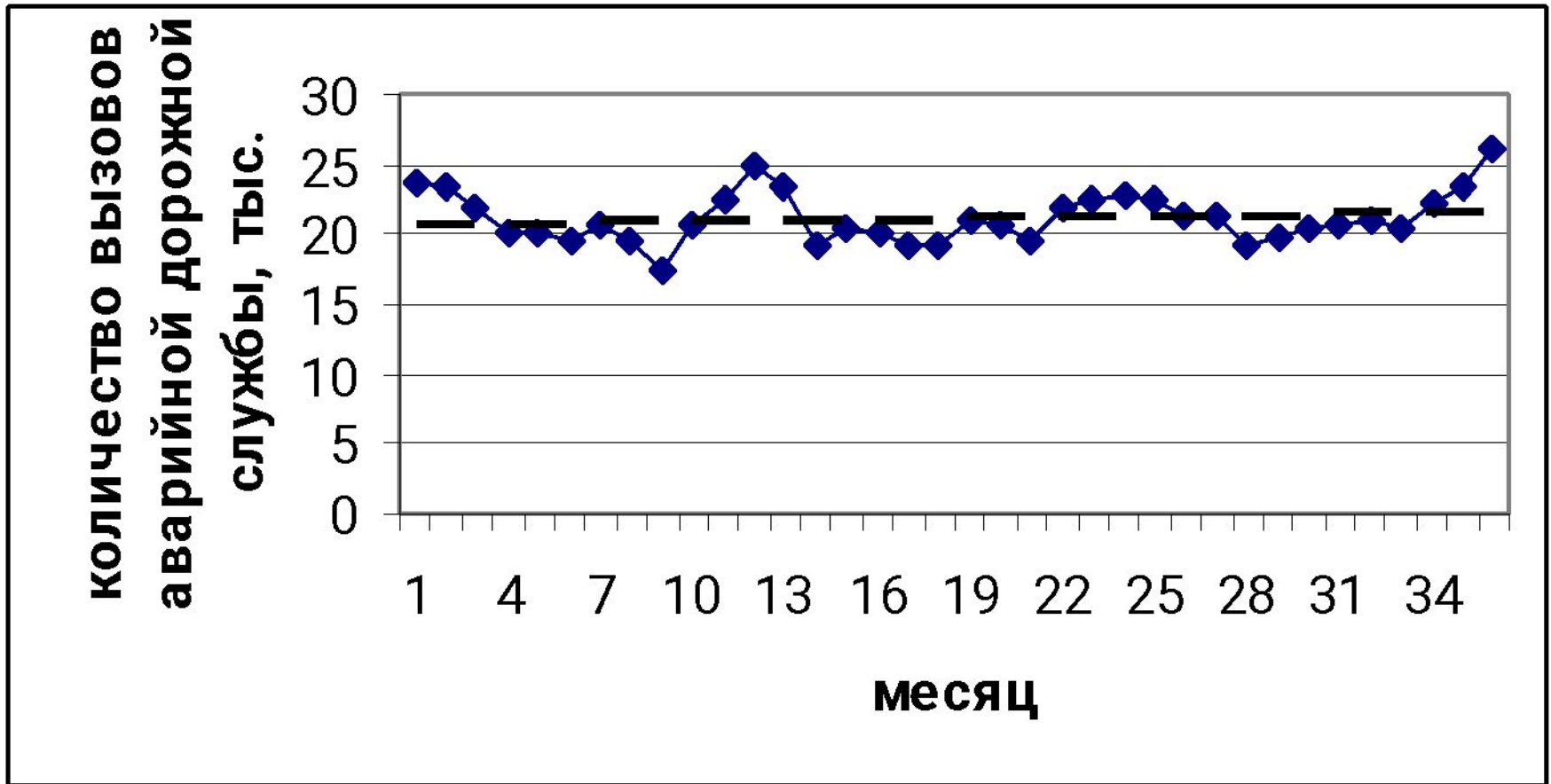
Например, в уровнях ряда, изображенном на рисунке, присутствует возрастающий тренд;



В уровнях ряда, изображенном на рисунке, присутствует понижающийся тренд



В уровнях, соответствующих рисунку, тренд отсутствует.



(Тренд на рисунках изображен пунктирной линией)

1.2) *Метод скользящей средней*. Суть данного метода состоит в следующем: вычисляется средний уровень из L первых по порядку уровней ряда (y_1, \dots, y_L) , затем средний уровень из такого же числа уровней, начиная со второго (y_2, \dots, y_{L+1}) , затем - начиная с третьего (y_3, \dots, y_{L+2}) и т.д. Таким образом, интервал сглаживания как бы скользит по ряду динамики, каждый раз сдвигаясь на один уровень. Полученная средняя относится к середине интервала сглаживания. Поэтому технически удобнее составлять интервал из нечетного числа уровней ряда ($L=3, 5, \text{ или } 7$).

Нахождение скользящей средней по четному числу уровней ряда несколько сложнее, так как средняя может быть отнесена только к середине интервала, т.е. попадает между двумя средними датами. В этом случае прибегают к центрированию. Центрирование заключается в нахождении средней из двух соседних скользящих средних для отнесения полученной средней к определенной дате.

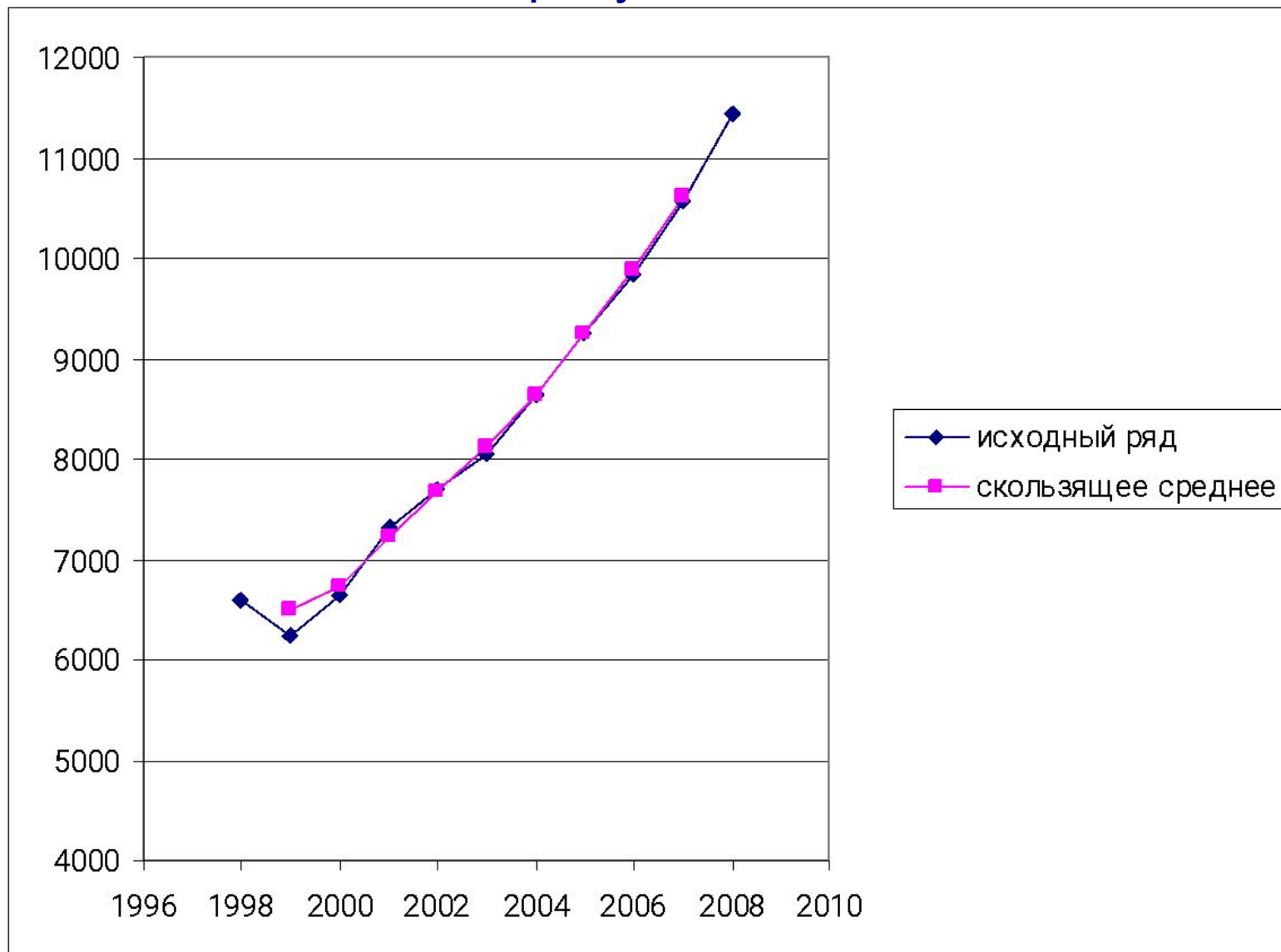
Проблема выбора интервала сглаживания:

при использовании приема скользящей средней сглаженный ряд сокращается по сравнению с исходным рядом на число уровней, равное $(L-1)$, т.е. происходит потеря информации; вместе с тем, чем продолжительнее интервал сглаживания, тем сильнее усреднение, а потому выявляемая тенденция развития получается более плавной.

Построим сглаженный ряд ВВП РФ (в ценах 2000 года трлн. руб.) за период с 1998 по 2008гг с помощью трехлетней скользящей средней.

Год - t_i	Y_i	Скользящее среднее
1998	6596,3	-
1999	6246,7	6496,5 = (6596,3+6246,7+6646,5)/3
2000	6646,5	6734,7 = (6246,7+6646,5+7311,1)/3
2001	7311,1	7213,9 = (6646,5+7311,1+7684)/3
2002	7684	7680,1 = (7311,1+ 7684+8045,2)/3
2003	8045,2	8120,6
2004	8632,5	8643,9
2005	9254	9244,3
2006	9846,3	9891,7
2007	10574,9	10617,5
2008	11431,4	-

Линейные диаграммы исходного и выровненных (скользящей средней) уровней ряда представлены на рисунке



2) аналитическое выравнивание - наиболее эффективный метод выравнивания. Оно предполагает представление уровней ряда динамики в виде функции времени (уравнения тренда) – $f(t)$.

Задача та же, что и в регрессионном анализе: построить уравнение, которое описывало бы зависимость уровня ряда y от фактора – времени t .

Уравнение тренда может быть линейной функцией, гиперболой, параболой, показательной функцией, логистической кривой и т.п.

Выбор вида функции (f) должен быть основан на содержательном анализе сущности развития данного явления. На практике для этих целей прибегают:

- к графическому изображению уровней динамического ряда (линейная диаграмма), а также к графическому изображению сглаженных уровней, в которых случайные волны и колебания в некоторой степени оказываются погашенными;
- перебору всевозможных функций и выбору наилучшей (наиболее качественной). Критерием качества может служить сумма квадратов отклонений фактических значений, рассчитанных по уравнению тренда. Чем сумма меньше, тем уравнение более качественное.

Расчет параметров уравнения тренда.

Расчет параметров при аналитическом выравнивании чаще всего производится с помощью метода наименьших квадратов (МНК). Согласно данному методу наилучшим считается такое приближение выровненных данных - $f(t)$ к фактическим - y , при котором сумма квадратов их отклонений является минимальной:

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - f(t_i))^2 \rightarrow \min$$

Поиск параметров для линейного уравнения тренда:
 $f(t) = a + b \cdot t$ можно упростить, если отсчет времени производить так, чтобы сумма показателей времени изучаемого ряда динамики была равна нулю.

При этом вводится новая условная переменная времени t^y_i , такая, что $\sum t^y_i = 0$.

При *нечетном* числе уровней ряда динамики для получения $\sum t_i^y = 0$ уровень, находящийся в середине ряда, принимается за условное начало отсчета времени (значению t_i^y , соответствующему данному уровню присваивается ноль). Значения переменной времени t_i^y , расположенные левее этого уровня, обозначаются натуральными числами со знаком минус (-1 -2 -3 ...), а, расположенные правее этого уровня – натуральными числами со знаком плюс (+1, +2, +3 ...). Например:

t_i	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995
t_i^y	-3	-2	-1	0	1	2	3
y_i	20	25	26	34	30	35	37

Если число уровней ряда *четное*, условные переменные времени левой половины ряда (до середины) нумеруются: $-1, -3, -5\dots$, а, правой половины: $+1, +3, +5$ и.т.д. При этом $\sum t^y_i$ будет равна 0. Например:

t_i	1990	1991	1992	1993	1994	1995
t^y_i	-5	-3	-1	1	3	5
y_i	25	26	34	30	35	37

Система нормальных уравнений (соответствующих МНК) для нахождения параметров линейного уравнения $f(t_i^y) = a + b \cdot t_i^y$ при введении условной переменной времени преобразуется к виду:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N y_i = a \cdot N \\ \sum_{i=1}^N y_i \cdot t_i^y = b \sum_{i=1}^N (t_i^y)^2 \end{cases}$$

Отсюда параметры уравнения рассчитываются по формулам:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^N y_i \cdot t_i^y}{\sum_{i=1}^N (t_i^y)^2}, \quad a = \frac{\sum_{i=1}^N y_i}{N}$$

! Данный подход можно использовать, если уровни ряда - равноотстоящие.

Оценивание параметров уравнение тренда для показательной функции $y = a \cdot b^t$ осуществляется также, как и в случае линейного тренда, с помощью метода наименьших квадратов (МНК). Однако прежде чем использовать МНК, нелинейную функцию преобразуют к линейному виду путем логарифмирования и замены переменных. Если взять логарифмы (неважно по какому основанию) правой и левой частей уравнения: $y = a \cdot b^t$, получим следующее:

$$\ln y = \ln a + t \cdot \ln b.$$

Теперь произведем замену переменных и параметров:

$$z = \ln y; \quad A = \ln a; \quad B = \ln b.$$

В результате имеем линейное уравнение с новыми переменными и параметрами: $z=A+B \cdot t$.

Для оценки его параметров (A и B) можно использовать стандартные процедуры МНК.

Параметры же исходного уравнения (a и b) определяются потенцированием параметров A и B. Так в случае натурального логарифмирования $a=e^A$; $b=e^B$.

Пример: подберем линейную функцию $f(t) = a + b \cdot t_i$ для тренда ряда ВВП РФ (в ценах 2000 года трлн. руб.)

Год $-t_i$	Y_i	t_i^y	Год $-t_i$	Y_i	t_i^y
1998	6596,3	-5	2004	8632,5	1
1999	6246,7	-4	2005	9254	2
2000	6646,5	-3	2006	9846,3	3
2001	7311,1	-2	2007	10574,9	4
2002	7684	-1	2008	11431,4	5
2003	8045,2	0			

Для упрощения расчета параметров уравнения введем условную переменную времени t^y .

Для расчета параметров а и в рассчитаем сумму $t^y \cdot Y_i$ и сумму $(t^y)^2$

Год - t_i	Y_i	t^y_i	$t^y_i \cdot Y_i$	$(t^y_i)^2$
1998	6596,3	-5	-32981,5	25
1999	6246,7	-4	-24986,8	16
2000	6646,5	-3	-19939,5	9
2001	7311,1	-2	-14622,2	4
2002	7684	-1	-7684	1
2003	8045,2	0	0	0
2004	8632,5	1	8632,5	1
2005	9254	2	18508	4
2006	9846,3	3	29538,9	9
2007	10574,9	4	42299,6	16
2008	11431,4	5	57157	25
ИТОГО	92268,9	0	55922	110

Тогда параметры уравнения тренда: $f(t^y)=a + b \cdot t^y$ будут равны:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^N Y_i \cdot t_i^y}{\sum_{i=1}^N (t_i^y)^2} = \frac{55922}{110} = 503,4, \quad a = \frac{\sum_{i=1}^N Y_i}{N} = \frac{92268,9}{11} = 8388,1$$

Окончательно уравнение примет вид:

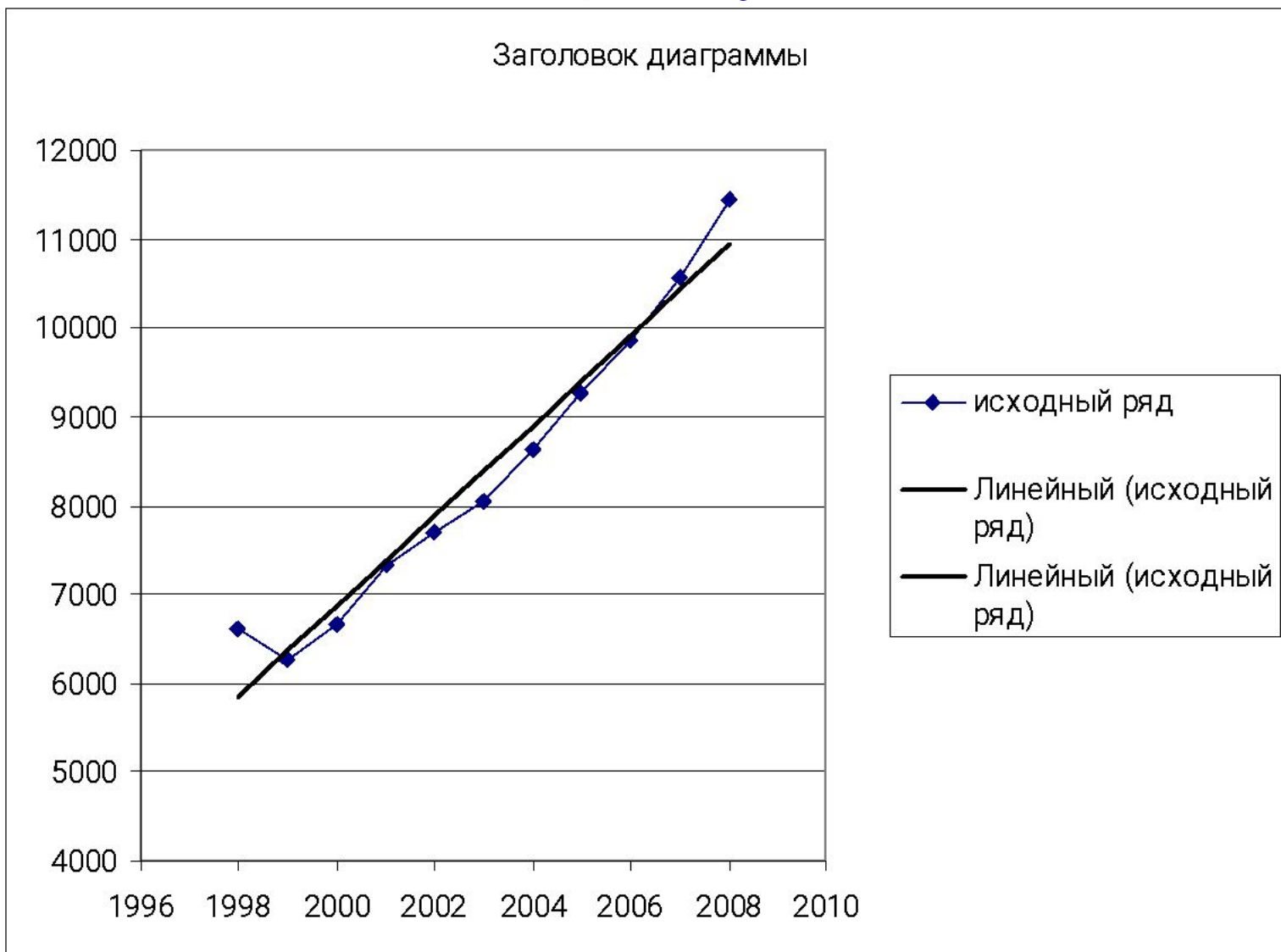
$$f(t^y_i) = 8388,1 + 503,4 \cdot t^y_i$$

Дадим интерпретацию параметров:

Параметр $a=8388,1$ показывает, что средний уровень ряда составляет 8388,1 трлн.руб.

Параметр $b=503,4$ показывает, что в среднем за год уровень ряда увеличивается на 503,4 трлн.руб.

Нанесем график уравнения тренда на линейную диаграмму



РАСЧЕТ СЕЗОННОГО КОМПОНЕНТА

Для измерения сезонных колебаний используют следующие методы:

а) метод абсолютных разностей (для аддитивной модели временного ряда);

б) метод индексов сезонности (для мультипликативной модели временного ряда).

Эти методы предполагают, что данные приведены не менее чем за три года.

Пусть имеется сезонный ряд динамики y_{ij} , где i – номер сезона ($i=1;K$, K – число сезонов в году); j – номер года ($j=1;M$, M – число лет в ряде динамики):

1 год сезоны:					...	j год сезоны:					...	m год сезоны:				
1	...	i	...	K	...	1	...	i	...	K	...	1	...	i	...	K
y_{11}	...	y_{i1}	...	y_{K1}	...	y_{1j}	...	y_{ij}	...	y_{Kj}	...	y_{1M}	...	y_{iM}	...	y_{KM}

Ряд содержит $K \cdot M$ уровней.

Метод **абсолютных разностей** предполагает определение для каждого сезона (месяца, квартала, декады) средней разности между фактическим (y_{ij}) и выровненным (аналитическим или эмпирическим способом) \tilde{y}_{ij} уровнями:

$$Sa_i = \frac{\sum_{j=1}^M (y_{ij} - \tilde{y}_{ij})}{M}$$

где i – номер сезона ($i=1;K$); j – номер года; m - число лет, за которые приведены данные в динамическом ряду.

Учитывают сезонность прибавлением i -ого абсолютного отклонения к выровненному уровню, относящемуся к i -ой единице времени внутри года: $\tilde{y}_{ij} + Sa_i$.

Индекс сезонности может быть рассчитан разными способами.

Для рядов, в которых практически отсутствует повышающийся или понижающийся тренд, *i*-ый индекс сезонности может быть рассчитан как отношение среднего уровня, соответствующего *i*-ому сезону, к общему среднему уровню ряда динамики:

$$IS_i = \frac{\bar{y}_i}{\bar{y}} = \frac{\sum_{j=1}^M \frac{y_{ij}}{M}}{\sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^M \frac{y_{ij}}{K \cdot M}}$$

где *i*- номер сезона; *K*·*M* – число элементов в ряду динамики.

Для рядов динамики с ярко выраженной основной тенденцией, индекс сезонности для i -ого сезона определяется как среднее отношение фактического уровня к выровненному (относящихся к i -ому сезону):

$$IS_i = \frac{\sum_{j=1}^M \frac{y_{ij}}{\tilde{y}_{ij}}}{M}$$

Учитывается сезонность умножением i -ого индекса сезонности на выровненный уровень, относящийся к i -ому сезону.

Пример: Имеются поквартальные данные об объеме продаж Y_{ji} за период с 2003 по 2005гг (первые 3 столбца таблицы).

Требуется построить аддитивную модель временного ряда:

$$Y' = T + S$$

J - год	1 (2003)				2 (2004)				3 (2005)			
I - сезон	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
Y_{ji}	230	310	310	290	200	230	280	260	190	240	250	220

Сперва рассчитаем значения сезонных компонентов. Для этого выровняем ряд методом скользящей средней

j	1 (2003)				2 (2004)				3 (2005)			
I	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
Y	230	310	310	290	200	230	280	260	190	240	250	220
Y^c	-	283, 3	303, 3	266, 7	240, 0	236, 7	256, 7	243, 3	230, 0	226, 7	236, 7	-

Для расчета сезонных компонентов (абсолютных разностей) вычтем из фактических уровней ряда выровненные.

j	1 (2003)				2 (2004)				3 (2005)			
			3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
I	1	2										
Y	230	310	310	290	200	230	280	260	190	240	250	220
Y ^c	-	283, 3	303, 3	266, 7	240, 0	236, 7	256, 7	243, 3	230, 0	226, 7	236, 7	-
Y- Y ^c	-	26,7	6,7	23,3	-40	-6,7	23,3	16,7	-40	13,3	13,3	-

Полученные значения перенесем во вспомогательную табл.:

i	2003	2004	2005	Среднее - C _i	$S_i = C_i - \left(\sum_{i=1}^4 C_i \right) / 4$
1	-	-40	-40	-40	-41,39
2	26,67	-6,67	13,33	11,11	9,72
3	6,67	23,33	13,33	14,44	13,06
4	23,33	16,67	-	20	18,61
ИТОГО				5,55	0

Теперь перейдем к построению уравнения тренда, т.е. трендового компонента модели.

Для этого устраним влияние сезонных колебаний, вычтя из исходных уровней соответствующие значения сезонных компонентов (Y^s):

j	1 (2003)				2 (2004)				3 (2005)			
				4	1	2	3	4	1	2	3	4
I	1	2	3									
Y	230	310	310	290	200	230	280	260	190	240	250	220
Y^s	271,4	300,3	296,9	271,4	241,4	220,3	266,9	241,4	231,4	230,3	236,9	201,4

Для оценивания параметров тренда введем условную переменную времени t^y . Уравнение тренда в общем виде будет следующим: $T = a + b \cdot t^y$. Воспользуемся методом наименьших квадратов для оценки параметров a и b .

Y^s	t^y	$Y^s \cdot t^y$	$(t^y)^2$
271,4	-11	-2985,3	121
300,3	-9	-2702,5	81
296,9	-7	-2078,6	49
271,4	-5	-1356,9	25
241,4	-3	-724,2	9
220,3	-1	-220,3	1
266,9	1	266,9	1
241,4	3	724,2	9
231,4	5	1156,9	25
230,3	7	1611,9	49
236,9	9	2132,5	81
201,4	11	2215,3	121
Итого: 3160	0	-1960	572

$$b = \frac{\sum Y^s \cdot t^y}{\sum t^{y2}} = \frac{-1960}{572} = -3,43$$

$$a = \frac{\sum Y^s}{n} = \frac{3010}{12} = 250,83$$

Уравнение тренда будет следующим: $T_{ji} = 250,83 - 3,43 \cdot t^y$

Интерпретируем параметры:

$a = 250,83$ показывает средний уровень ряда динамики;

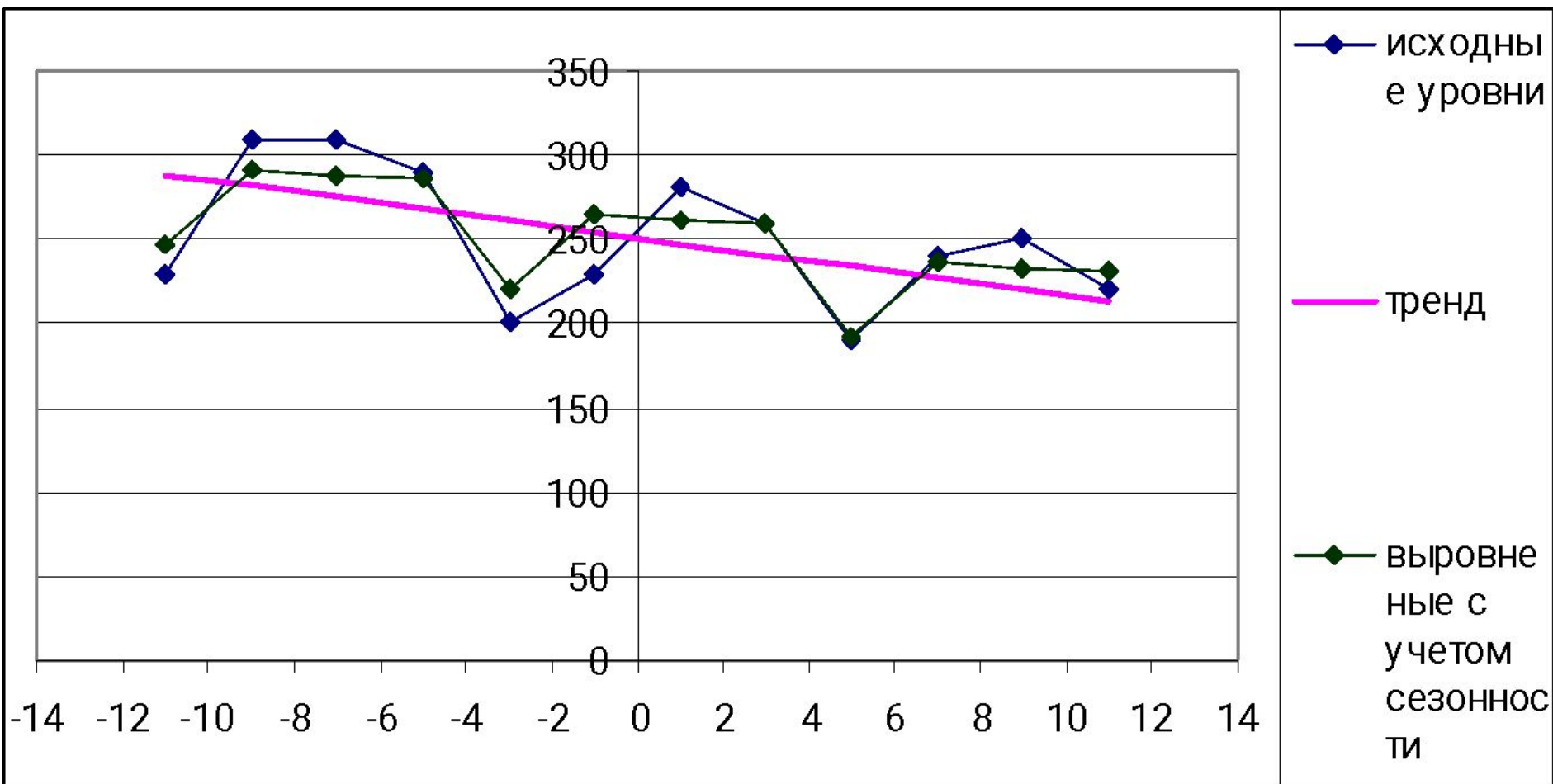
$b = -3,43$ означает, что в среднем за полквартала уровень ряда снижается на 3,43 единиц.

Теперь рассчитаем значения трендового компонента и

значения уровня ряда по модели: $Y' = T + S$.

J - год	I – сезон	Y_{ji} – объем продаж	$T_{ji} = a + b \cdot t_{ji}^y$	$Y'_{ji} = T_{ji} + S_i$
1 (2003)	1	230	288,53	247,14
	2	310	281,67	291,39
	3	310	274,82	287,87
	4	290	267,97	286,58
2 (2004)	1	200	261,11	219,72
	2	230	254,26	263,98
	3	280	247,41	260,46
	4	260	240,55	259,16
3 (2005)	1	190	233,70	192,31
	2	240	226,85	236,57
	3	250	219,99	233,05
	4	220	213,14	231,75
Итого		3010	3010	3010

Построим линейные диаграммы фактических уровней, выровненных по уравнению тренда и смоделированных по аддитивной модели



СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ

Обычно рекомендуется, чтобы срок прогноза не превышал 1/3 продолжительности временного ряда.

Если в ряду динамики пропущены данные (т.е. имеем неравноотстоящие уровни), то недостающие данные могут быть вычислены как среднее между предшествующим и последующим уровнями.

Методы прогнозирования:

1) Наивные (простейшие) методы прогнозирования:

- по среднему абсолютному приросту, если ряд содержит линейный тренд:

$$y_{n+k} = y_n + \Delta y \cdot k,$$

где n- длина исходного ряда динамики, k- период прогнозирования.

- по среднему коэффициенту роста, если ряд содержит нелинейный тренд в форме показательной функции:

$$y_{n+k} = y_n \cdot \overline{Kp}^k$$

С помощью аналитического выравнивания (с учетом колеблемости ряда).

Методика такого статистического прогноза основана на экстраполяции тренда и колеблемости (при предположении, что параметры тренда и колебаний сохраняются до прогнозируемого периода).

Экстраполяция – распространение тенденций, установленных в прошлом на будущее.

Прежде всего, вычисляется точечный прогноз \tilde{y}^p для времени прогнозирования t_p . Если имеют место сезонные колебания, то \tilde{y}^p корректируется на сезонную составляющую.

Прогноз должен иметь вероятностную форму, как всякое суждение о будущем, т.е. задаваться интервальным

значением: $\tilde{y}^p \pm \Delta_p$

где Δ_p – предельная ошибка прогноза. $\Delta_p = t_\alpha \cdot \mu_p$,

где t_α – табличное значение t-критерия Стьюдента; μ_p – средняя ошибка прогноза.

Средняя ошибка прогноза вычисляется по формуле:

$$\mu_p = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \tilde{y}_i)^2}{N - h} \left(1 + \frac{1}{N} + \frac{(t^p - \bar{t})^2}{N \cdot \sigma_t^2} \right)}$$

Где h – число параметров в уравнении тренда,

Рассмотрим пример: спрогнозируем уровень объема продаж на 1 квартал 2006 г.

Для этого определим значение Y' по аддитивной модели:

$$Y'_{41} = 250,83 - 3,43 \cdot 13 - 41,39 = 164,9$$

