

# Полуквантовое кодирование в компьютерных многомерных комбинаторно-топологических моделях.

Г.Г.Рябов (НИВЦ МГУ)

Доклад на XII международной конференции  
«Информационные средства и технологии». Москва. МЭИ. 2009

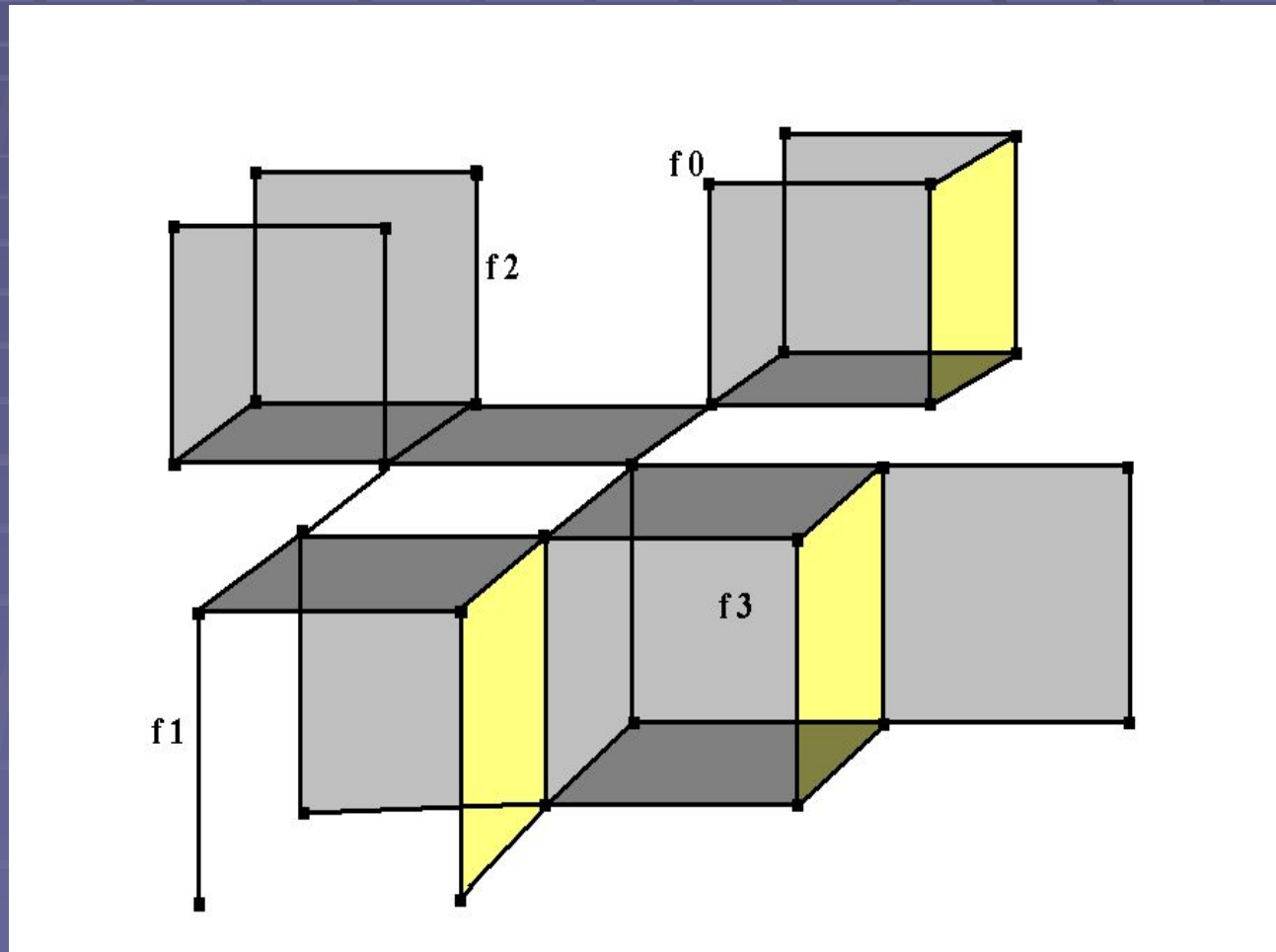
Работа поддержана грантом РФФИ (09-07-12135)

# Геометрико-топологические модели в современной науке.

- Модели-посредник между теоретическими построениями и компьютерными методами расчетов.
- Решетки, сетки, симплициальные и кубические комплексы, многообразия...
- Многомерность и комбинаторная сущность квантовых систем □ как это отразится на суперкомпьютерах следующих поколений?

# Кубические структуры.

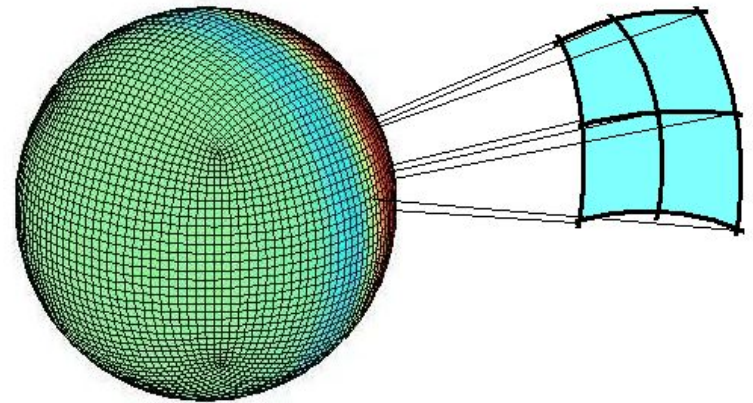
- Многие комбинаторные структуры вложимы в кубические комплексы.
- Комплексы изучаются в пространствах  $\mathbb{R}^n$  (вершины-целые точки  $\mathbb{Z}^n$ ).



# Глобальная модель климата (MIT gcm) и корректирующие коды.

- Кубическая сфера с конформной решеткой – база всех климатических расчетов.
- Хэммингово расстояние между кодами-вершинами  $n$ -куба – базовая мера в теории корректирующих кодов.

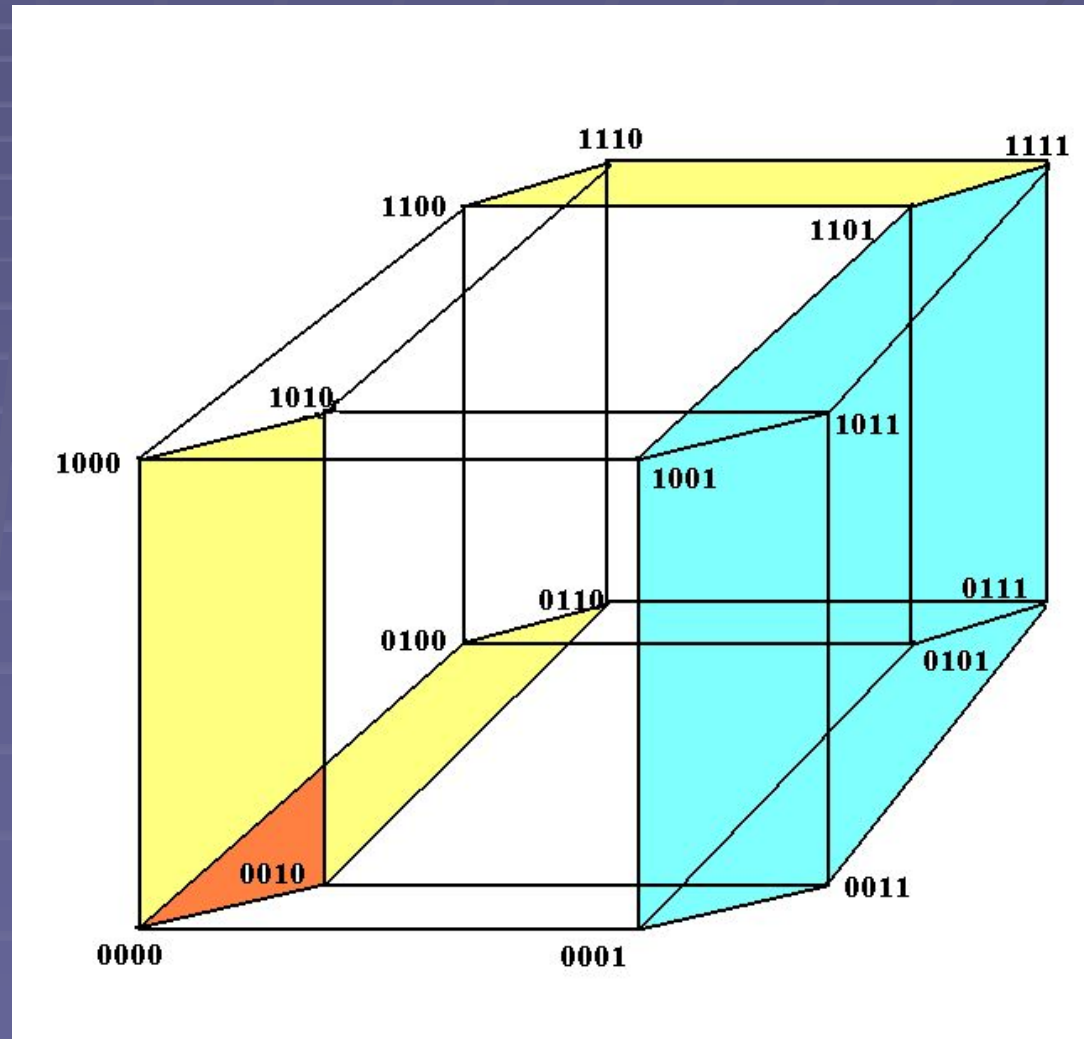
## External Gravity Wave Propagation on Expanded Conformal Cubic Grid



**Face 3cube: 32x32; 64x64; ...**

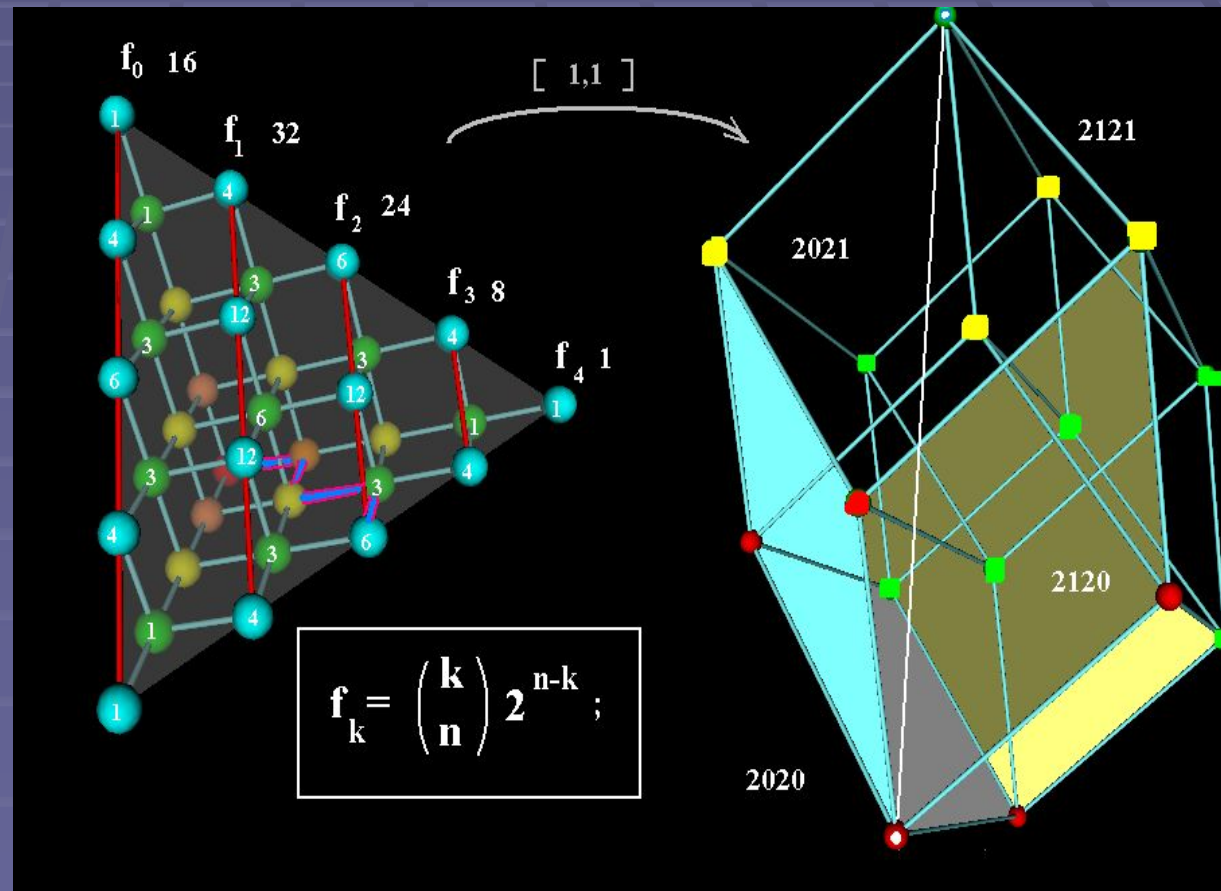
# Кубические комплексы в $I^n$ ( $R^n$ ).

- 0-границы- вершины,
- 1-границы- ребра,
- 2-границы-квадраты
- 3-границы-кубы
- 4-границы и т.д.
- $f(k) = C_n^k 2^{n-k}$ ;



# Пирамида Паскаля и k-мерные грани n-куба.

- Пирамида Паскаля-рекурсивная процедура в трехмерной решетке.
- Сумма чисел вдоль ребер ( $y=k$ ) в плоскости  $x+y+z=n$  равна числу k-граней в n-кубе.

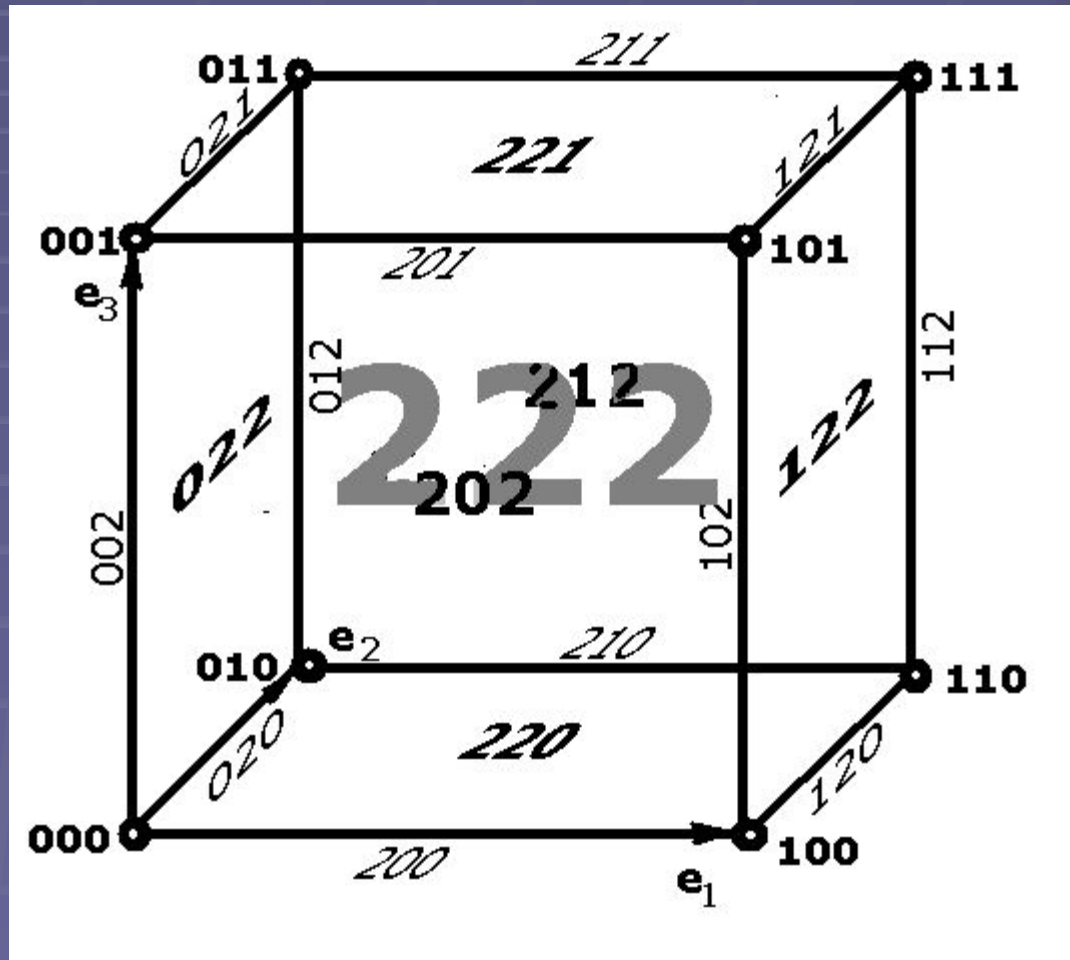


Биекция: множество всех  $n$ -  
 разрядных троичных  
 кодов  $\square$   $\square$  множество всех  
 граней  $n$ -куба.

- $E = e_1, e_2, \dots, e_i, \dots, e_n; \square \mathbb{R}^n;$
- $D = d_1, d_2, \dots, d_i, \dots, d_n; \quad d_i \square \{0, 1, 2\};$
- $E \square D; \quad e_i \square d_i;$
- 021221  $\square e_2 \times e_4 \times e_5$  транс. в вершину 001001; трехмерная грань(куб) в шестимерном кубе.

# Грани в $I^3$ .

- Все грани в  $I^3$ - все трехразрядные троичные коды.
- Алфавит  $\{0,1,2\}$
- 222-весь  $I^3$ .

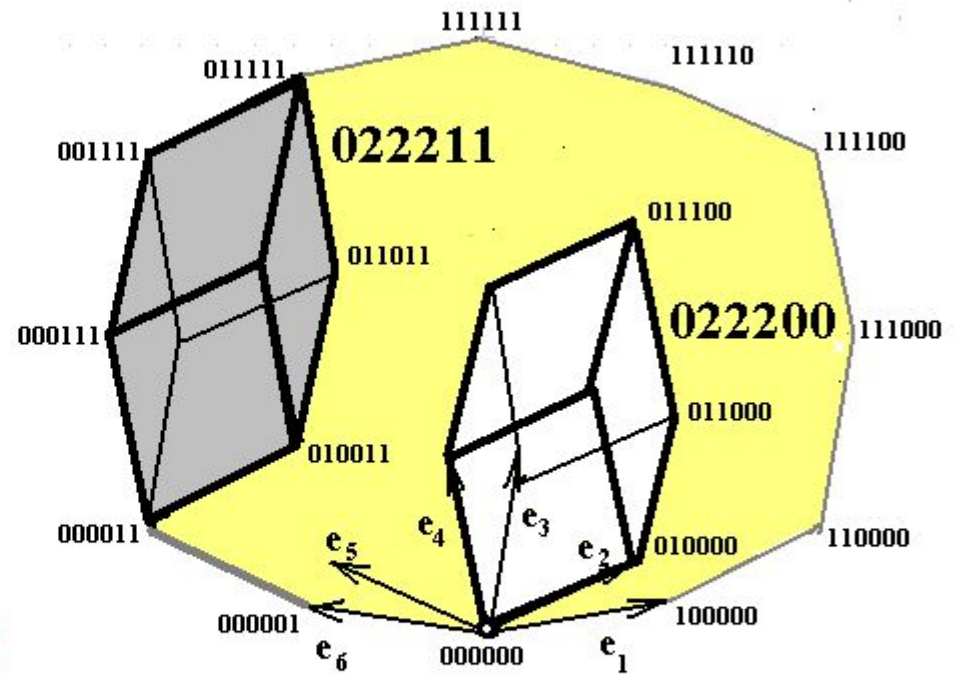
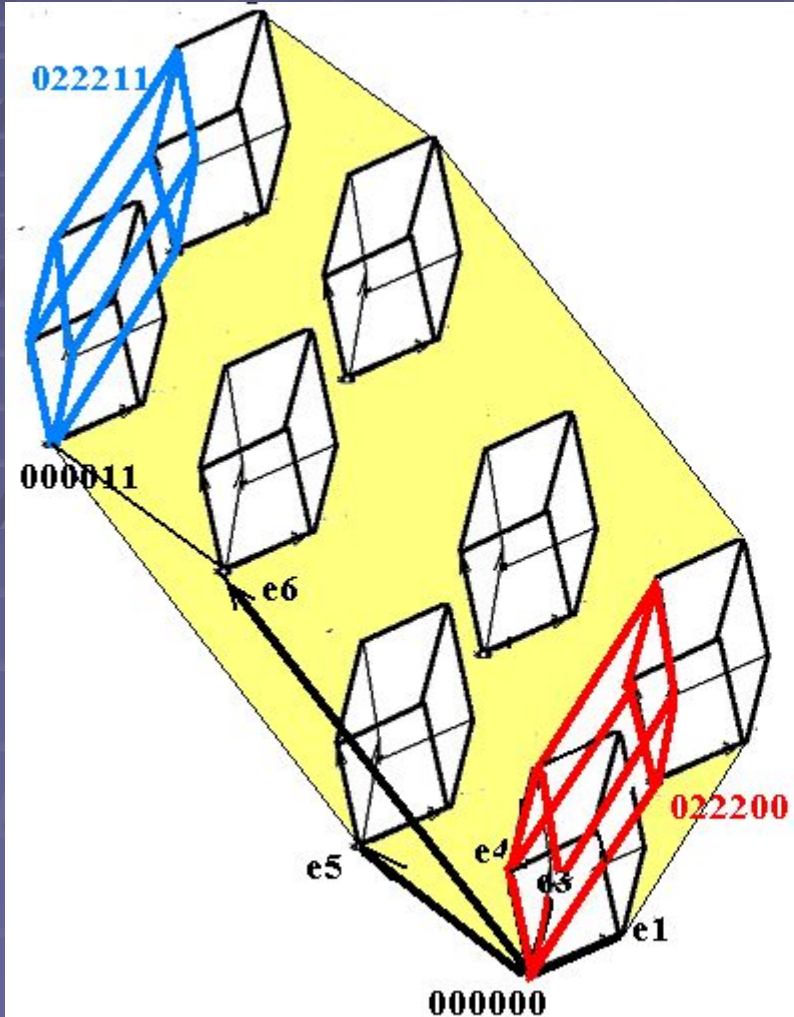




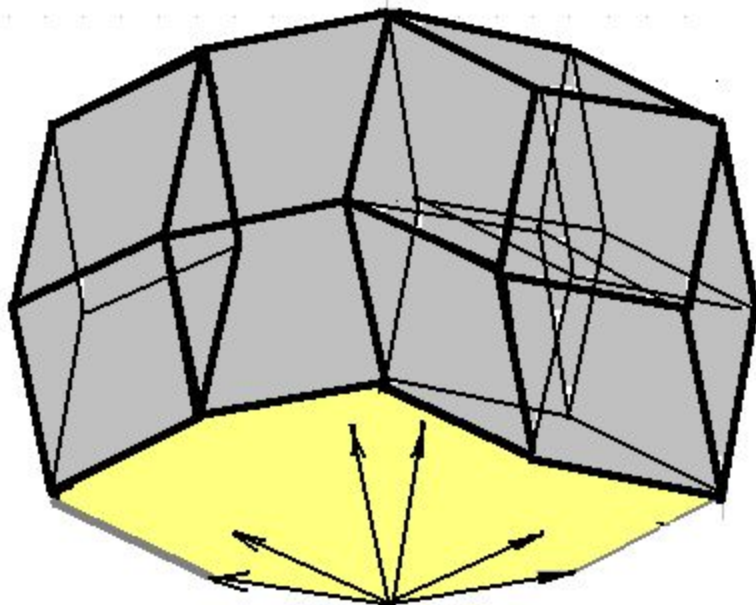
# Кубанты

- **Кубант** в  $n$ -мерном евклидовом пространстве – троичный  $n$ -разрядный код, отражающий размерность грани и ее положение в  $n$ -мерном единичном кубе.

# Кубанты 022200 и 022211 в $I^6$ .

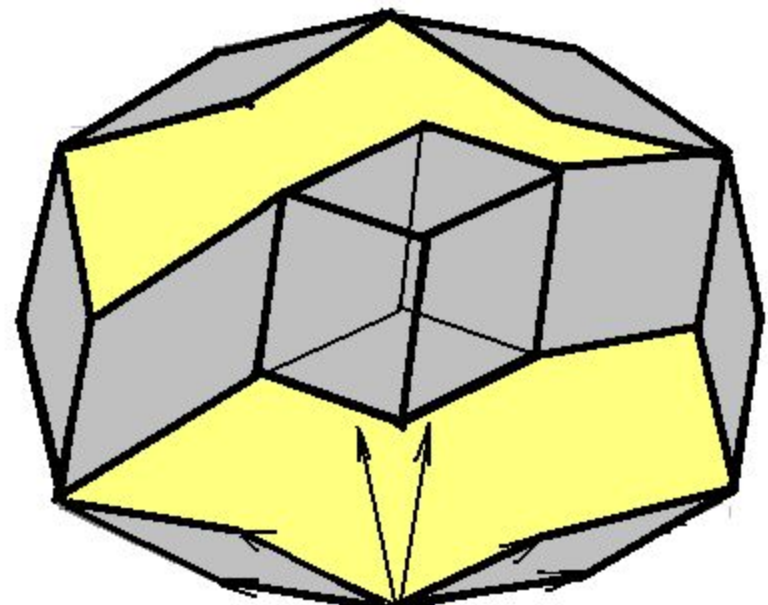


# Комплексы из кубантов в $I^6$ .



000000

a)



000000

b)

- a). Комплекс из 3-х кубантов (3-куб, 3-куб, 4-куб).
- b). Комплекс из 9-и кубантов (8 квадратов и 3-куб).

# Умножение (пересечение) кубантов.

- Умножение кубантов-поразрядная операция над словами, задаваемая данной таблицей.
- $\emptyset$ -пустое множество.

|          | <b>0</b>            | <b>1</b>            | <b>2</b> |
|----------|---------------------|---------------------|----------|
| <b>0</b> | <b>0</b>            | <del><b>∅</b></del> | <b>0</b> |
| <b>1</b> | <del><b>∅</b></del> | <b>1</b>            | <b>1</b> |
| <b>2</b> | <b>0</b>            | <b>1</b>            | <b>2</b> |

Кубанты и псевдокубанты( с  $\emptyset$ ) образуют полугруппу с единицей (МОНОИД).

- Расширение алфавита  $\Sigma \{ \emptyset, 0, 1, 2 \}$ .
- Все четверичные  $n$ -разрядные слова (кубанты и псевдокубанты) образуют полугруппу по умножению.
- Кубант  $\times$  кубант = кубант или  $p$ /кубант.  
П/кубант  $\times$  кубант =  $p$ /кубант.
- Единица моноида-кубант  $222\dots 2$ .

# Машинное представление

$\emptyset \square 0; 0 \square 1; 1 \square 2; 2 \square 3;$

- Таблица поразрядного умножения элементов моноида при машинном представлении.

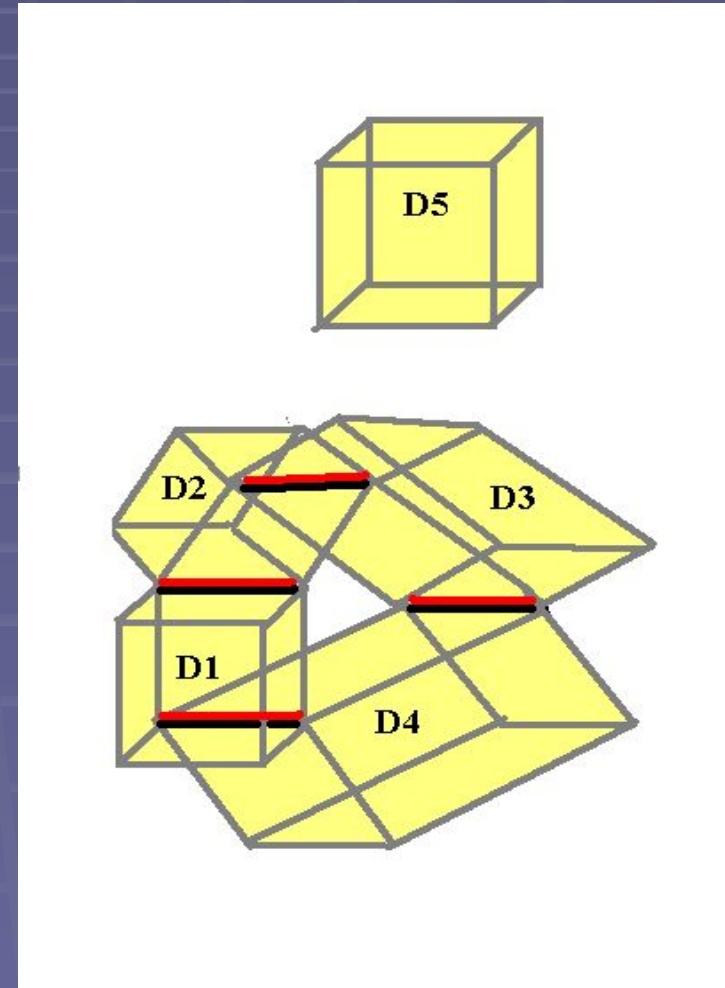
|          | <b>0</b> | <b>1</b> | <b>2</b> | <b>3</b> |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| <b>0</b> | <b>0</b> | <b>0</b> | <b>0</b> | <b>0</b> |
| <b>1</b> | <b>0</b> | <b>1</b> | <b>0</b> | <b>1</b> |
| <b>2</b> | <b>0</b> | <b>0</b> | <b>2</b> | <b>2</b> |
| <b>3</b> | <b>0</b> | <b>1</b> | <b>2</b> | <b>3</b> |

# Свойства произведения кубантов.

- $P(D1, D2) = D3$ ;
- $\omega(D3) =$  число разрядов с  $\emptyset$ .
- Если  $\omega(D3) = 0$ , то  $D3$  – кубант-пересечение.
- Если  $\omega(D3) = r > 0$ , то  $L_{\min}(D1, D2) = r$ ;  
(минимальный путь по ребрам  $n$ -куба-  
обобщение метрики Хэмминга для  
двоичных кодов).
- Структура комплекса полностью  
определяется перемножением кубантов.

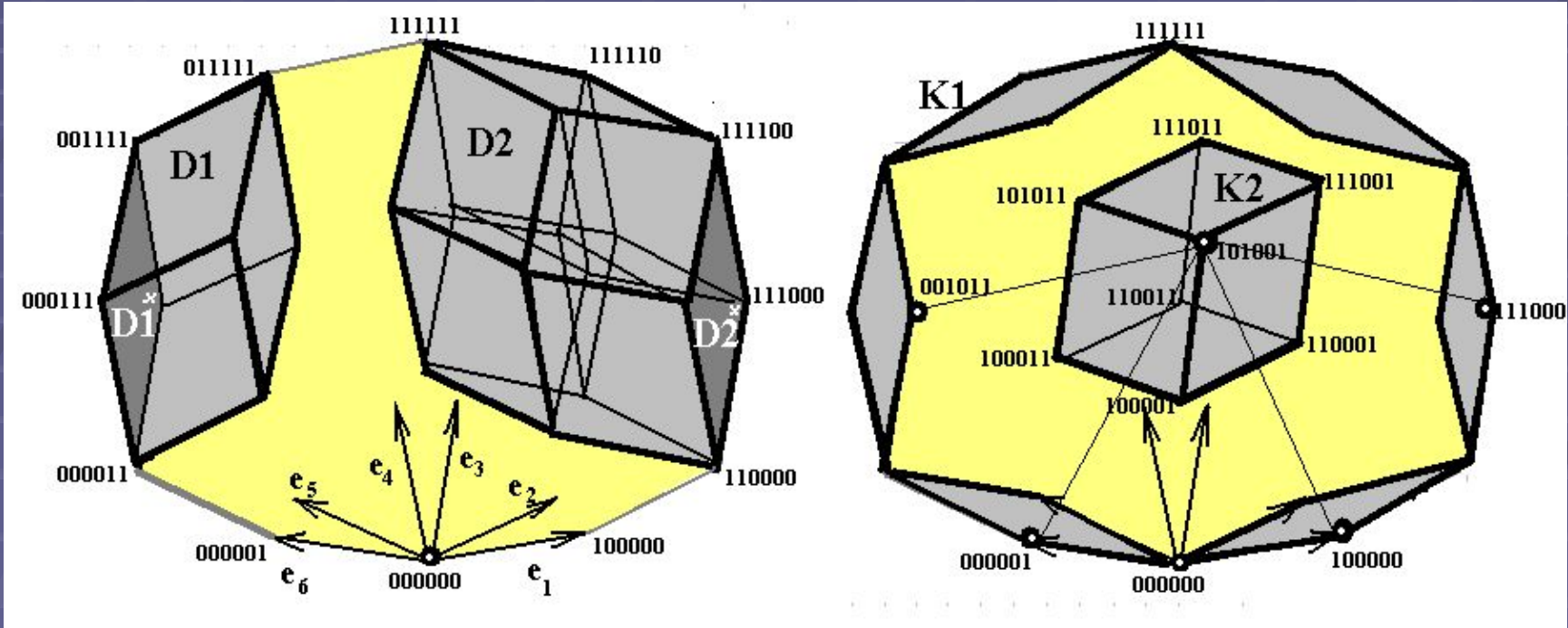
# Матрица парных произведений.

- $D1=112202$ ;  $D2=121122$ ;  $D3=122211$ ;
- $D4=120122$ ;  $D5=002212$ ;
- $112202$   $111102$   $1112\emptyset 1$   $110102$   $\emptyset\emptyset 22\emptyset$
- $121122$   $121111$   $12\emptyset 122$   $\emptyset 01112$
- $122211$   $120111$   $\emptyset 02211$
- $120122$   $\emptyset 00112$
- $002212$
- $D1, D2, D3, D4$ -образуют цикл (общие ребра,  $D5$  отстоит на  $L_{min}=1$  от  $D2, D3, D4$  и на  $L_{min}=3$  от  $D1$ ;
- Обобщение матрицы смежностей для графов.





# Хаусдорфова метрика на кубантах (обобщение метрики Хэмминга)



- $\rho_H(D1, D2) = \max\{\max \min L(D1 \square D2), \max \min L(D2 \square D1)\}$ ;
- Хаусдорфова сжатие  $D1/D2 = D1^*$  и  $D2/D1 = D2^*$ ; Самое большое L из самых коротких путей. Сжатие-поразрядная операция.

■ 022211      112222

■ 112200      002211

■  $\emptyset 122\emptyset\emptyset$      $\emptyset\emptyset 2211$      $\square \max\{3, 2\} = 3$      $\square \rho_H = 3$ :



# Структура матрицы H-метрики для кубантов $I^n$ .

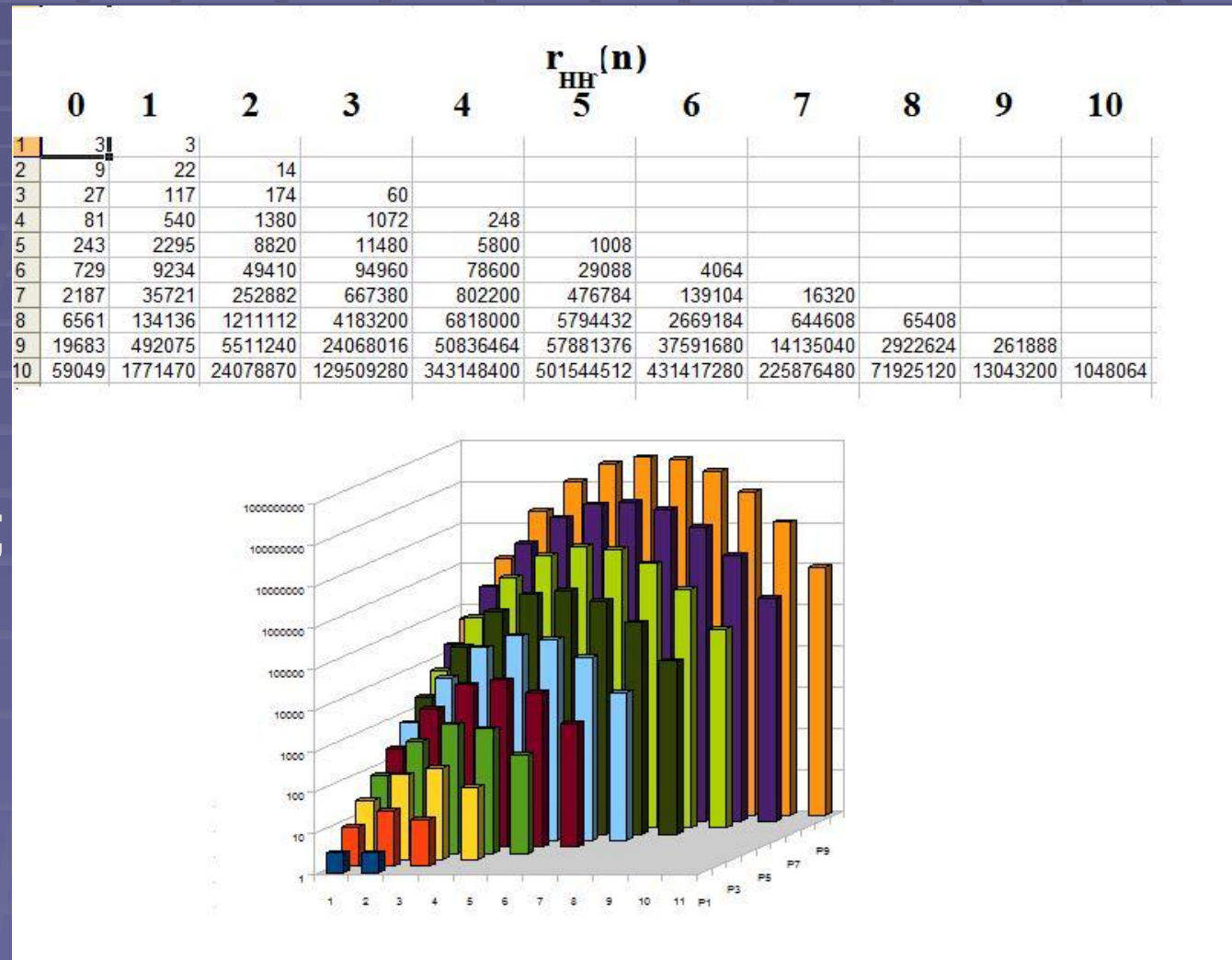
- Матрица  $3^n \times 3^n$
- Миноры  $H(k,m)$   $k \times m$ , где  $k,m$ -размерности граней.
- $r = [s,t]$ -диапазон значений  $r_H$  в миноре.

|     | 0  | 1  | ... | n-2   | n-1   | n   |
|-----|--|--|-----|---|---|-----|
| 0   | $\begin{matrix} 0 & H(0,0) \\ \dots & [0,n] \\ 0 \end{matrix}$ | $\begin{matrix} H(0,1) \\ r=[1,n] \end{matrix}$                  |     | $\begin{matrix} H(0,n-2) \\ r=[n-2,n] \end{matrix}$             | $\begin{matrix} H(0,n-1) \\ r=[n-1,n] \end{matrix}$             | n   |
| 1   |  | $\begin{matrix} 0 & H(1,1) \\ \dots & [0,n-1] \\ 0 \end{matrix}$ | ... | $\begin{matrix} H(1,n-2) \\ r=[n-3,n-1] \end{matrix}$           | $\begin{matrix} H(1,n-1) \\ r=[n-2,n-1] \end{matrix}$           | n-1 |
| ... |  |  | ... |   |   |     |
| n-2 |  |  |     | $\begin{matrix} 0 & H(n-2,n-2) \\ \dots & r=[0,2] \end{matrix}$ | $\begin{matrix} H(n-2,n-1) \\ r=[1,2] \end{matrix}$             | 2   |
| n-1 |  |  |     |   | $\begin{matrix} 0 & H(n-1,n-1) \\ \dots & r=[0,1] \end{matrix}$ | 1   |
| n   |  |  |     |   |   | 0   |

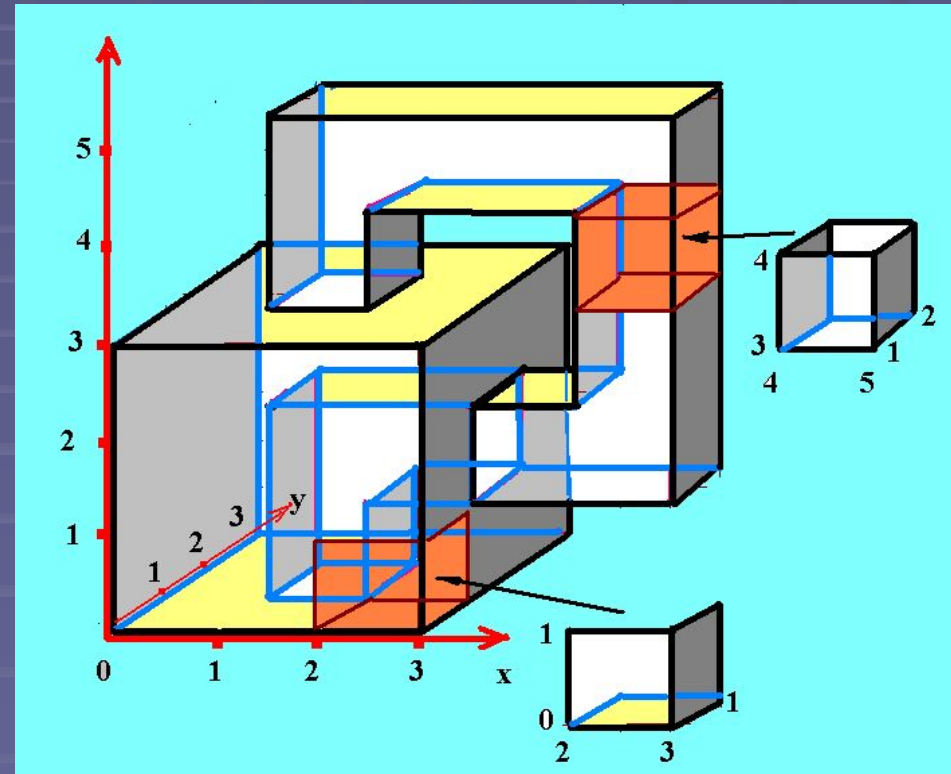
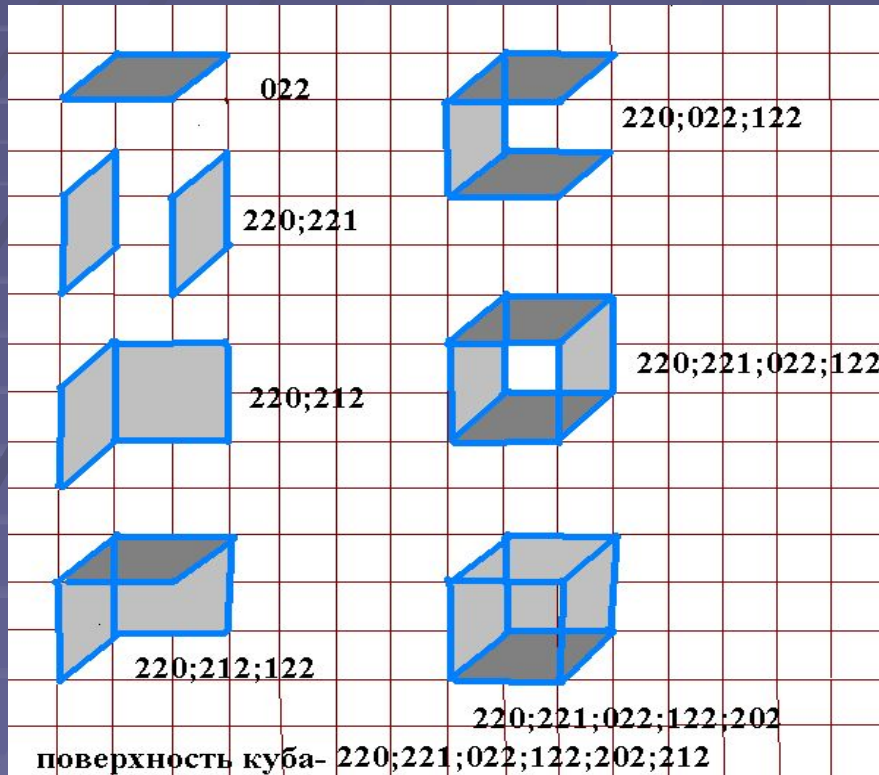
симметрия

# Распределения значений H-метрики по размерностям граней при $n \rightarrow \infty$ .

- Ассиметрия распределений.
- $r=0 \propto 3^n$ ;
- $r=n \propto 4^n - 2^{n-1}$ ;



# Панельное топологическое строительство. Бутылка Клейна в 75 байт.



- Всех комплексов из гиперграней 64-для хранения номера комплекса -один байт памяти.

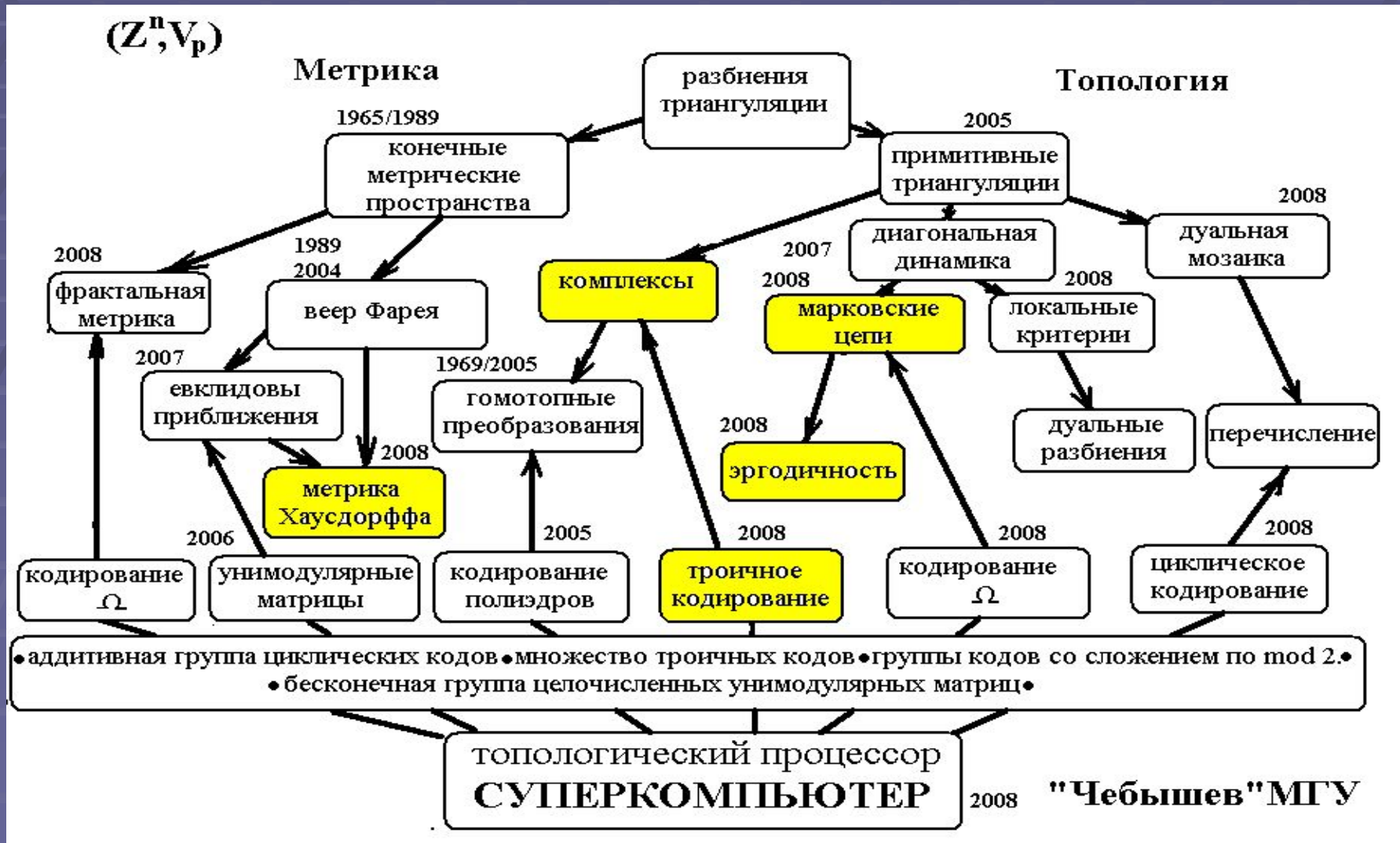
# Полиморфизм кубантов (четверичного кодирования).

- Слово
- Число
- Множество точек  $\mathbb{R}^n$ .
- Геометрическая фигура
- Часть топологического комплекса.
- Элемент алгебраической структуры (моноид).
- Результат **одной операции** содержит информацию о связности, мин пути, размерности пересечения, положении внутри  $n$ -куба.
- Кубанты-гиперметрическое пространство.

# Кубанты и супервычисления.

- Поразрядные операции над четверичными словами практически неограниченной длины, равной размерности исследуемого пространства.
- **Перевод вычисления метрики Хаусдорфа для кубантов из задач сложности  $2^n$  в задачи сложности  $n^2$ .**
- Хранение в табличном виде (заранее рассчитанных)  $n$ -мерных комплексов гиперграней (нумеративный подход).
- Исследования асимптотического поведения гиперрешеток (10d-11d) в интересах теоретической физики.
- Одна из проблем-значительное расширение оперативной памяти суперкомпьютера. Для 10d рабочее поле со стороной 100 требует память объемом  $10^8$  терабайт.

# Инструментальная система «Топологический процессор».





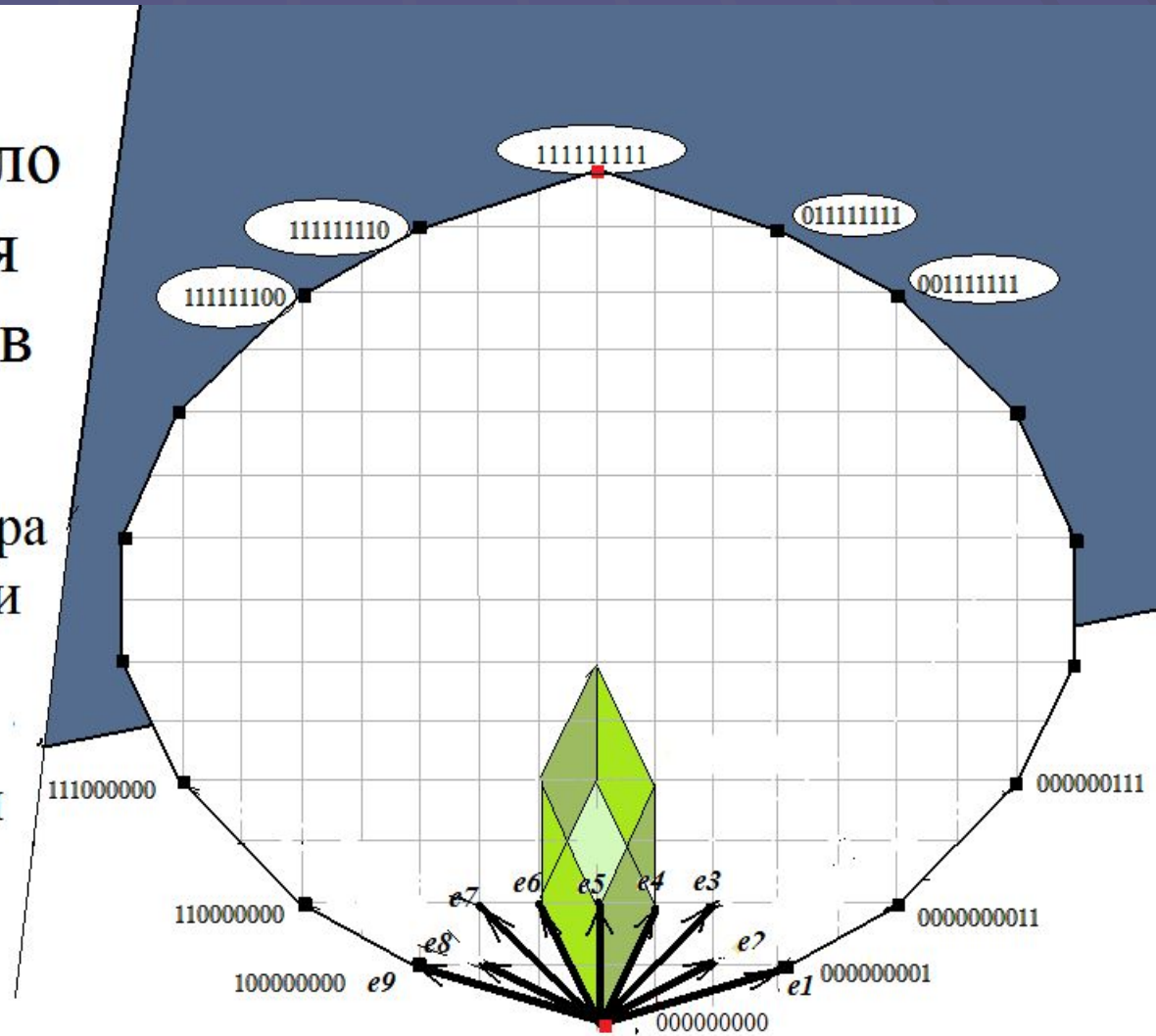
# Вместо выводов.

- Связка алгебраических геометрии и топологии, комбинаторики, дифференциальных уравнений со структурой будущих суперкомпьютеров – одно из **прорывных комплексных направлений** не только в математике, но и в целом в науке.
- Отечественная математическая школа в этой области - одна из передовых в мире.
- Успех в этой области обеспечения суперкомпьютеров – шаг к занятию достойного места в международной научной кооперации.

# Приложение. Многомерные построения k-путей.

Построить в  $\mathbb{I}^9$   
максимальное число  
непересекающихся  
3-путей из  $(00\dots 0)$  в  
 $(11\dots 1)$ .

Три кубических коридора  
с квадратными воротами  
(двумерными гранями)  
между соседними  
отсеками (трехмерными  
гранями-кубами).



# Многомерные построения k-путей

|   | A         | B         | C         |
|---|-----------|-----------|-----------|
| 1 | 222000000 | 000222000 | 000000222 |
| 2 | 221000002 | 002221000 | 000002221 |
| 3 | 211000022 | 022211000 | 000022211 |
| 4 | 111000222 | 222111000 | 000222111 |
| 5 | 111002221 | 221111002 | 002221111 |
| 6 | 111022211 | 211111022 | 022211111 |
| 7 | 111222111 | 111111222 | 222111111 |

Исходные данные:

$I^9$

$\dim Cb=3;$

$T(Cb)=9 \times L \times 3; \rightarrow A, B, C; ?$

$L=9-3+1=7;$

$\Pi(A_1, B_1, C_1)=000000000$

$\Pi(A_7, B_7, C_7)=111111111;$

$\Pi(A_i, B_i)=\emptyset; i=2-6;$

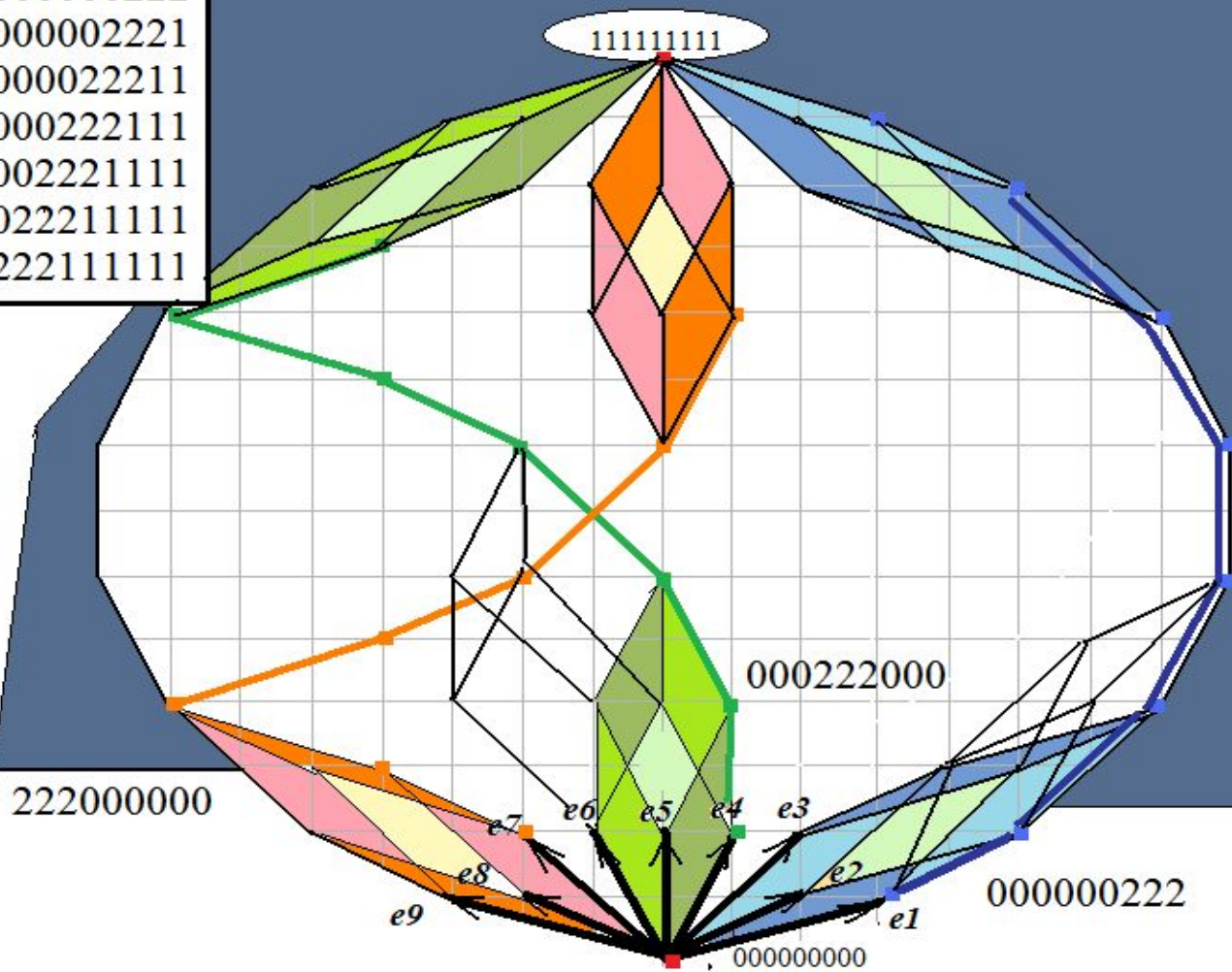
$\Pi(A_i, C_i)=\emptyset; i=2-6;$

$\Pi(B_i, C_i)=\emptyset; i=2-6;$

$\dim \Pi(A_i, A_{i+1})=2; i=1-6;$

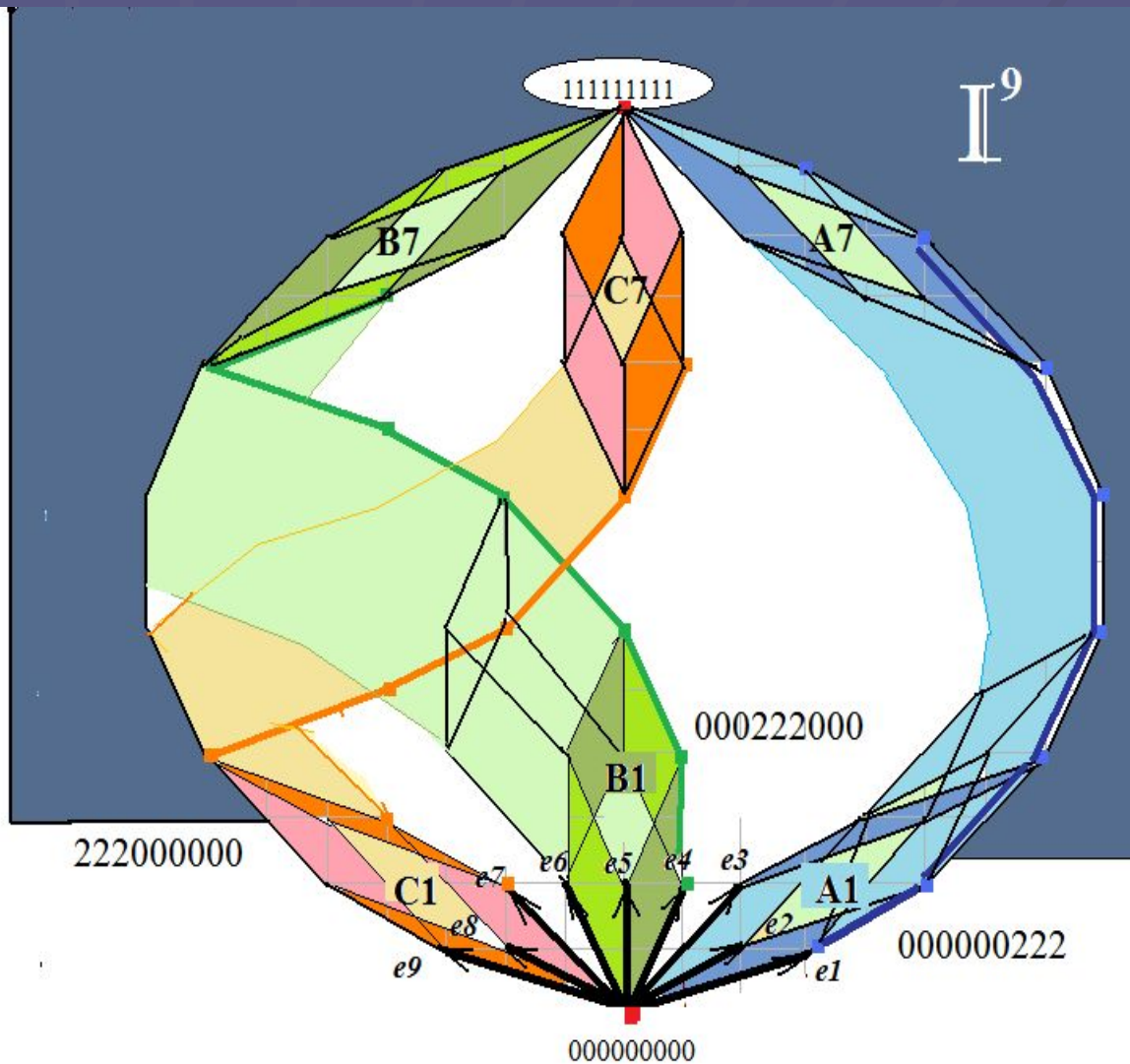
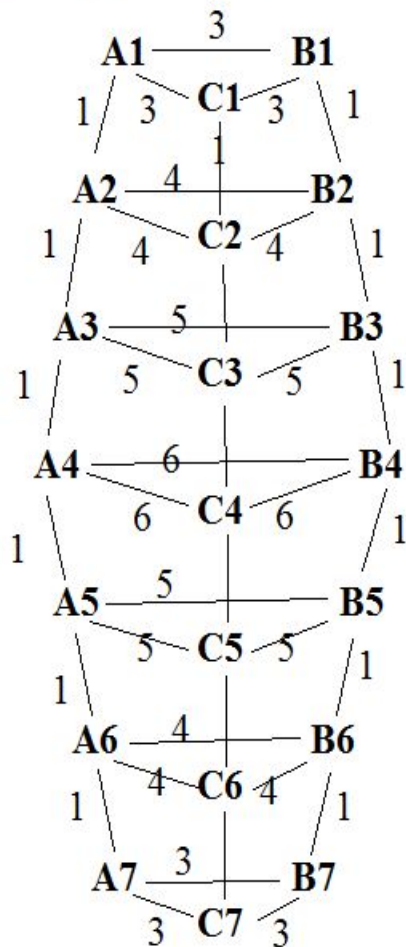
$\dim \Pi(B_i, B_{i+1})=2; i=1-6;$

$\dim \Pi(C_i, C_{i+1})=2; i=1-6;$



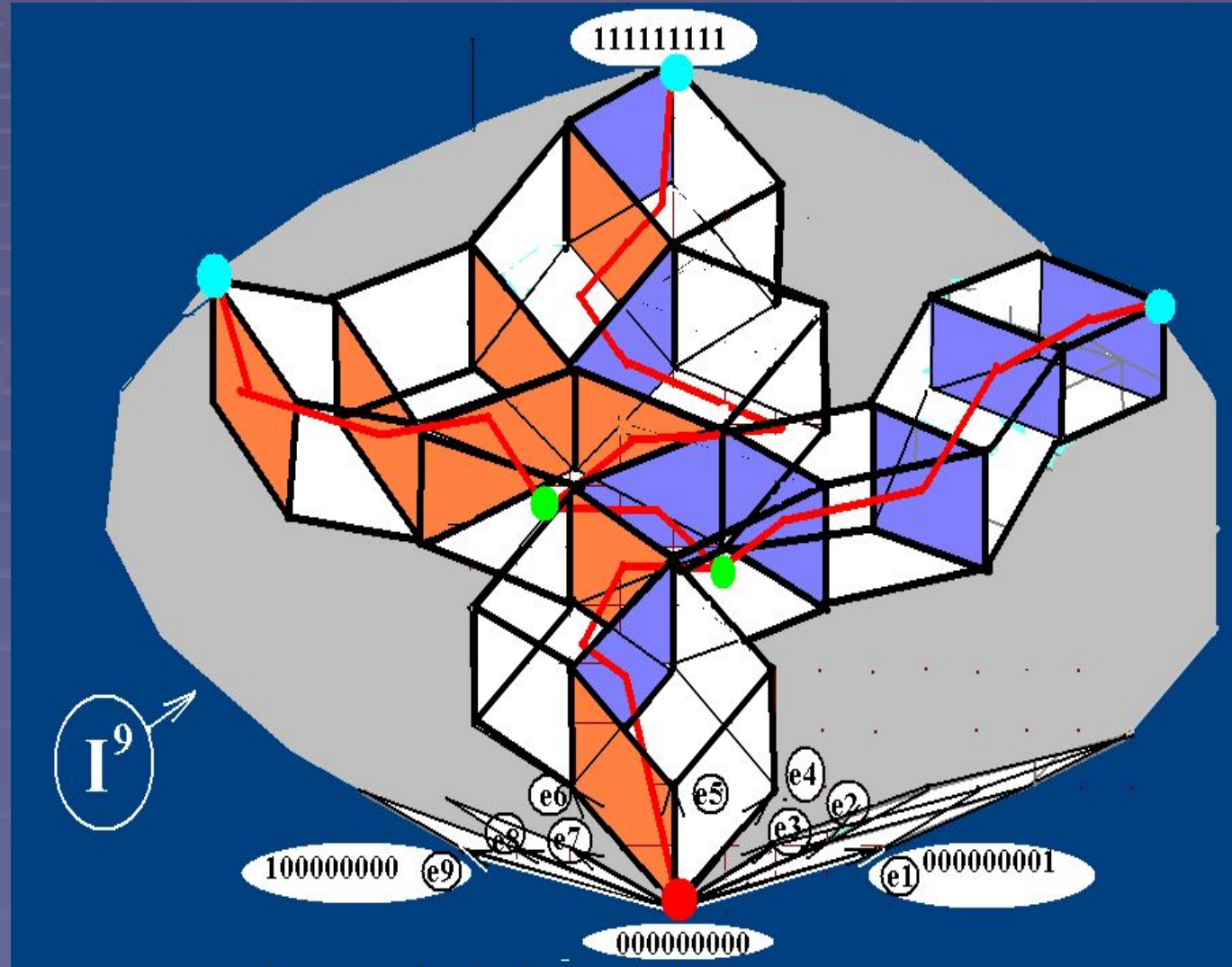
# H-метрика в k-путях.

Хаусдорфа метрика 3-путей.



# Многомерные построения.

- Процесс расслоения
- Процесс слияния
- Следы процесса на гранях пространства-полиэдра



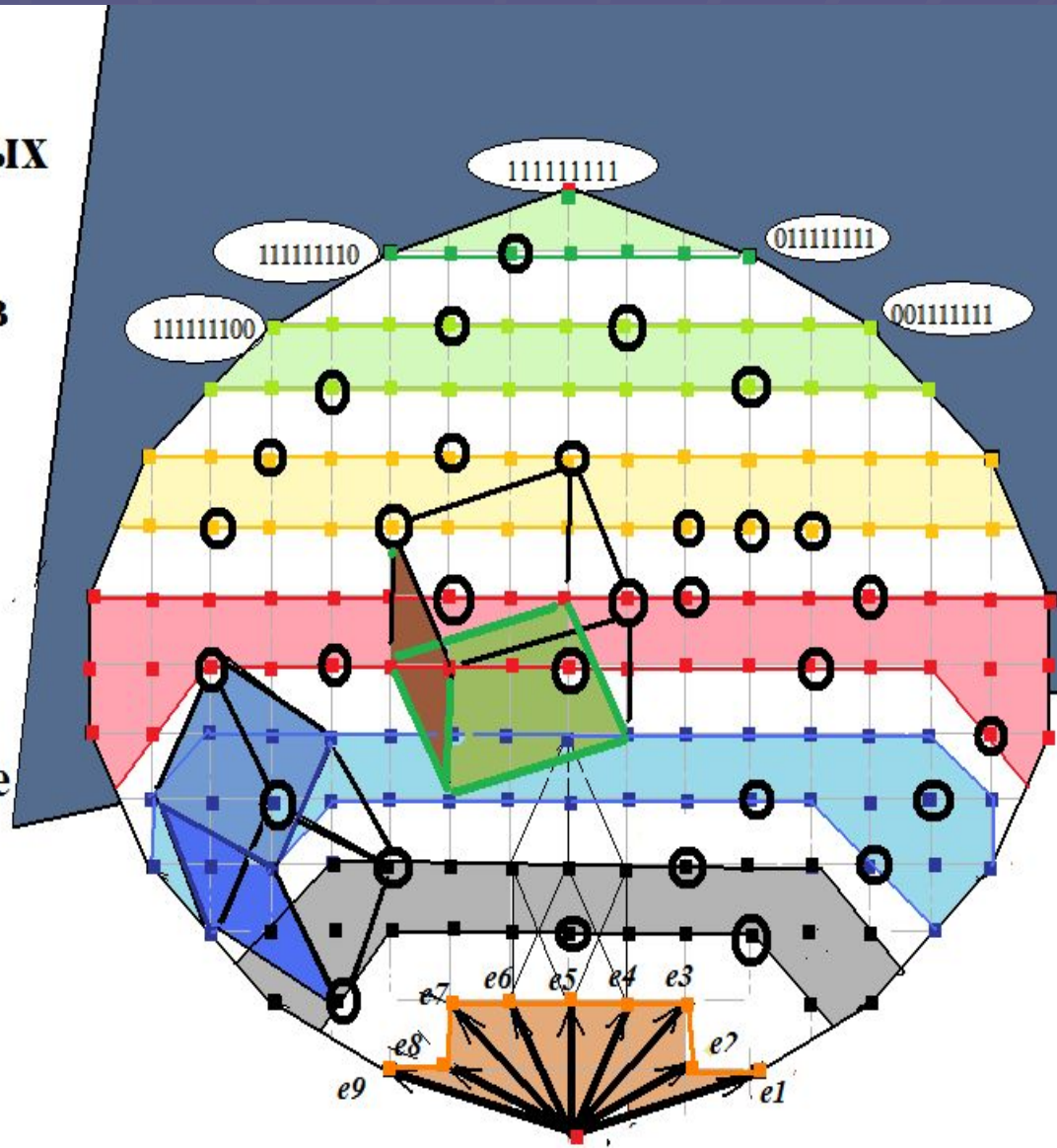
# Случайная динамика в n-кубе.

**Динамика-перестроение структуры из-за локальных дефектов.**

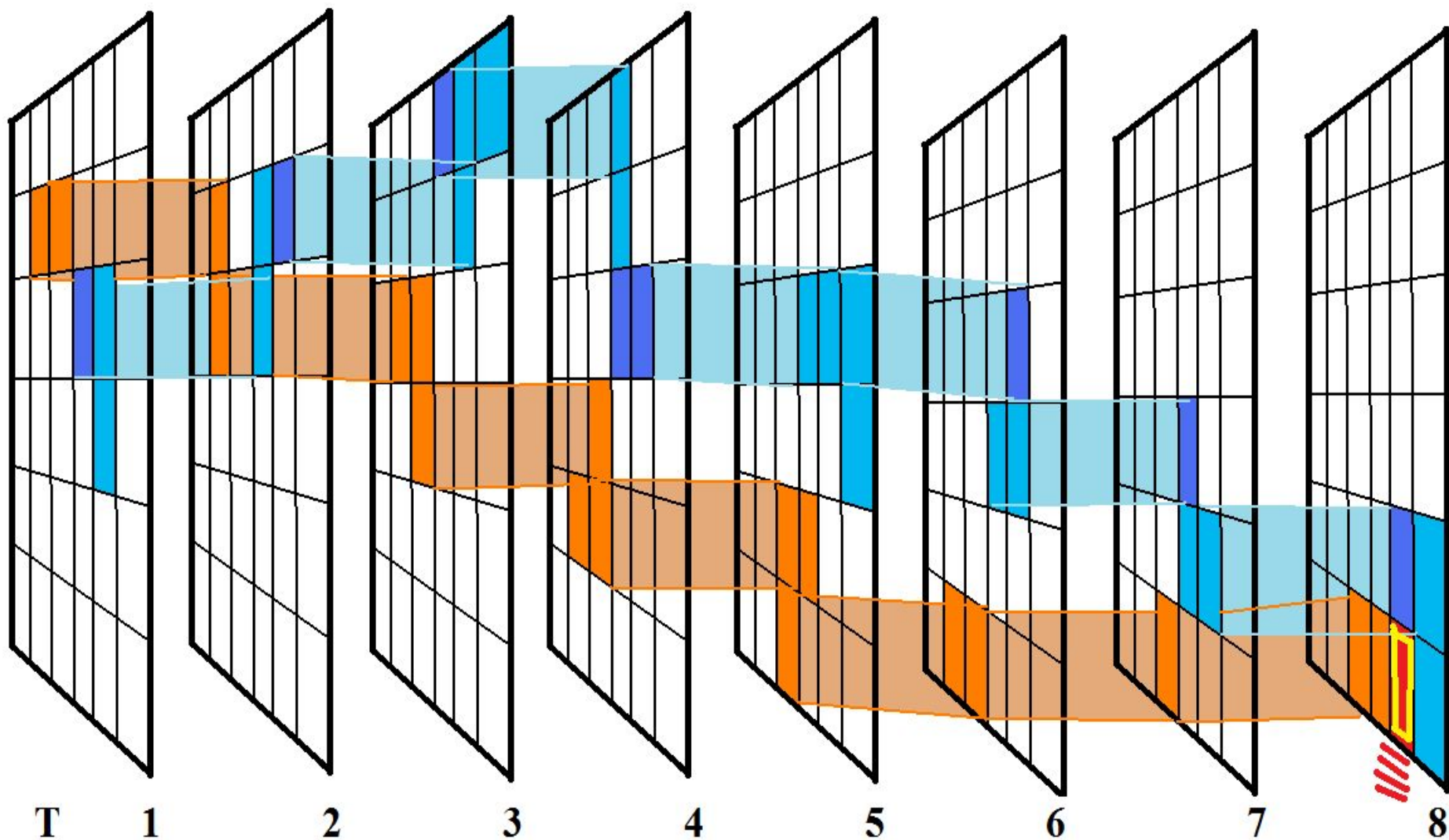
**Выпадение вершины-обрыв k-граней, инцидентных ей.**

**Восстановление грани, когда выпуклая оболочка оставшегося "каркаса" равна грани.**

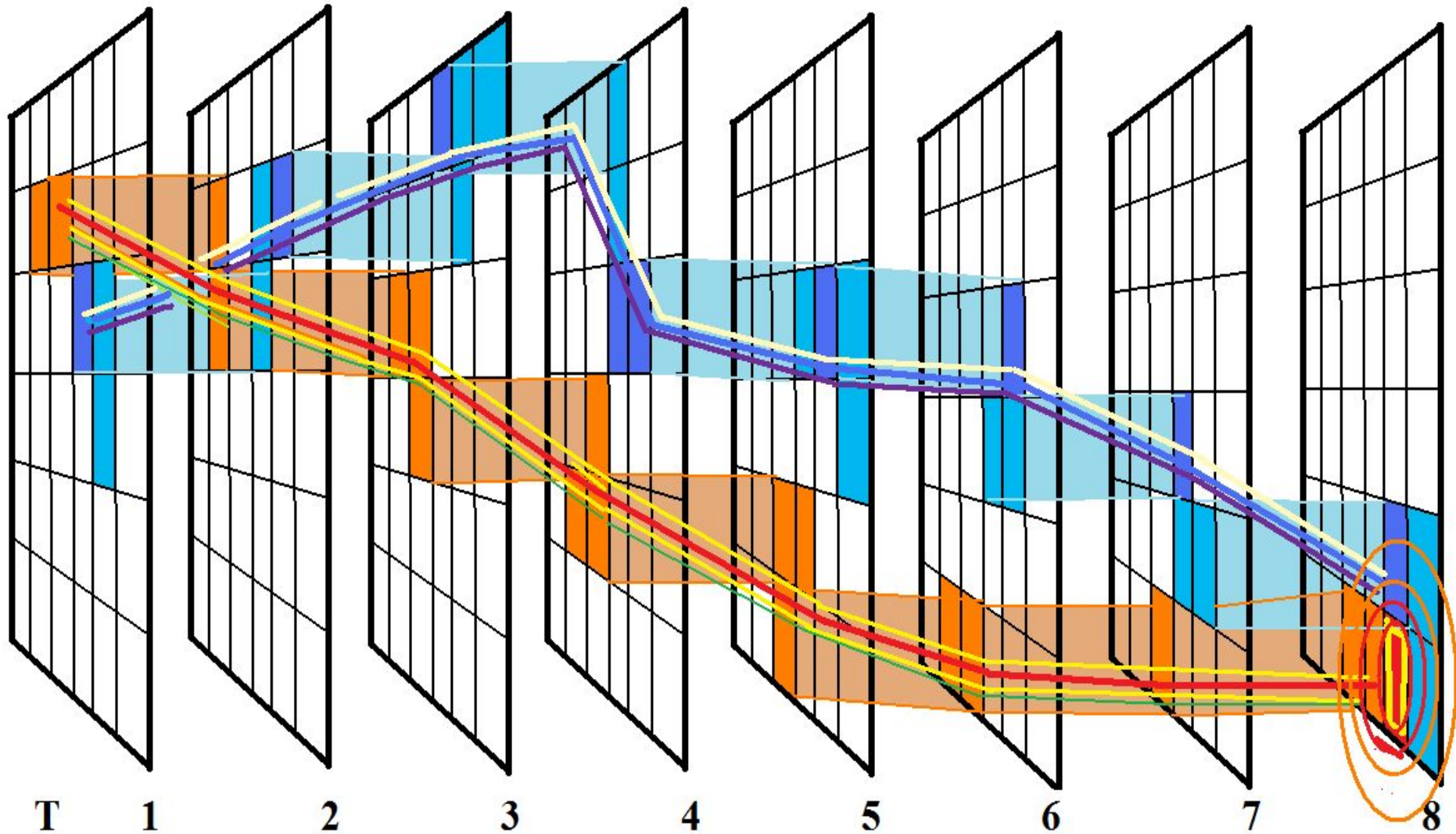
**Случайный процесс в n-кубе в дискретном времени.**



# 3-пути (траектории) события (встречи).



# Вероятная история события.





Спасибо за приглашение и  
внимание!

- Интернет журнал «Вычислительные методы и программирование» т.10,2009,с 340-347