

Полуквантовое кодирование в компьютерных многомерных комбинаторно-топологических моделях.

Г.Г.Рябов (НИВЦ МГУ)

Доклад на XII международной конференции «Информационные средства и технологии». Москва. МЭИ. 2009

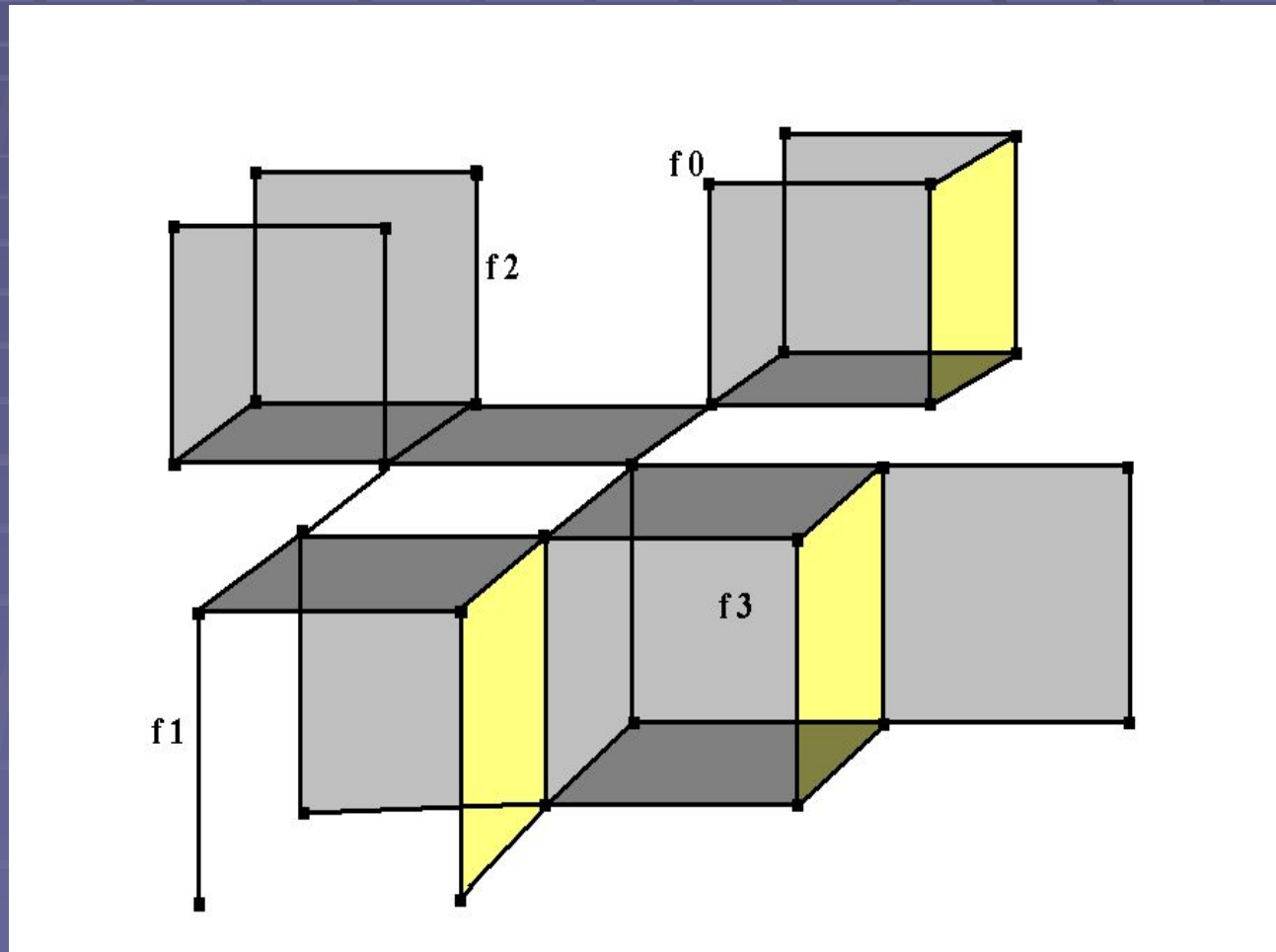
Работа поддержана грантом РФФИ (09-07-12135)

Геометрико-топологические модели в современной науке.

- Модели-посредник между теоретическими построениями и компьютерными методами расчетов.
- Решетки, сетки, симплициальные и кубические комплексы, многообразия...
- Многомерность и комбинаторная сущность квантовых систем □ как это отразится на суперкомпьютерах следующих поколений?

Кубические структуры.

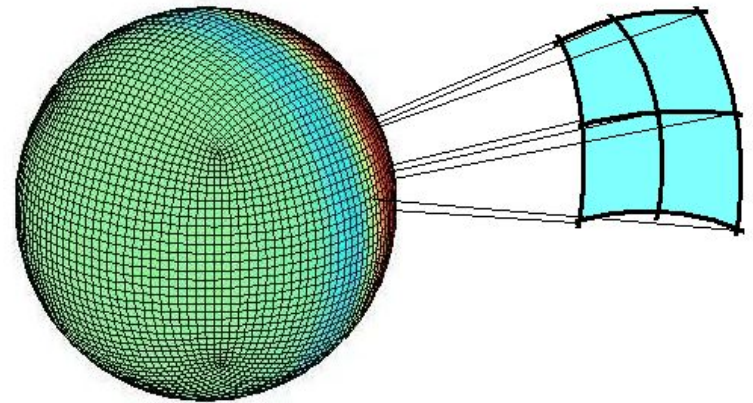
- Многие комбинаторные структуры вложимы в кубические комплексы.
- Комплексы изучаются в пространствах \mathbb{R}^n (вершины-целые точки \mathbb{Z}^n).



Глобальная модель климата (MIT gcm) и корректирующие коды.

- Кубическая сфера с конформной решеткой – база всех климатических расчетов.
- Хэммингово расстояние между кодами-вершинами n -куба – базовая мера в теории корректирующих кодов.

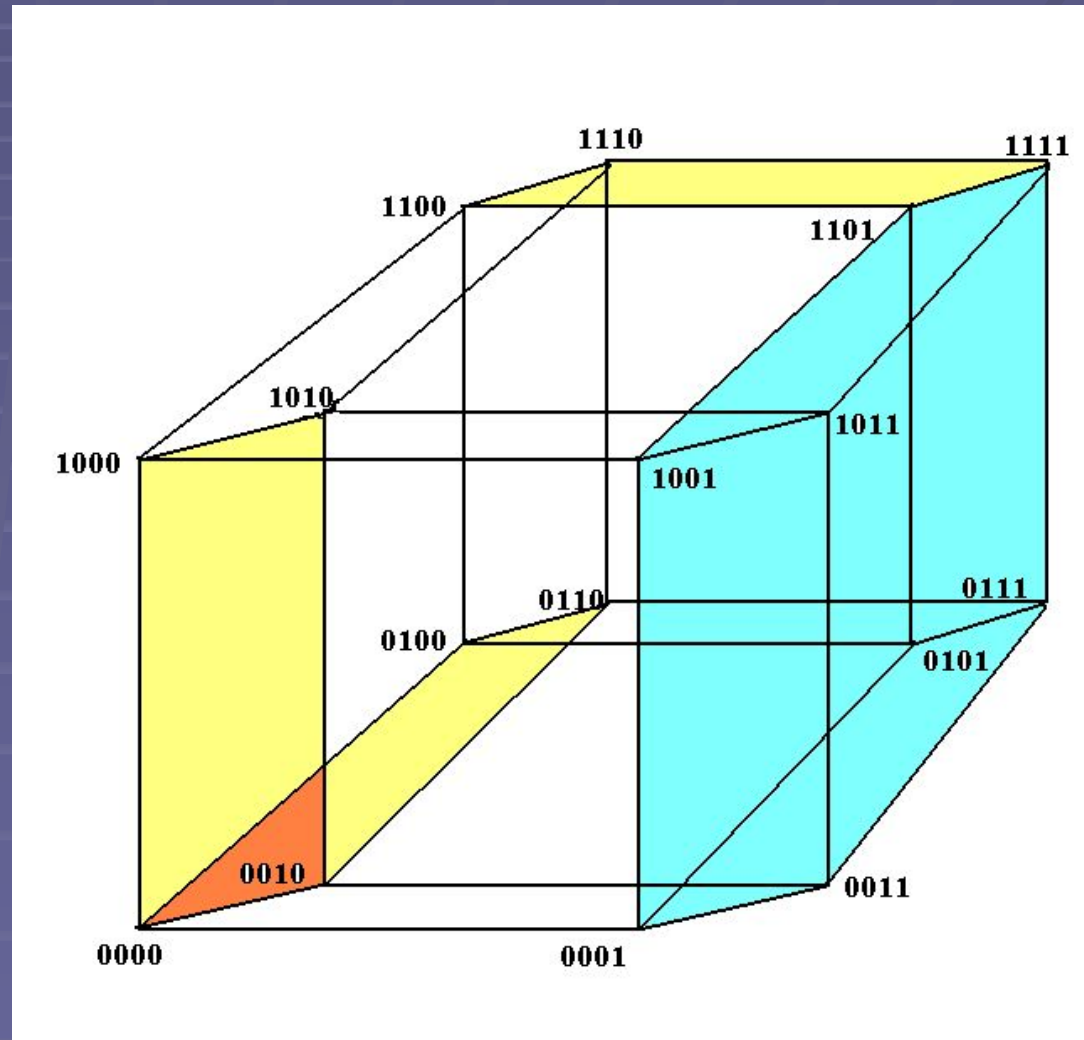
External Gravity Wave Propagation on Expanded Conformal Cubic Grid



Face 3cube: 32x32; 64x64; ...

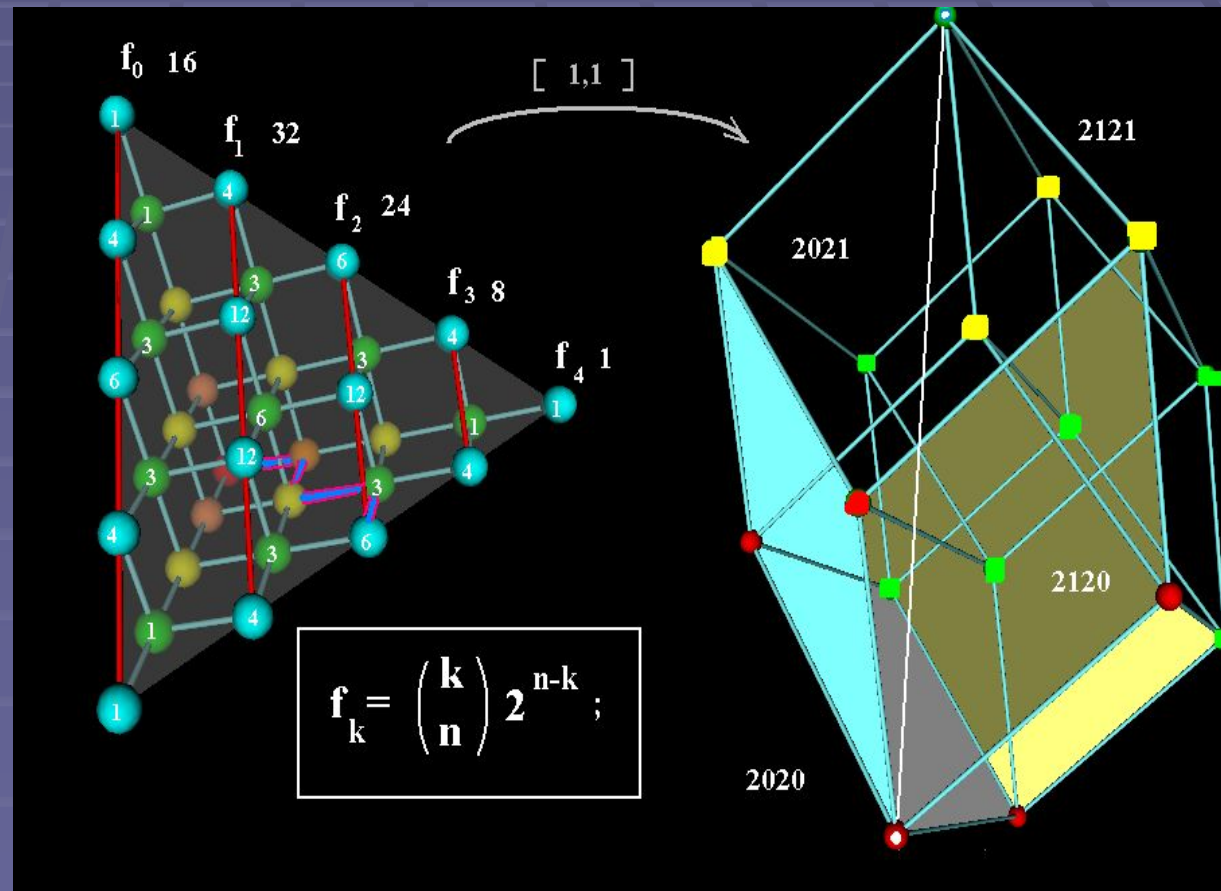
Кубические комплексы в I^n (R^n).

- 0-границы- вершины,
- 1-границы- ребра,
- 2-границы-квадраты
- 3-границы-кубы
- 4-границы и т.д.
- $f(k) = C_n^k 2^{n-k}$;



Пирамида Паскаля и k-мерные грани n-куба.

- Пирамида Паскаля-рекурсивная процедура в трехмерной решетке.
- Сумма чисел вдоль ребер ($y=k$) в плоскости $x+y+z=n$ равна числу k-граней в n-кубе.

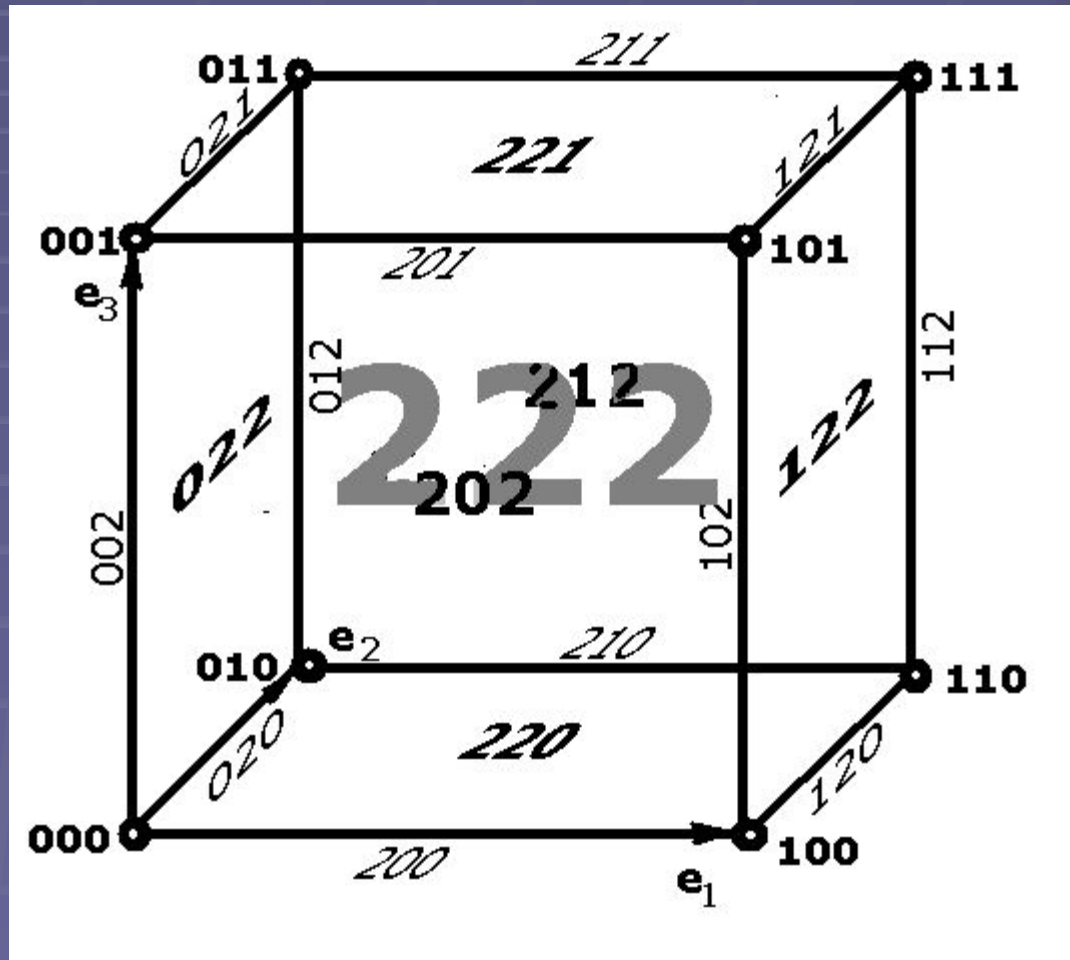


Биекция: множество всех n -
разрядных троичных
кодов \square \square множество всех
граней n -куба.

- $E = e_1, e_2, \dots, e_i, \dots, e_n; \square \mathbb{R}^n;$
- $D = d_1, d_2, \dots, d_i, \dots, d_n; \quad d_i \square \{0, 1, 2\};$
- $E \square D; \quad e_i \square d_i;$
- 021221 $\square e_2 \times e_4 \times e_5$ транс. в вершину 001001; трехмерная грань(куб) в шестимерном кубе.

Грани в I^3 .

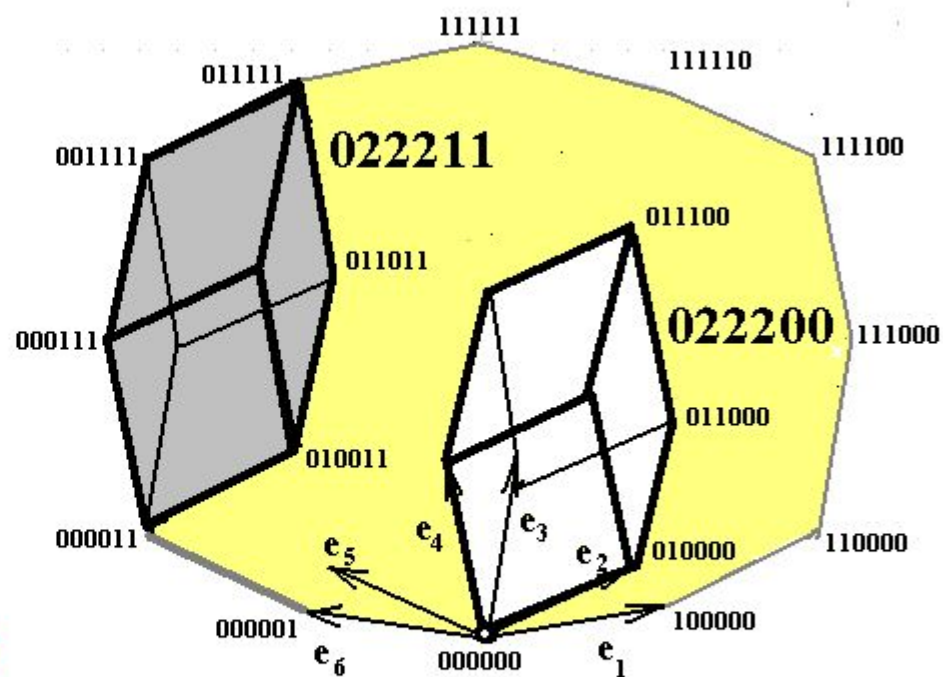
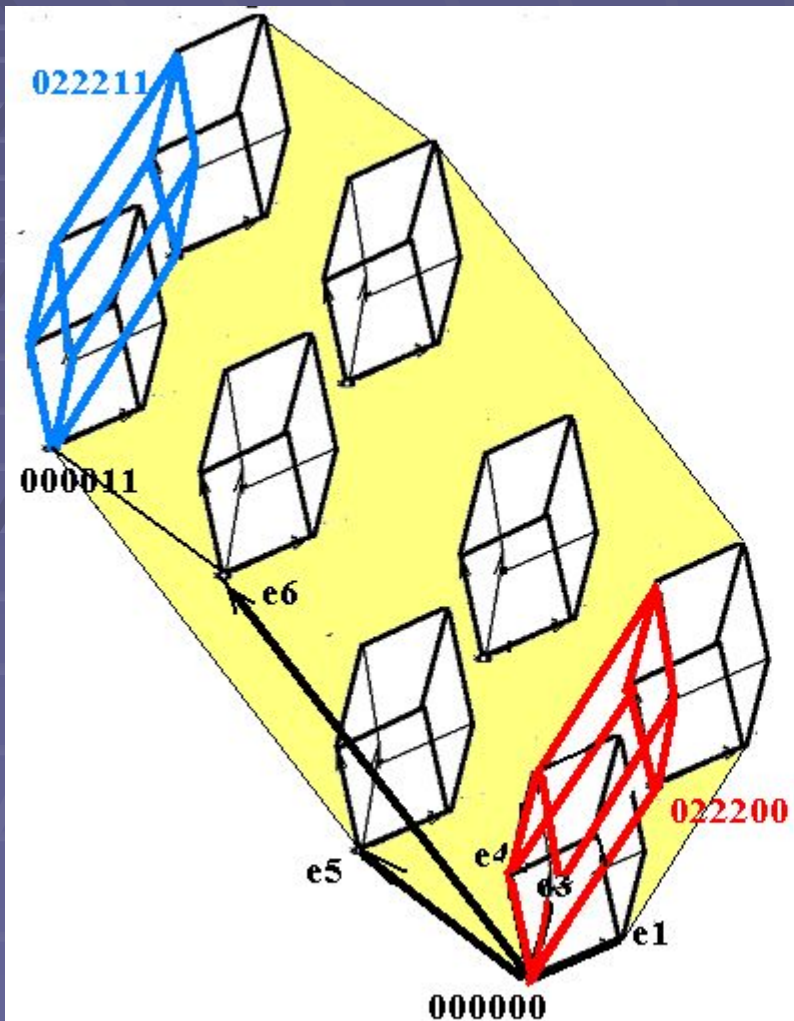
- Все грани в I^3 - все трехразрядные троичные коды.
- Алфавит $\{0,1,2\}$
- 222-весь I^3 .



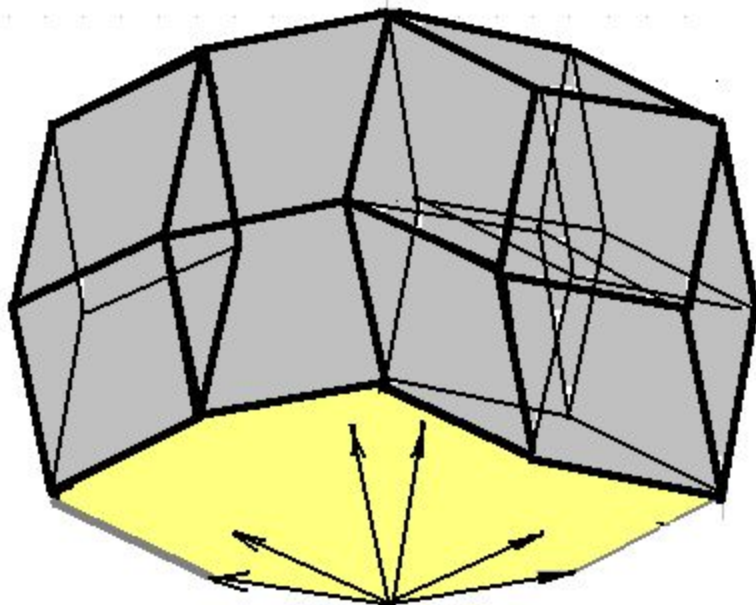
Кубанты

- **Кубант** в n -мерном евклидовом пространстве – троичный n -разрядный код, отражающий размерность грани и ее положение в n -мерном единичном кубе.

Кубанты 022200 и 022211 в I^6 .

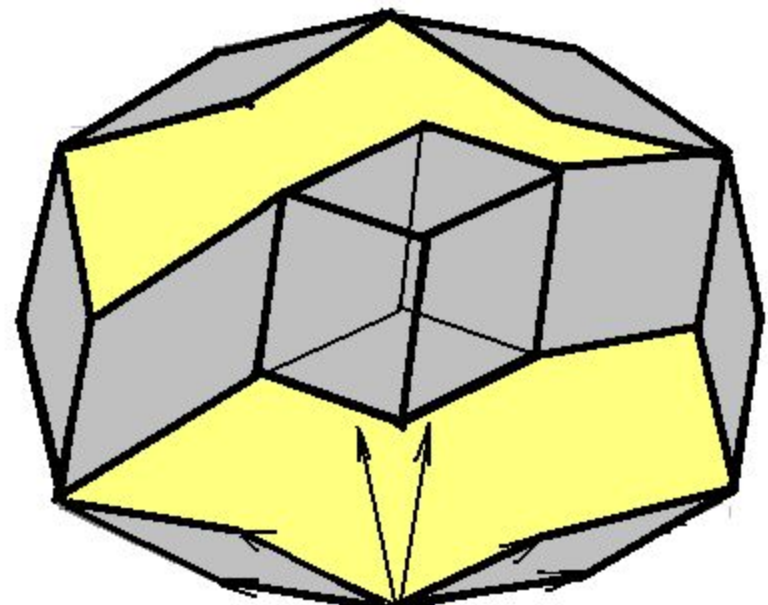


Комплексы из кубантов в I^6 .



000000

a)



000000

b)

- a). Комплекс из 3-х кубантов (3-куб, 3-куб, 4-куб).
- b). Комплекс из 9-и кубантов (8 квадратов и 3-куб).

Умножение (пересечение) кубантов.

- Умножение кубантов-поразрядная операция над словами, задаваемая данной таблицей.
- \emptyset -пустое множество.

| | 0 | 1 | 2 |
|----------|---------------------|---------------------|----------|
| 0 | 0 | ∅ | 0 |
| 1 | ∅ | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 2 |

Кубанты и псевдокубанты(с \emptyset) образуют полугруппу с единицей (МОНОИД).

- Расширение алфавита $\Sigma \{ \emptyset, 0, 1, 2 \}$.
- Все четверичные n -разрядные слова (кубанты и псевдокубанты) образуют полугруппу по умножению.
- Кубант x кубант = кубант или n /кубант.
П/кубант x кубант = п/кубант.
- Единица моноида-кубант $222\dots 2$.

Машинное представление

$\emptyset \square 0; 0 \square 1; 1 \square 2; 2 \square 3;$

- Таблица поразрядного умножения элементов моноида при машинном представлении.

| | 0 | 1 | 2 | 3 |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 2 | 0 | 0 | 2 | 2 |
| 3 | 0 | 1 | 2 | 3 |

Свойства произведения кубантов.

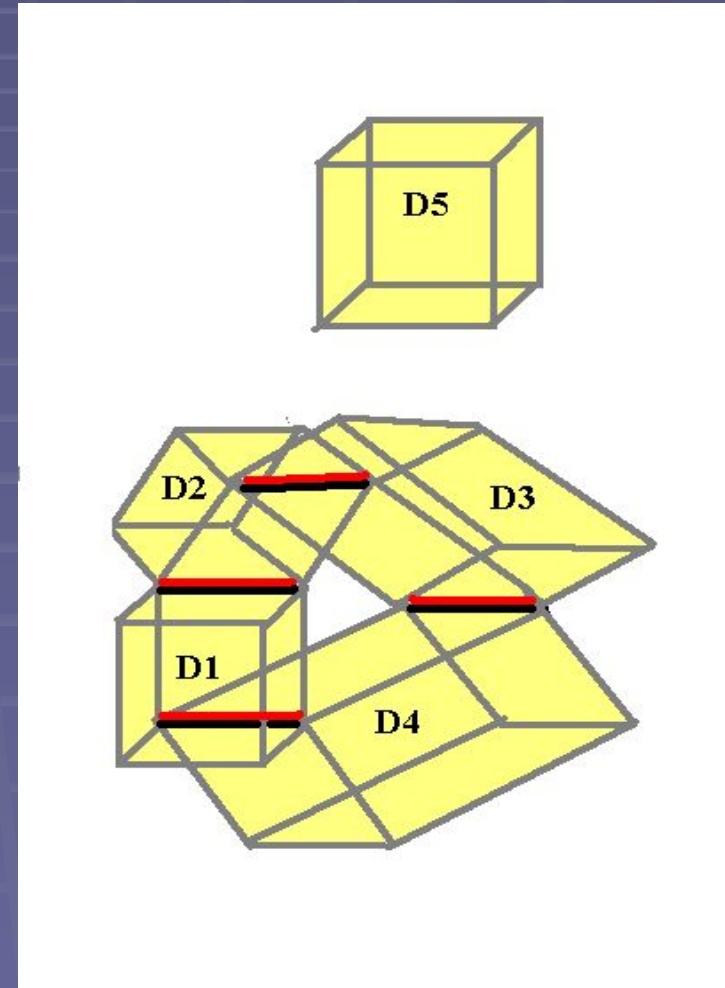
- $P(D1, D2) = D3$;
- $\omega(D3) =$ число разрядов с \emptyset .
- Если $\omega(D3) = 0$, то $D3$ – кубант-пересечение.
- Если $\omega(D3) = r > 0$, то $L_{\min}(D1, D2) = r$;
(минимальный путь по ребрам n -куба-
обобщение метрики Хэмминга для
двоичных кодов).
- Структура комплекса полностью
определяется перемножением кубантов.

Матрица парных произведений.

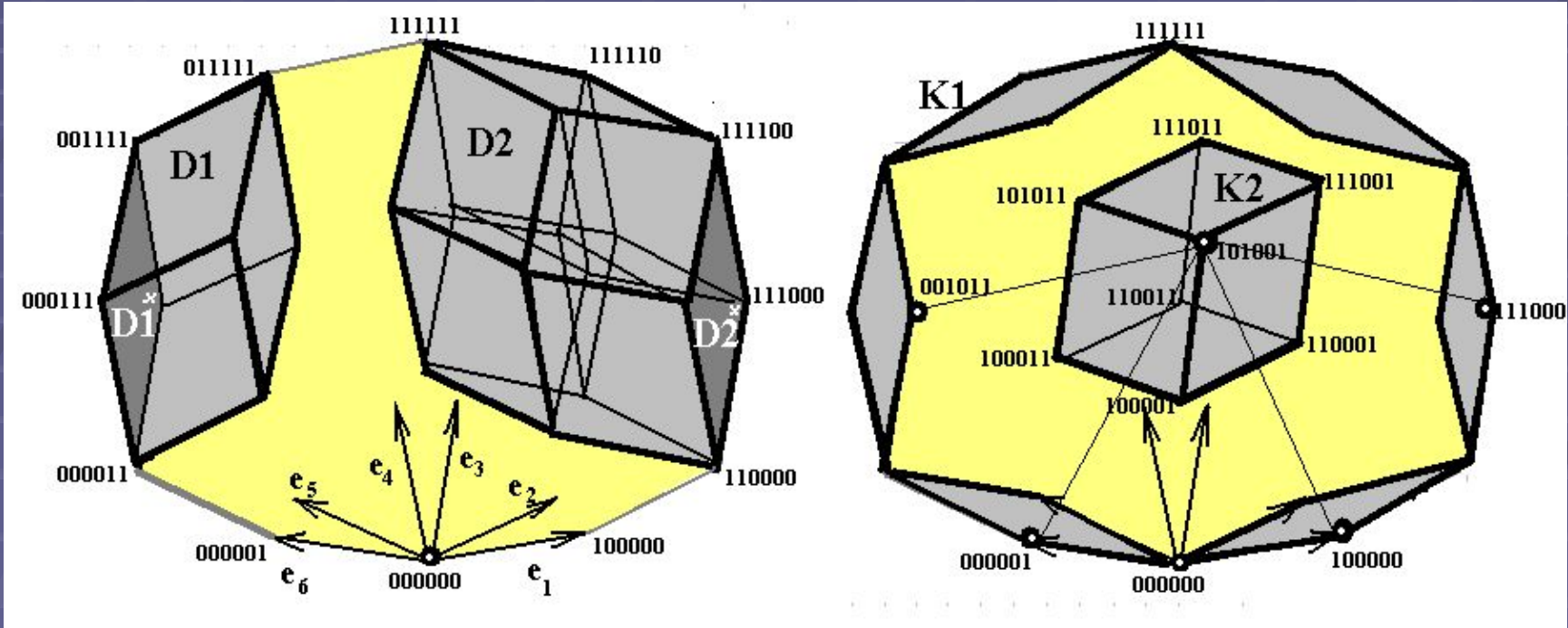
- $D1=112202$; $D2=121122$; $D3=122211$;
- $D4=120122$; $D5=002212$;

- 112202 111102 111201 110102 002200
- 121122 121111 120122 001112
- 122211 120111 002211
- 120122 000112
- 002212

- $D1, D2, D3, D4$ -образуют цикл (общие ребра, $D5$ отстоит на $L_{min}=1$ от $D2, D3, D4$ и на $L_{min}=3$ от $D1$;
- Обобщение матрицы смежностей для графов.



Хаусдорфова метрика на кубантах (обобщение метрики Хэмминга)



- $\rho_H(D1, D2) = \max\{\max \min L(D1 \square D2), \max \min L(D2 \square D1)\}$;
- Хаусдорфово сжатие $D1/D2 = D1^*$ и $D2/D1 = D2^*$; Самое большое L из самых коротких путей. Сжатие-поразрядная операция.

- 022211 112222
- 112200 002211
- $\emptyset 122\emptyset\emptyset$ $\emptyset\emptyset 2211$ $\square \max\{3, 2\} = 3$ $\square \rho_H = 3$:

Структура матрицы H-метрики для кубантов I^n .

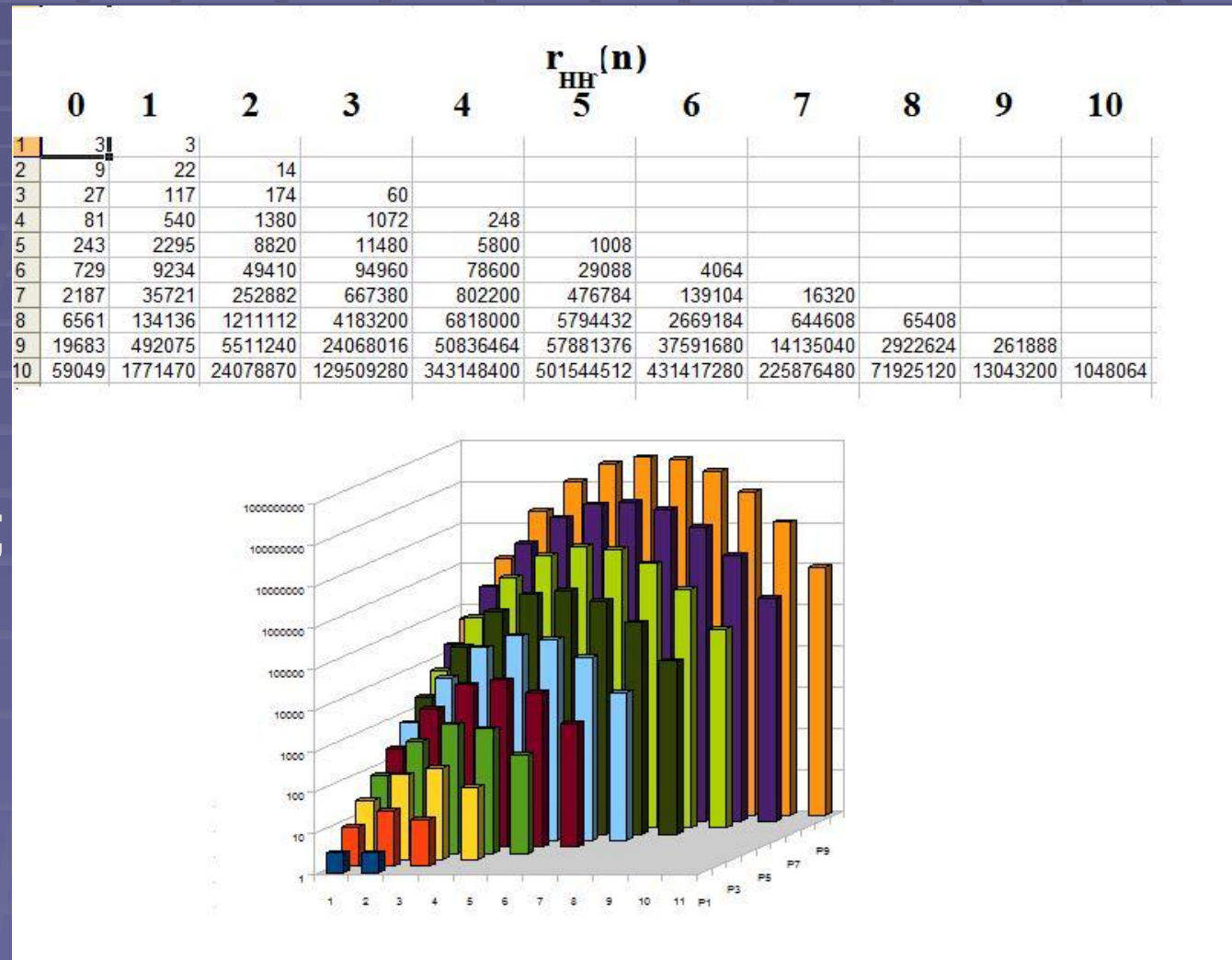
- Матрица $3^n \times 3^n$
- Миноры $H(k,m)$ $k \times m$, где k, m -размерности граней.
- $r = [s,t]$ -диапазон значений r_H в миноре.

| | 0 | 1 | ... | n-2 | n-1 | n |
|-----|--|--|-----|--|--|-----|
| 0 | $\begin{matrix} 0 & H(0,0) \\ \dots & [0,n] \end{matrix}$ 0 | $\begin{matrix} H(0,1) \\ r=[1,n] \end{matrix}$ | | $\begin{matrix} H(0,n-2) \\ r=[n-2,n] \end{matrix}$ | $\begin{matrix} H(0,n-1) \\ r=[n-1,n] \end{matrix}$ | n |
| 1 | | $\begin{matrix} 0 & H(1,1) \\ \dots & [0,n-1] \end{matrix}$ 0 | ... | $\begin{matrix} H(1,n-2) \\ r=[n-3,n-1] \end{matrix}$ | $\begin{matrix} H(1,n-1) \\ r=[n-2,n-1] \end{matrix}$ | n-1 |
| ... | | | ... | | | |
| n-2 | | | | $\begin{matrix} 0 & H(n-2,n-2) \\ \dots & r=[0,2] \end{matrix}$ 0 | $\begin{matrix} H(n-2,n-1) \\ r=[1,2] \end{matrix}$ | 2 |
| n-1 | | | | | $\begin{matrix} 0 & H(n-1,n-1) \\ \dots & r=[0,1] \end{matrix}$ 0 | 1 |
| n | | | | | | 0 |

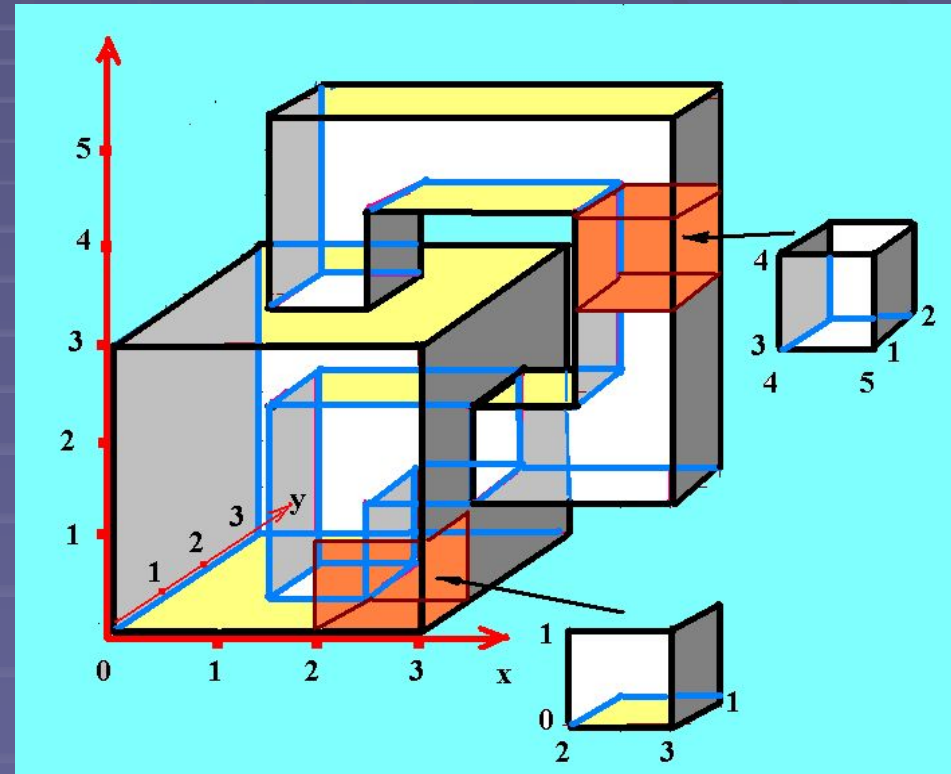
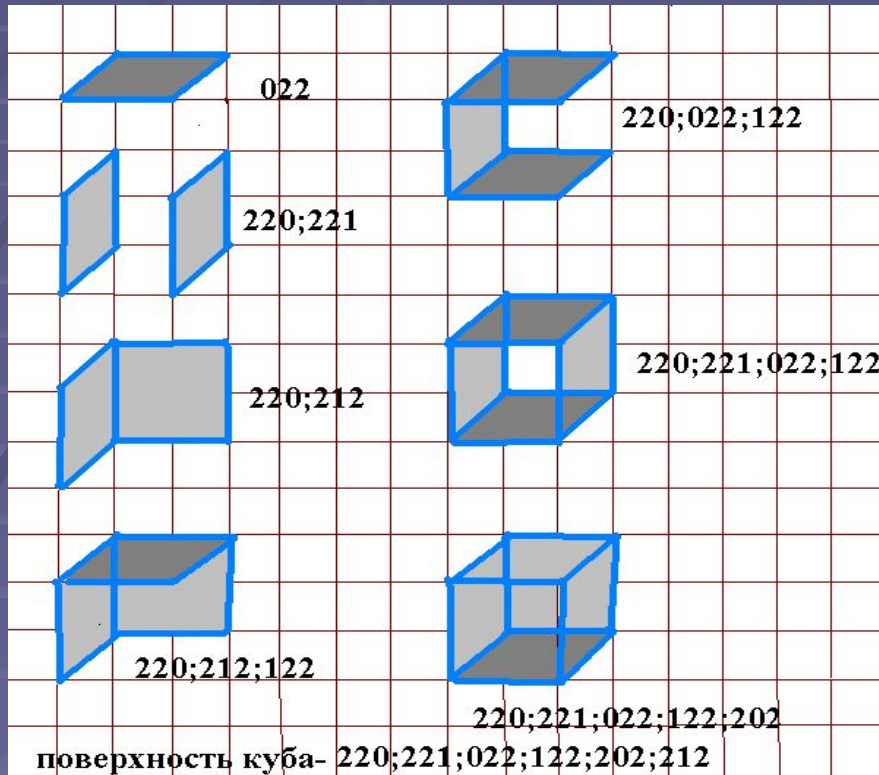
симметрия

Распределения значений H-метрики по размерностям граней при $n \rightarrow \infty$.

- Ассиметрия распределений.
- $r=0 \propto 3^n$;
- $r=n \propto 4^n - 2^{n-1}$;



Панельное топологическое строительство. Бутылка Клейна в 75 байт.



- Всех комплексов из гиперграней 64-для хранения номера комплекса -один байт памяти.

Полиморфизм кубантов (четверичного кодирования).

- Слово
- Число
- Множество точек \mathbb{R}^n .
- Геометрическая фигура
- Часть топологического комплекса.
- Элемент алгебраической структуры (моноид).
- Результат **одной операции** содержит информацию о связности, мин пути, размерности пересечения, положении внутри n -куба.
- Кубанты-гиперметрическое пространство.

Кубанты и супервычисления.

- Поразрядные операции над четверичными словами практически неограниченной длины, равной размерности исследуемого пространства.
- **Перевод вычисления метрики Хаусдорфа для кубантов из задач сложности 2^n в задачи сложности n^2 .**
- Хранение в табличном виде (заранее рассчитанных) n -мерных комплексов гиперграней (нумеративный подход).
- Исследования асимптотического поведения гиперрешеток (10d-11d) в интересах теоретической физики.
- Одна из проблем-значительное расширение оперативной памяти суперкомпьютера. Для 10d рабочее поле со стороной 100 требует память объемом 10^8 терабайт.

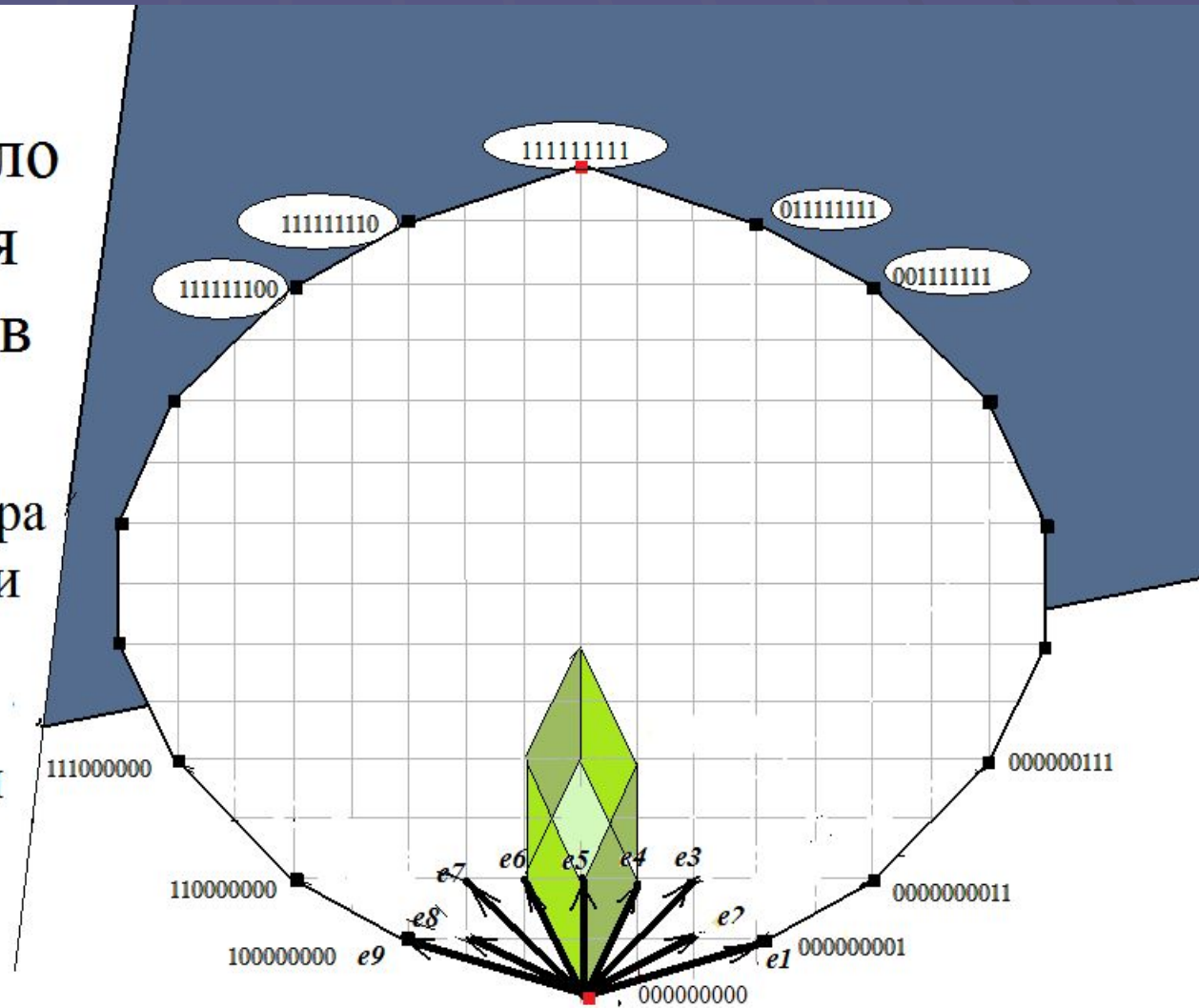
Вместо выводов.

- Связка алгебраических геометрии и топологии, комбинаторики, дифференциальных уравнений со структурой будущих суперкомпьютеров – одно из **прорывных комплексных направлений** не только в математике, но и в целом в науке.
- Отечественная математическая школа в этой области - одна из передовых в мире.
- Успех в этой области обеспечения суперкомпьютеров – шаг к занятию достойного места в международной научной кооперации.

Приложение. Многомерные построения k-путей.

Построить в \mathbb{I}^9
максимальное число
непересекающихся
3-путей из $(00\dots 0)$ в
 $(11\dots 1)$.

Три кубических коридора
с квадратными воротами
(двумерными гранями)
между соседними
отсеками (трехмерными
гранями-кубами).



Многомерные построения k-путей

| | A | B | C |
|---|------------|------------|------------|
| 1 | 222000000• | 000222000• | 000000222• |
| 2 | 221000002 | 002221000 | 000002221 |
| 3 | 211000022 | 022211000 | 000022211 |
| 4 | 111000222 | 222111000 | 000222111 |
| 5 | 111002221 | 221111002 | 002221111 |
| 6 | 111022211 | 211111022 | 022211111 |
| 7 | 111222111 | 111111222 | 222111111 |

Исходные данные:

I^9

$\dim Cb=3;$

$T(Cb)=9 \times L \times 3; \rightarrow A, B, C; ?$

$L=9-3+1=7;$

$\Pi(A_1, B_1, C_1)=000000000$

$\Pi(A_7, B_7, C_7)=111111111;$

$\Pi(A_i, B_i)=\emptyset; i=2-6;$

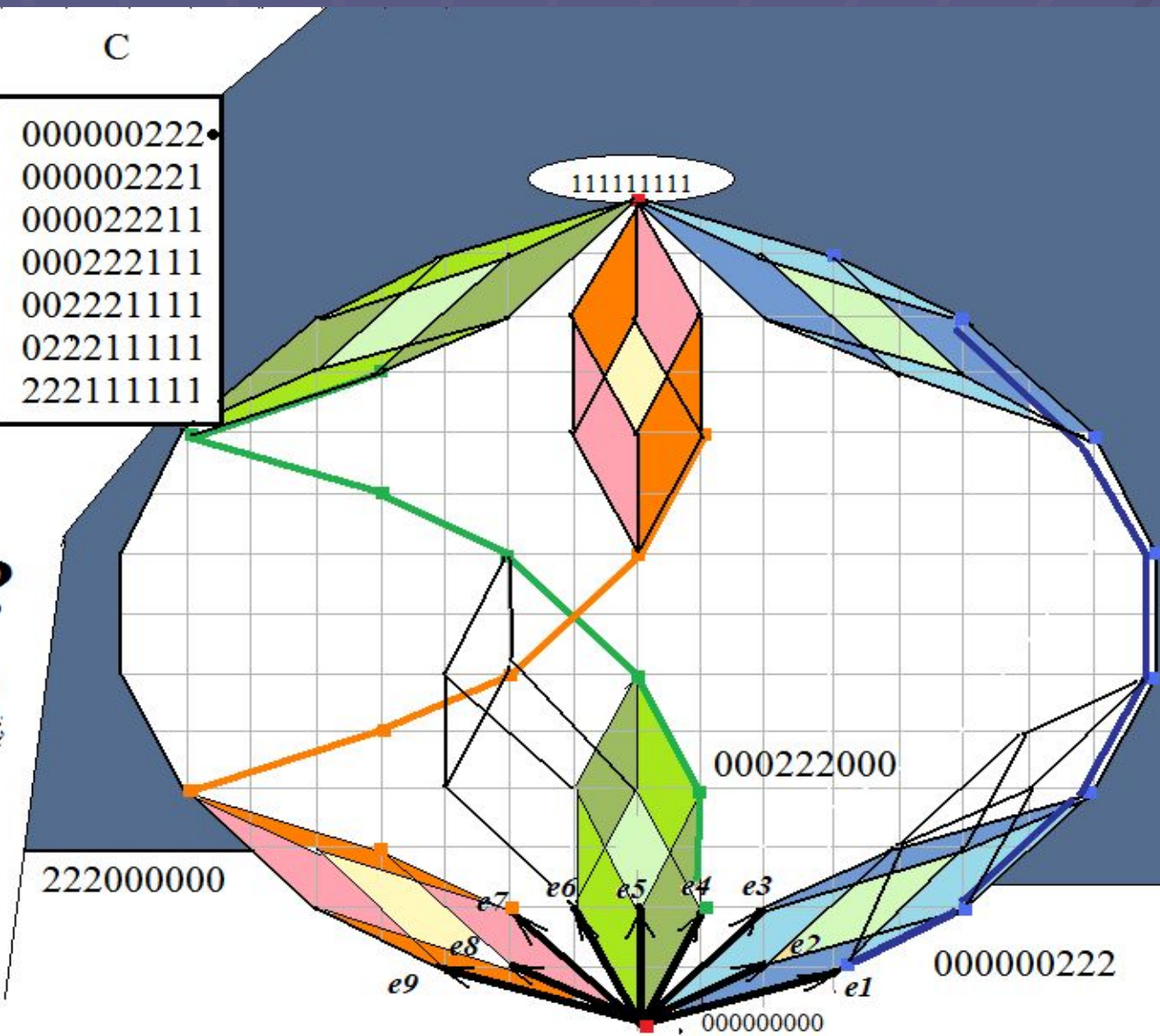
$\Pi(A_i, C_i)=\emptyset; i=2-6;$

$\Pi(B_i, C_i)=\emptyset; i=2-6;$

$\dim \Pi(A_i, A_{i+1})=2; i=1-6;$

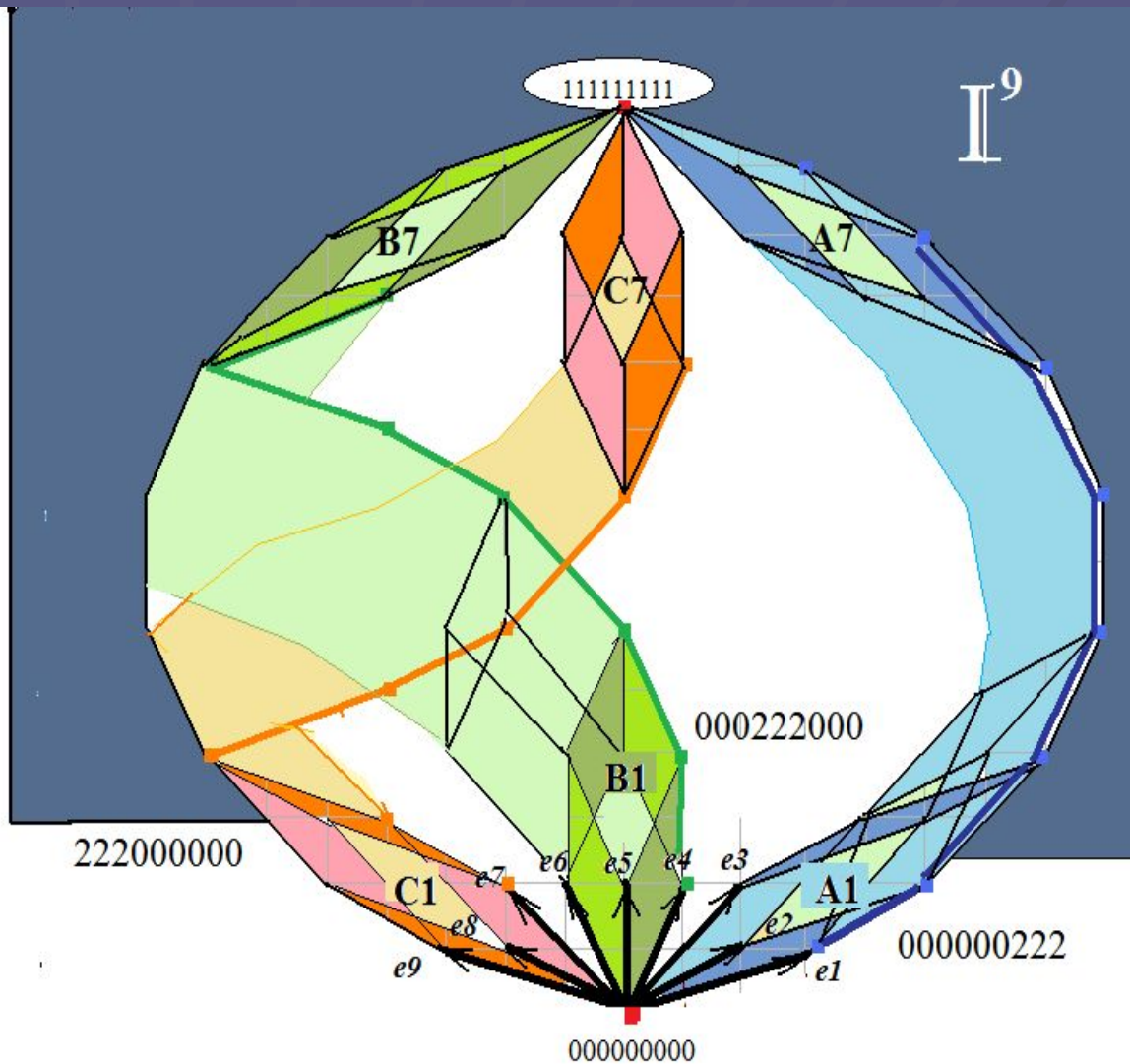
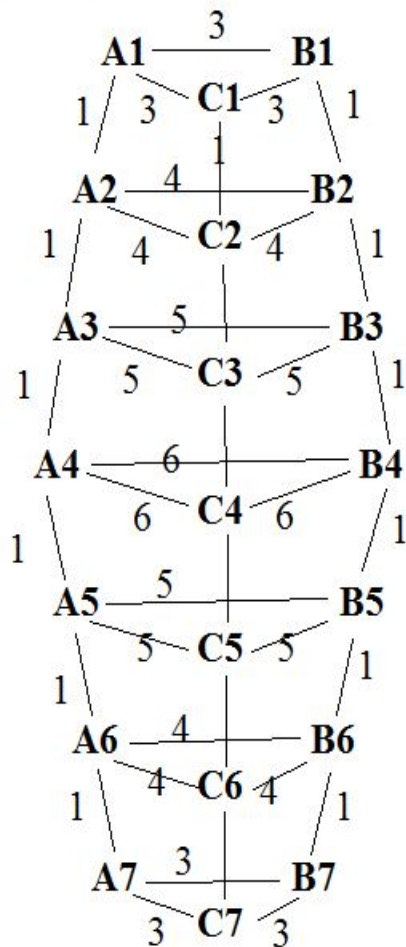
$\dim \Pi(B_i, B_{i+1})=2; i=1-6;$

$\dim \Pi(C_i, C_{i+1})=2; i=1-6;$



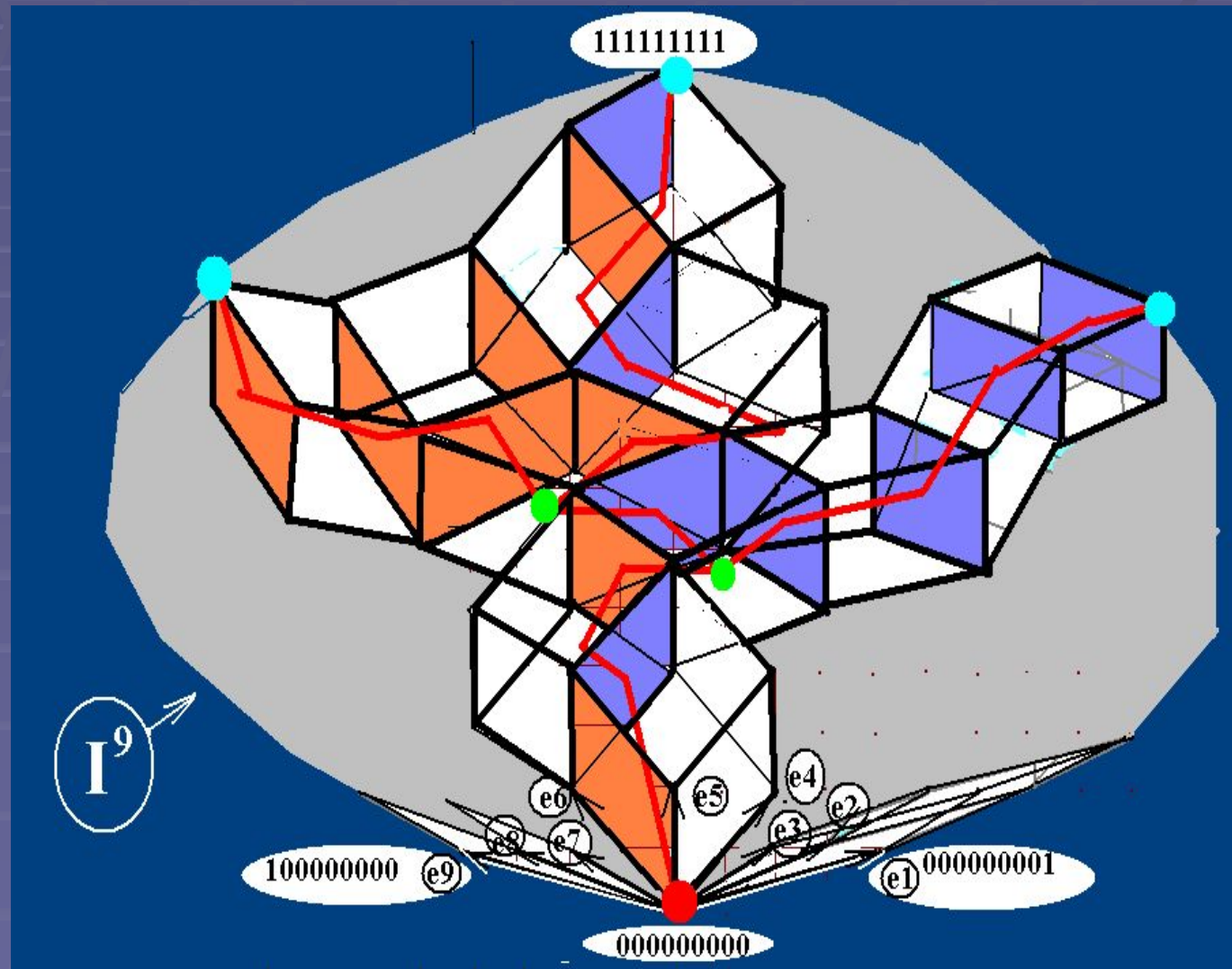
H-метрика в k-путях.

Хаусдорфова метрика 3-путей.



Многомерные построения.

- Процесс расслоения
- Процесс слияния
- Следы процесса на гранях пространства-полиэдра



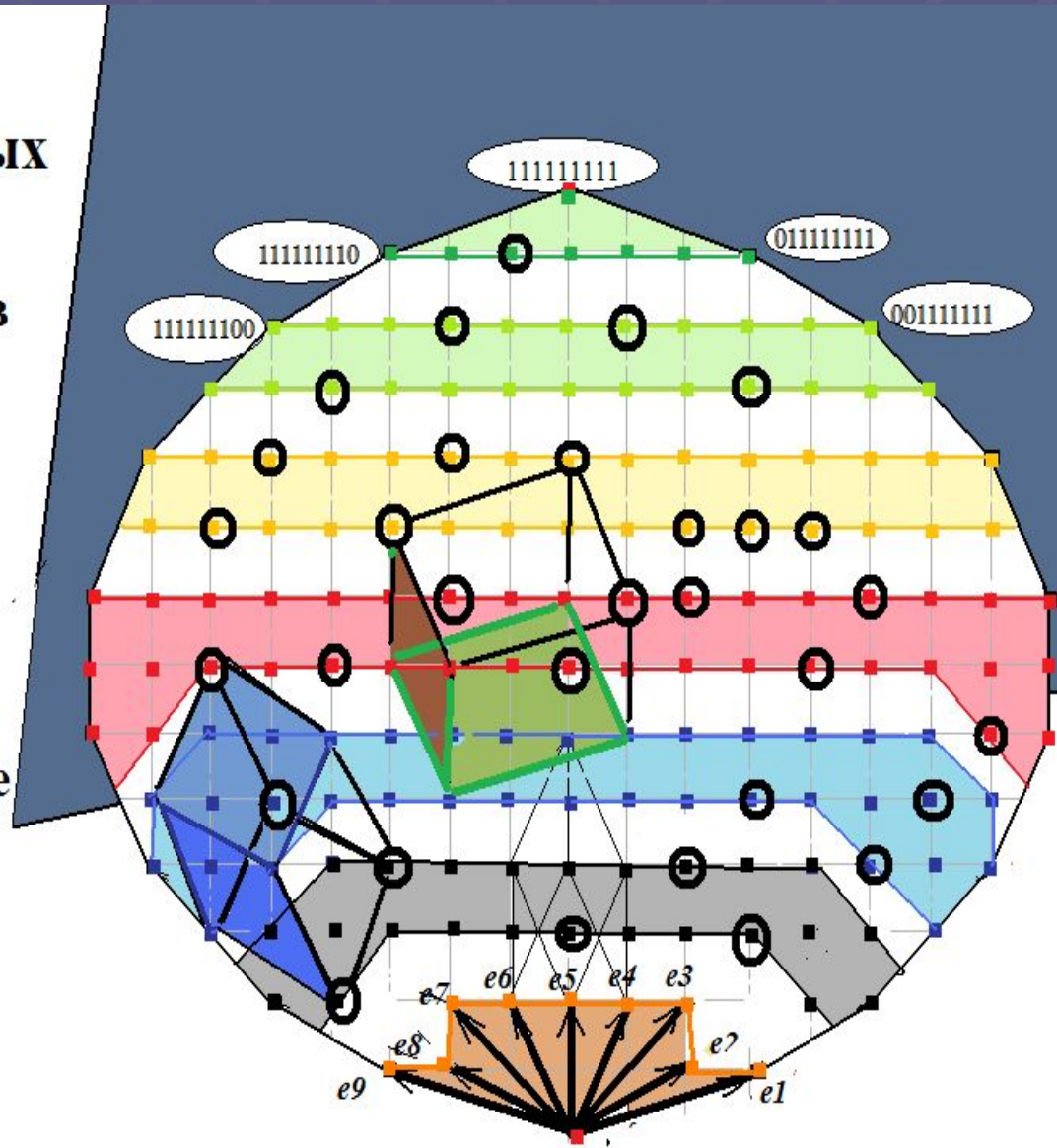
Случайная динамика в n-кубе.

Динамика-перестроение структуры из-за локальных дефектов.

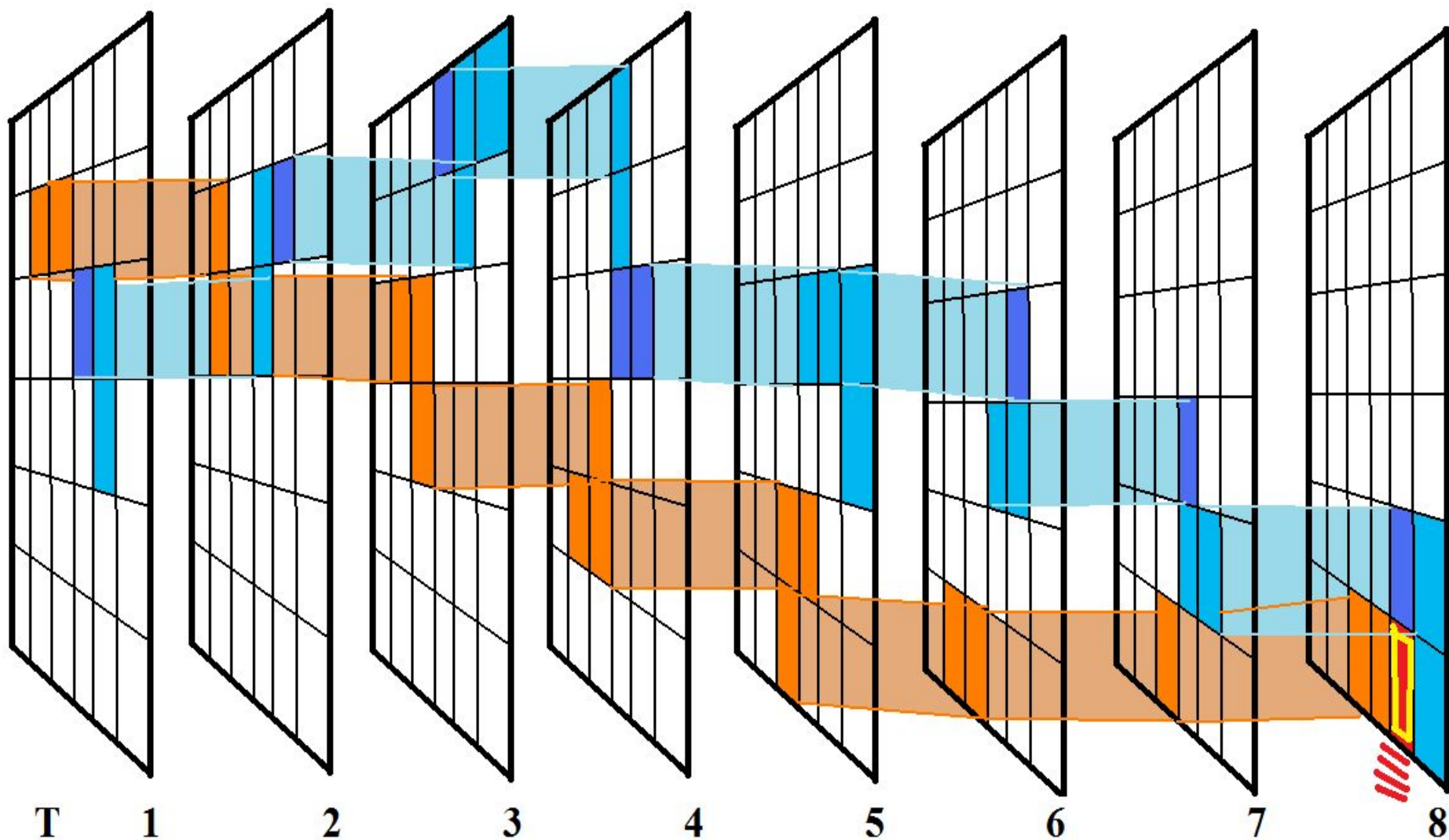
Выпадение вершины-обрыв k-граней, инцидентных ей.

Восстановление грани, когда выпуклая оболочка оставшегося "каркаса" равна грани.

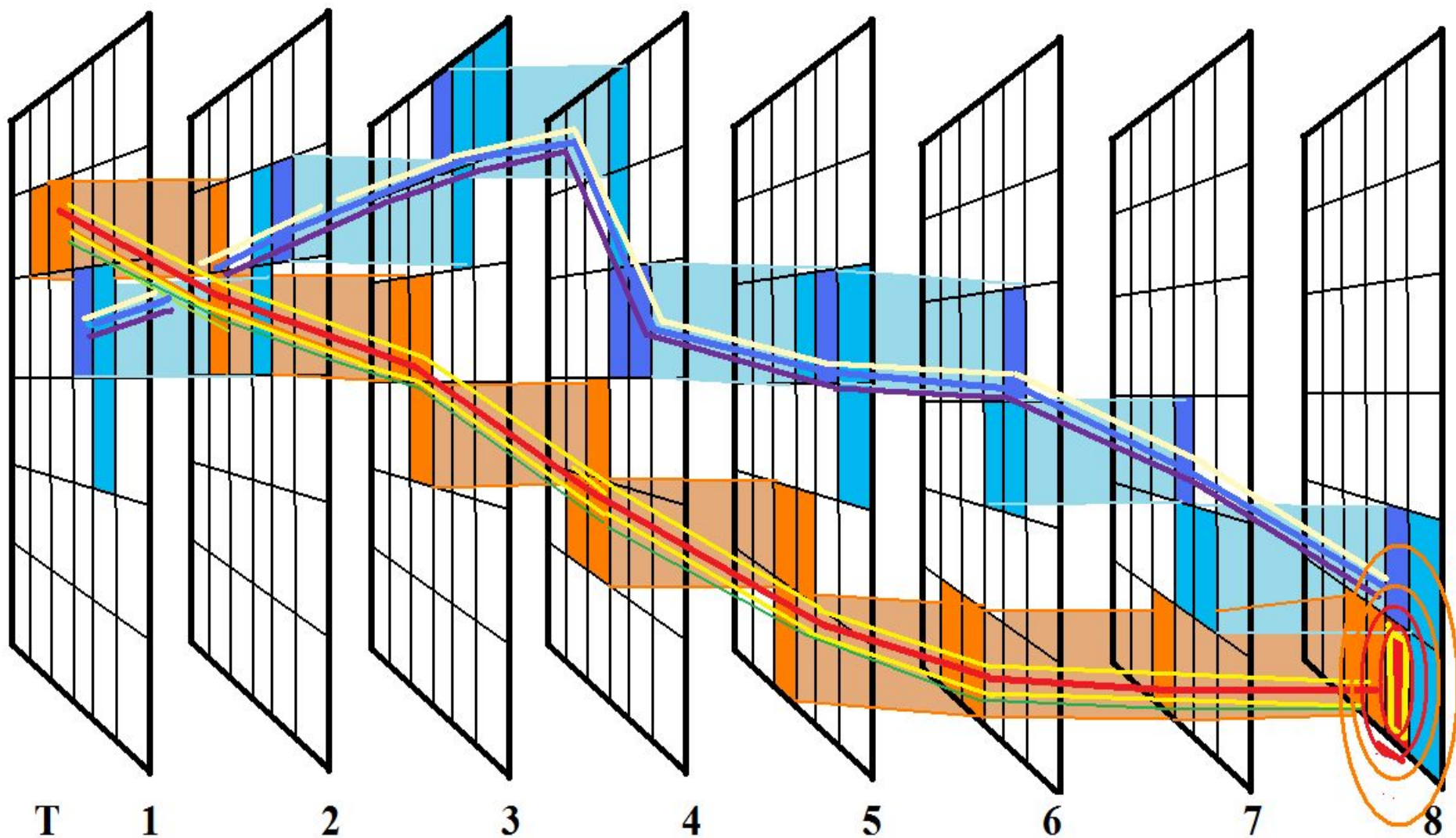
Случайный процесс в n-кубе в дискретном времени.



3-пути (траектории) события (встречи).



Вероятная история события.



Спасибо за приглашение и
внимание!

- Интернет журнал «Вычислительные методы и программирование» т.10,2009,с 340-347