Полуквантовое кодирование в компьютерных многомерных комбинаторно-топологических моделях.

Г.Г.Рябов (НИВЦ МГУ)

Доклад на XII международной конференции «Информационные средства и технологии».Москва.МЭИ.2009

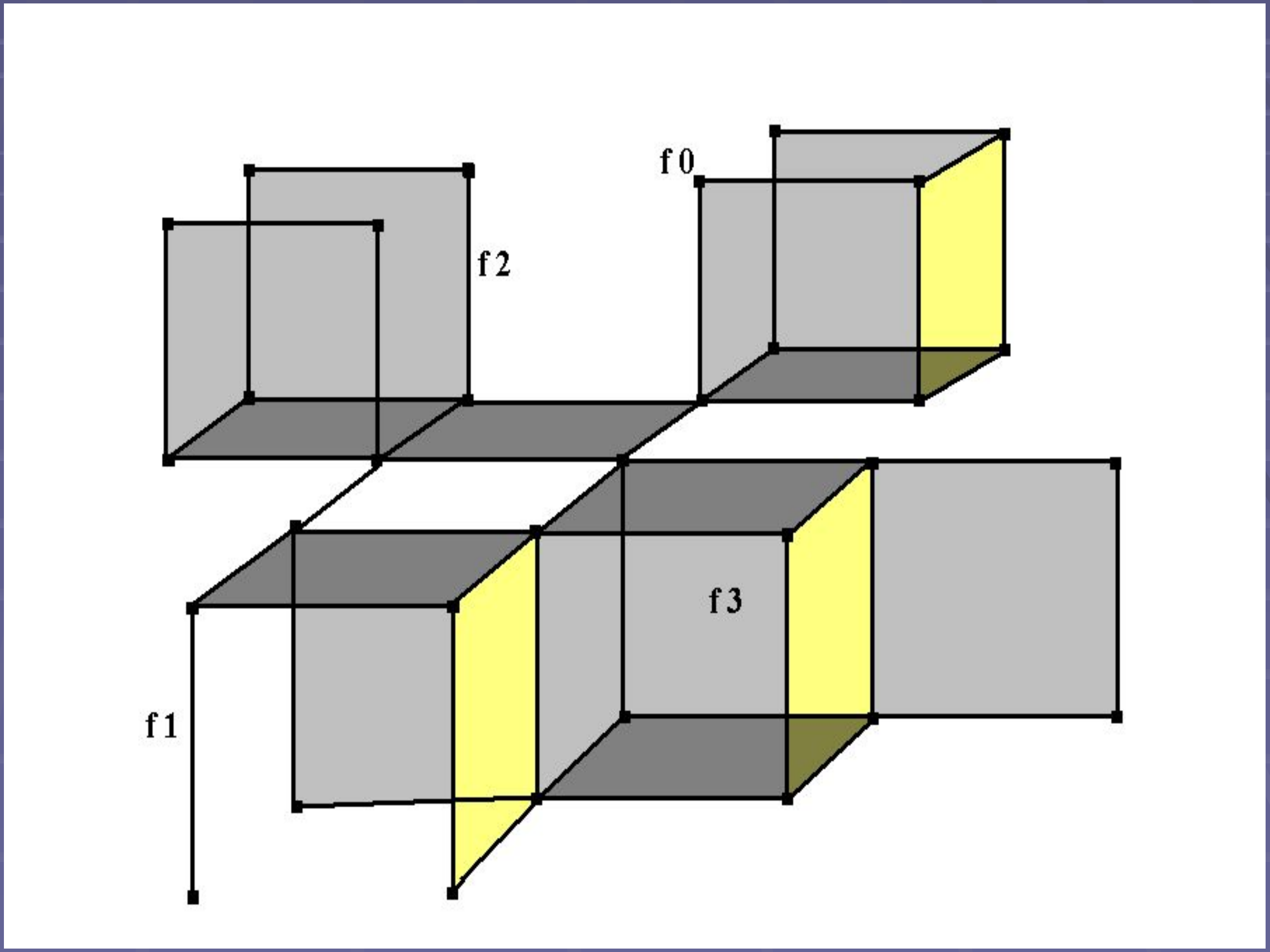
Работа поддержана грантом РФФИ (09-07-12135)

Геометрико-топологические модели в современной науке.

- Модели-посредник между теоретическими построениями и компьютерными методами расчетов.
- Решетки, сетки, симплициальные и кубические комплексы, многообразия…
- Многомерность и комбинаторная сущность квантовых систем → как это отразится на суперкомпьютерах следующих поколений?

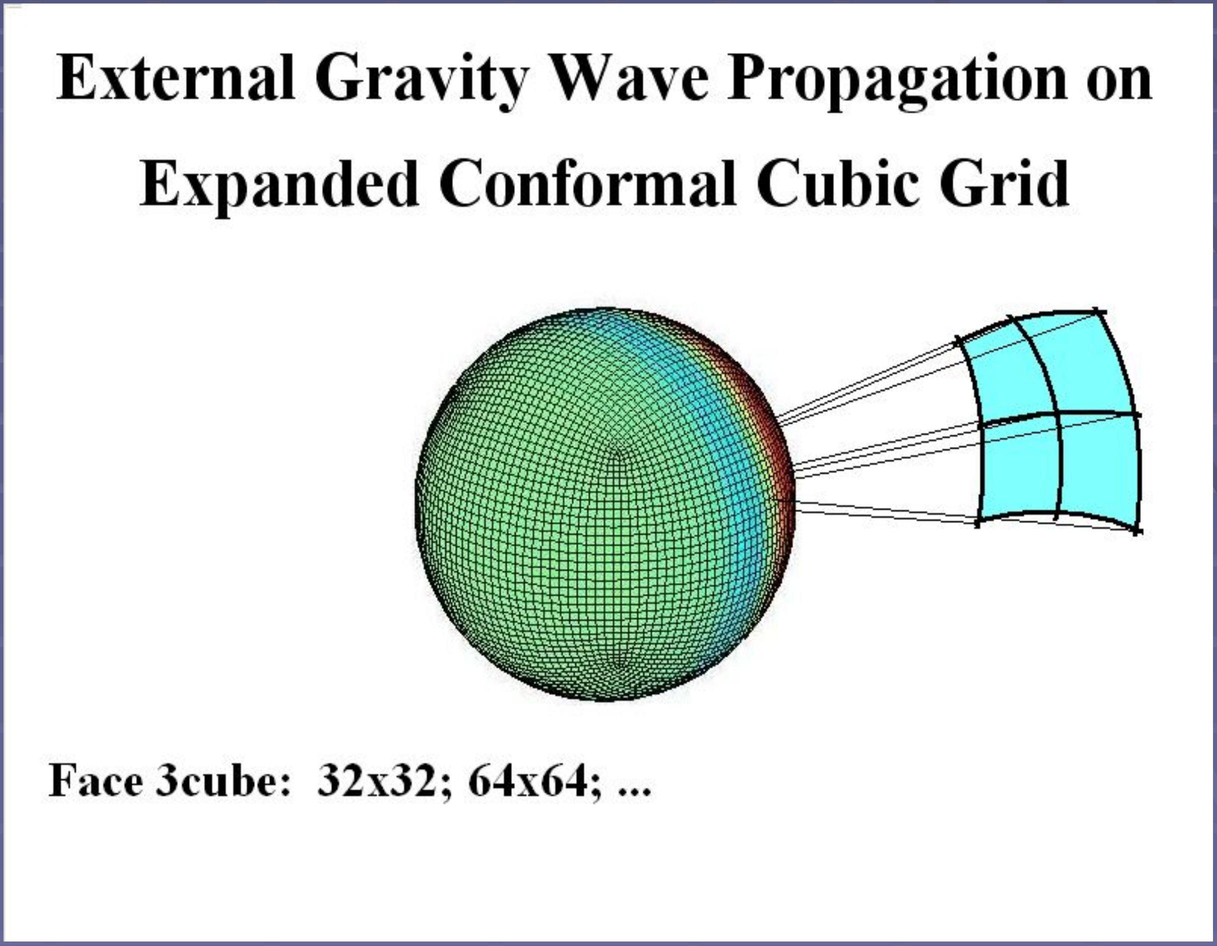
Кубические структуры.

- Многие комбинаторные структуры вложимы в кубические комплексы.
- Комплексы изучаются в пространствах $\mathbf{R}^{n}{}_{c}$ (вершины-целые точки $\mathbf{Z}^{n}$).



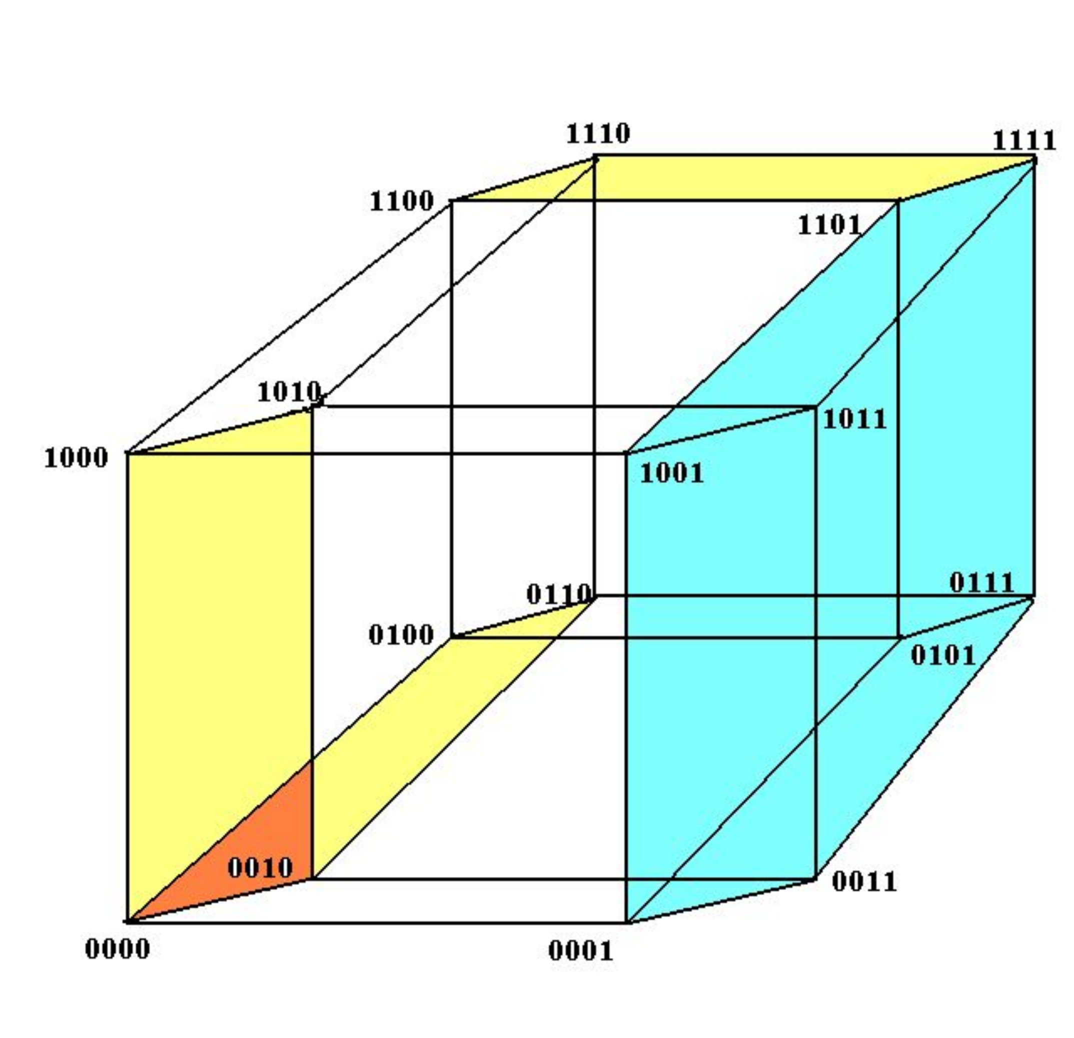
Глобальная модель климата (MIT gcm) и корректирующие коды.

- Кубическая сфера с конформной решеткой – база всех климатических расчетов.
- Хэммингово расстояние между кодами-вершинами n-куба – базовая мера в теории корректирующих кодов.



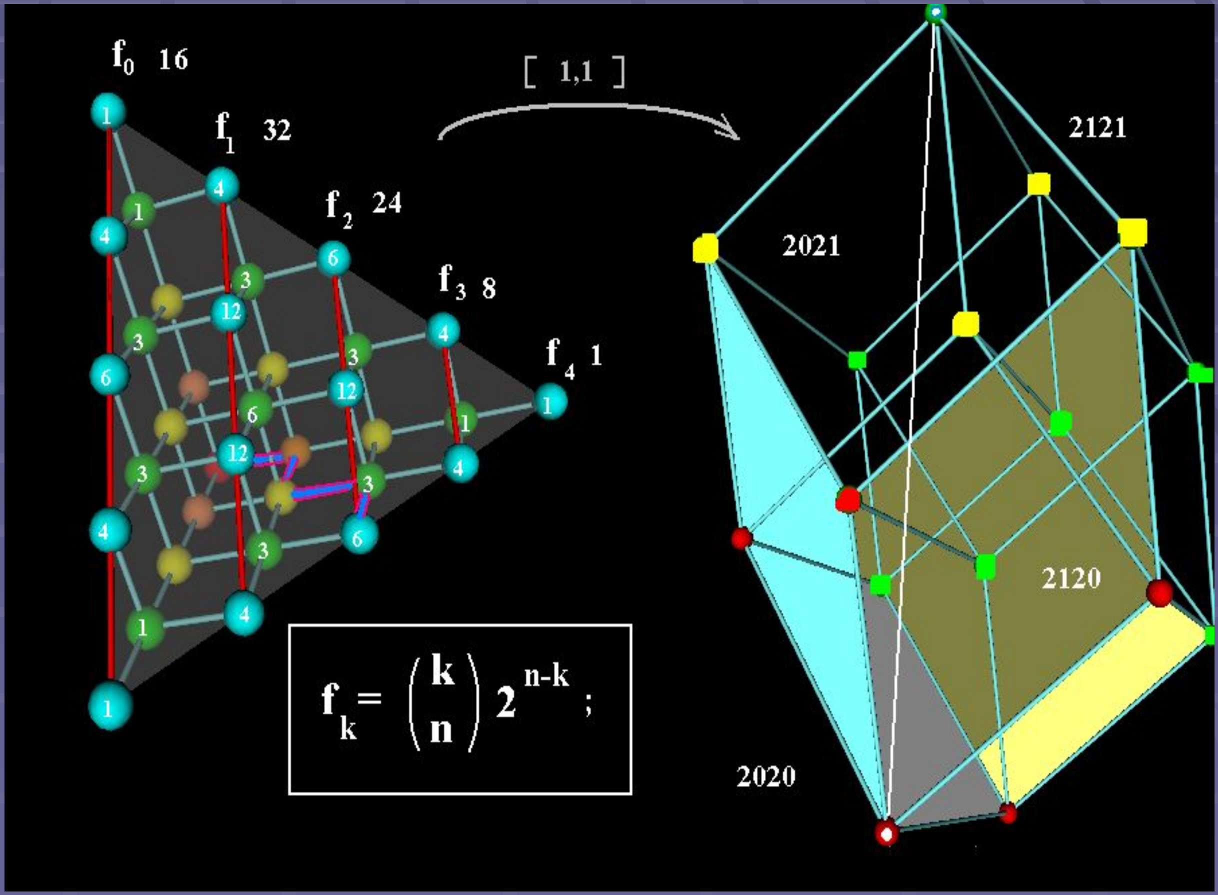
Кубические комплексы в I^n (R^n).

- 0-грани- вершины,
- 1-грани- ребра,
- 2-грани-квадраты
- 3-грани-кубы
- 4-грани и т.д.
- $f(k)=C_n^k\, 2^{n-k}$;



Пирамида Паскаля и k-мерные грани n-куба.

- Пирамида Паскаля- рекурсивная процедура в трехмерной решетке.
- Сумма чисел вдоль ребер (y=k) в плоскости x+y+z=n равна числу k-граней в n-кубе.

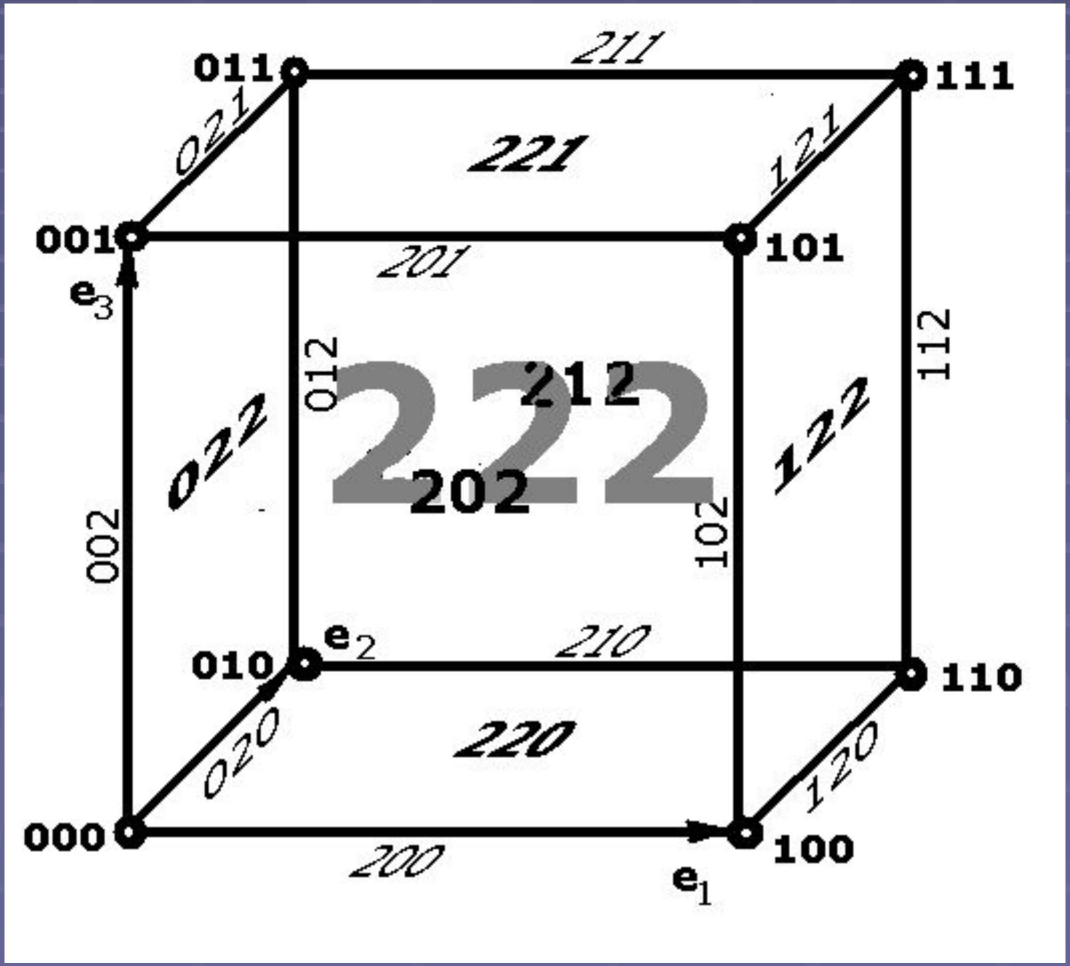


Биекция: множество всех n-разрядных троичных кодов□□множество всех граней n-куба.

- **$E=e_1,e_2,\ldots e_i,\ldots e_n$; □ R^n;**
- D=d1,d2,…di,…dn;   di□{0,1,2};
- **E**□D; **ei**□di;
- 021221□e_2xe_4xe_5 транс. в вершину 001001; трехмерная грань(куб) в шестимерном кубе.

Грани в $\mathbf{I}^3$.

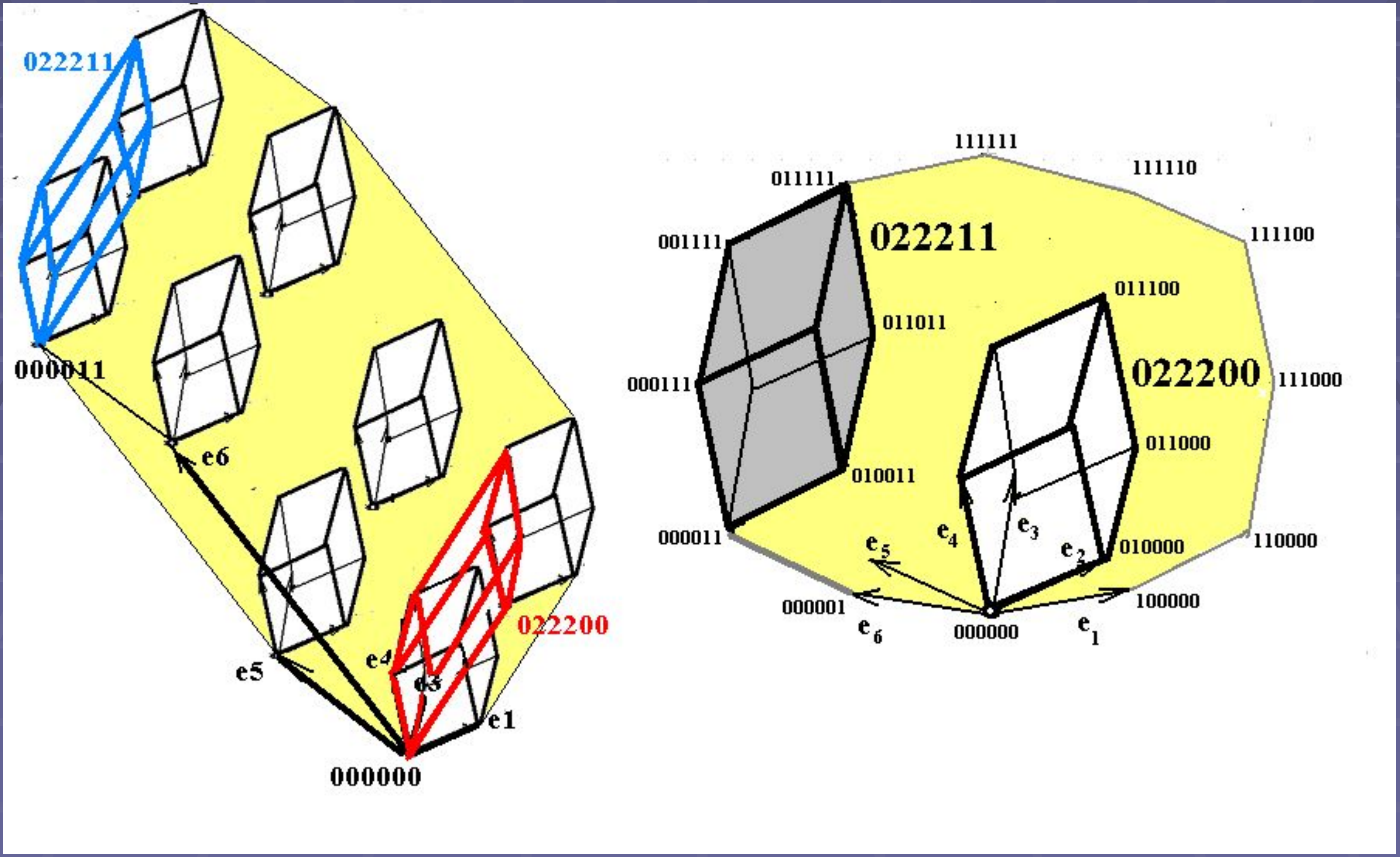
- Все грани в $\mathbf{I}^3$- все трехразрядные троичные коды.
- Алфавит {0,1,2}
- 222-весь $\mathbf{I}^3$.



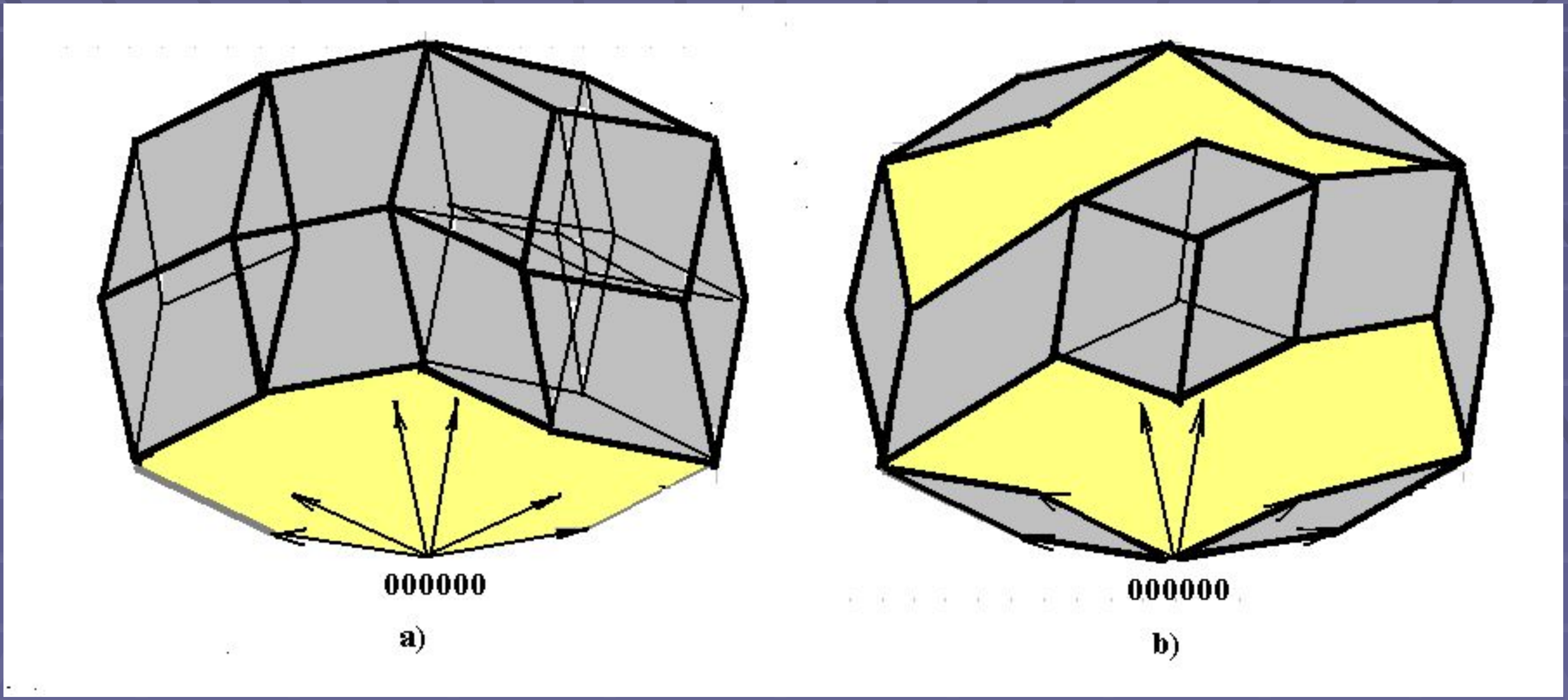
Кубанты

- **Кубант** в n-мерном евклидовом простанстве –троичный n-разрядный код, отражающий размерность грани и ее положение в n-мерном единичном кубе.

Кубанты 022200 и 022211 в I^6.



Комплексы из кубантов в I^6.



- a).Комплекс из 3-х кубантов (3-куб,3-куб,4-куб).
- b).Комплекс из 9-и кубантов (8 квадратов и 3-куб).

Умножение (пересечение) кубантов.

- Умножение кубантов-поразрядная операция над словами, задаваемая данной таблицей.
- ∅-пустое множество.

	0	1	2
0	0	∅	0
1	∅	1	1
2	0	1	2

Кубанты и псевдокубанты(с Ø) образуют полугруппу с единицей (моноид).

- Расширение алфавита □{Ø,0,1,2}.
- Все четверичные n-разрядные слова (кубанты и псевдокубанты) образуют полугруппу по умножению.
- Кубант х кубант=кубант или п/кубант. П/кубант х кубант=п/кубант.
- Единица моноида-кубант 222…2.

Машинное представление Ø□0;0□1;1□2;2□3;

- Таблица поразрядного умножения элементов моноида при машинном представлении.

	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	0	1
2	0	0	2	2
3	0	1	2	3

Свойства произведения кубантов.

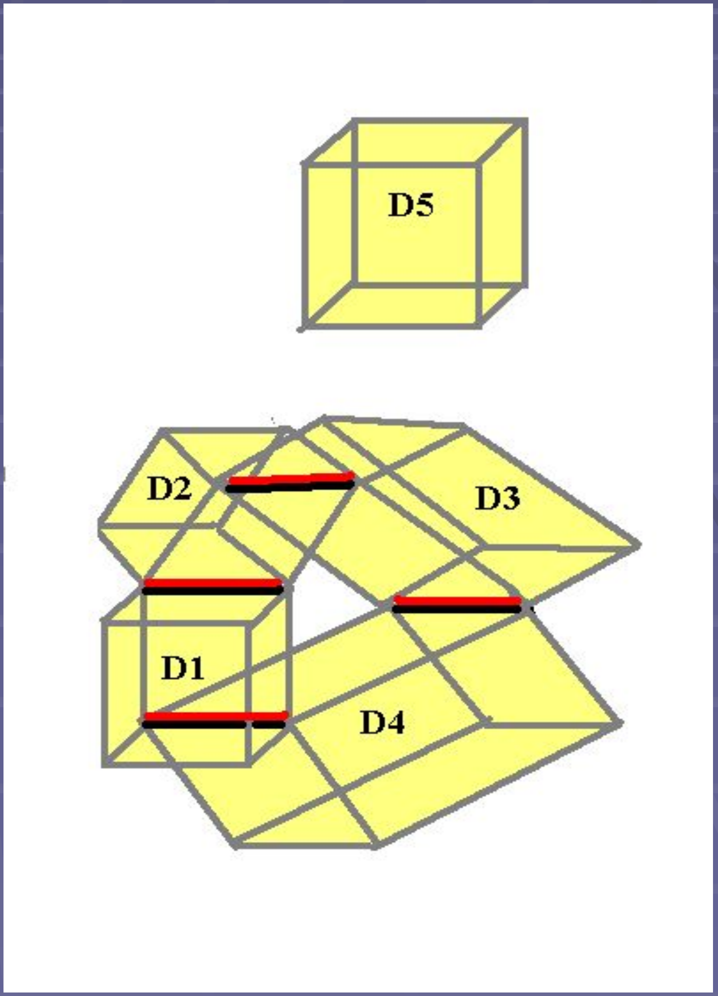
- П(D1,D2)=D3;
- ω(D3) = число разрядов с Ø.
- Если ω(D3)=0,то D3–кубант-пересечение.
- Если ω(D3)= r>0, то Lmin(D1,D2)=r; (минимальный путь по ребрам n-куба- обобщение метрики Хэмминга для двоичных кодов).
- Структура комплекса полностью определяется перемножением кубантов.

Матрица парных произведений.

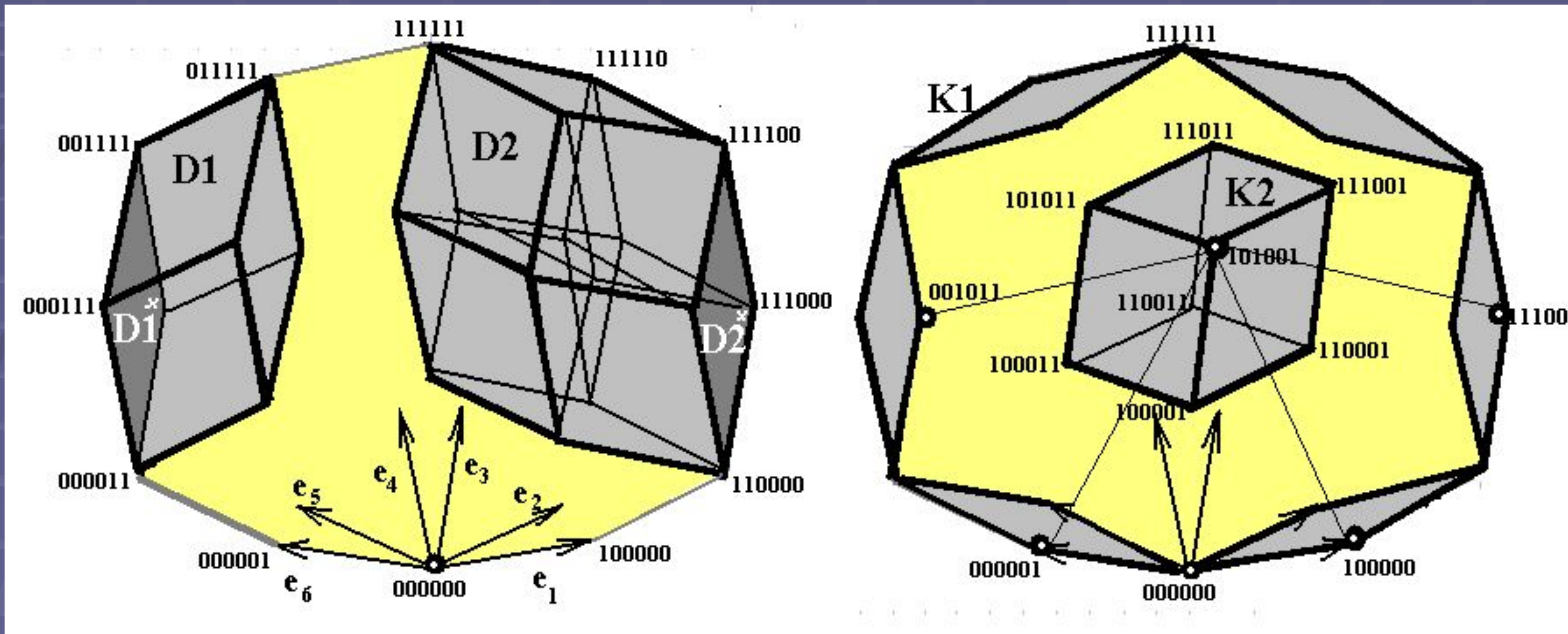
- D1=112202; D2=121122; D3=122211;
- D4=120122; D5=002212;

- 112202 111102 1112Ø1 110102 ØØ22Ø
- 121122 121111 12Ø122 Ø01112
- 122211 120111 Ø02211
- 120122 Ø00112
- 002212

- D1,D2,D3,D4-образуют цикл (общие ребра, D5 отстоит на Lmin=1 от D2,D3,D4 и на Lmin=3 от D1;
- Обобщение матрицы смежностей для графов.



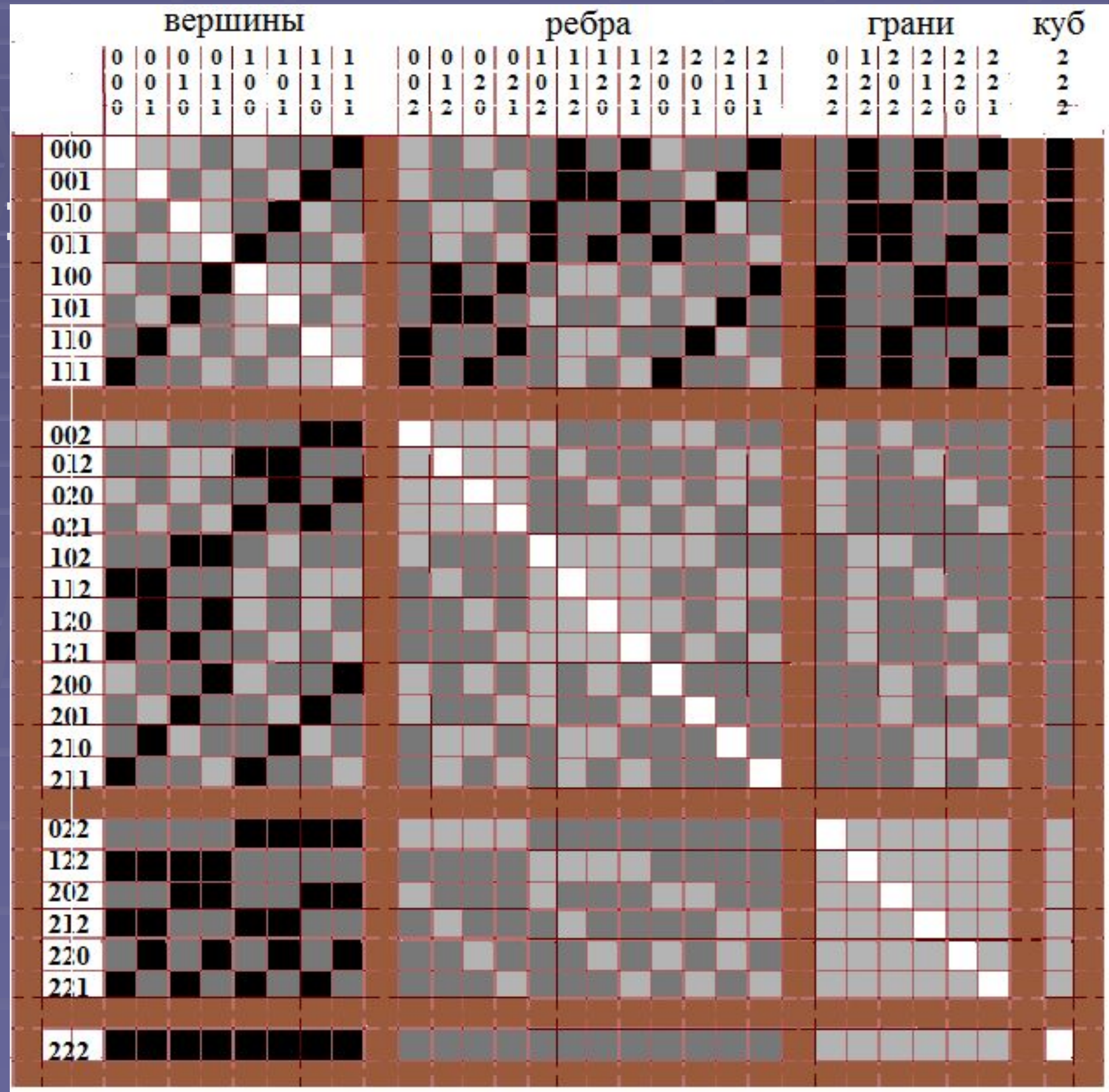
Хаусдорфова метрика на кубантах (обобщение метрики Хэмминга)



- p_H(D1,D2)=max{max minL(D1□D2),max minL(D2□D1)};
- Хаусдорфово сжатие D1/D2=D1* и D2/D1=D2*;Самое большое L из самых коротких путей.Сжатие-поразрядная операция.
- 022211 112222
- 112200 002211
- Ø122ØØ ØØ2211 □ max{ 3,2}=3 □ pH=3;

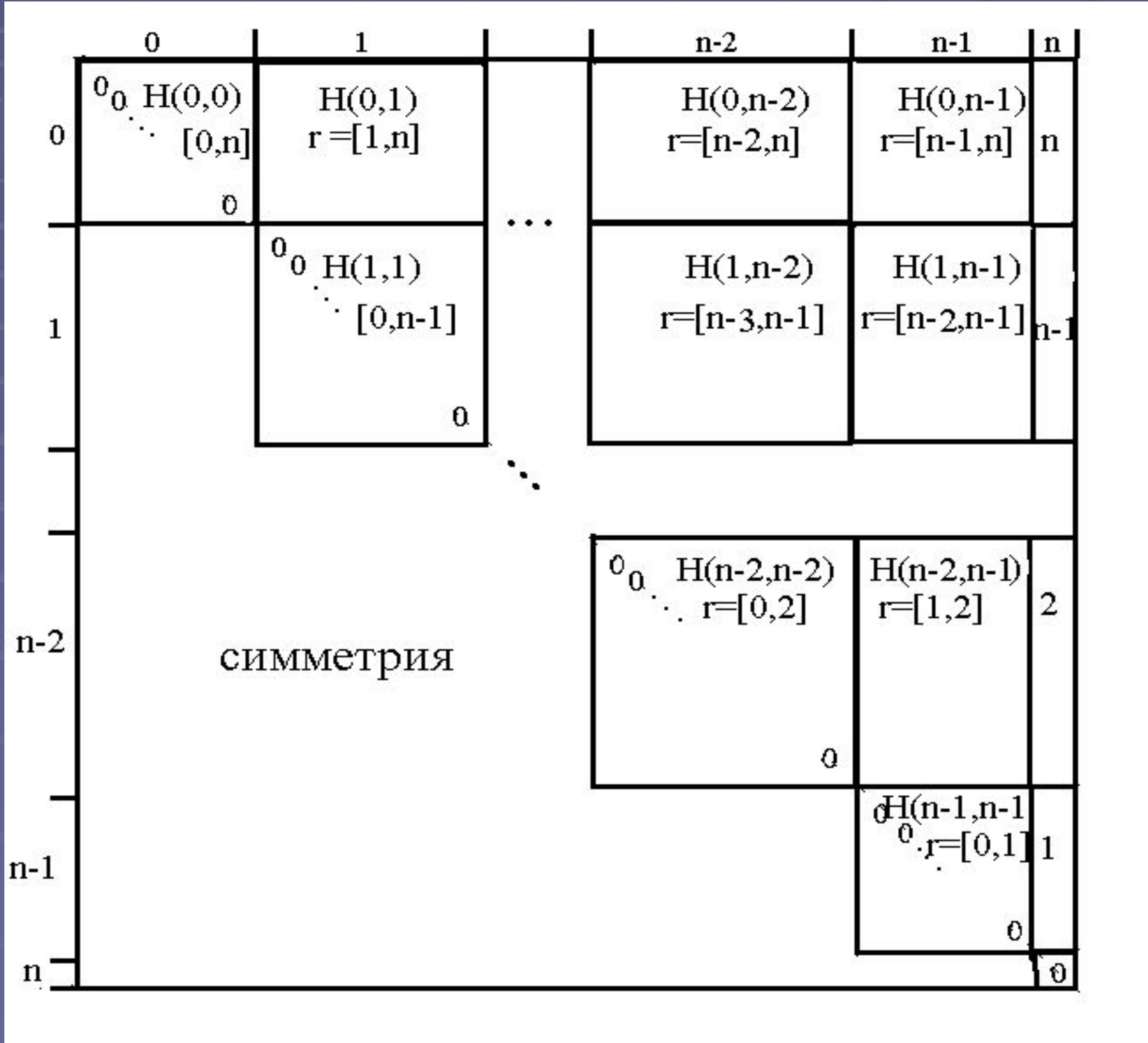
Полная матрица H-метрики для кубантов I^3.

- Обозначения:
- Черный-3
- Тем.сер.-2
- Свет.сер.-1
- Белый-0



Структура матрицы Н-метрики для кубантов I^n.

- Матрица $3^n x 3^n$
- Миноры H(k,m) k x m, где k,m-размерности граней.
- r = [s,t]-диапазон значений r_H в миноре.

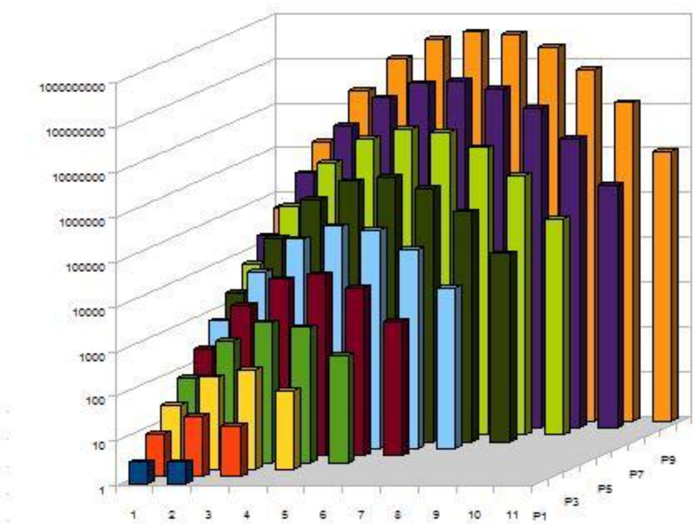


Распределения значений Н-метрики по размерностям граней при n□∞.

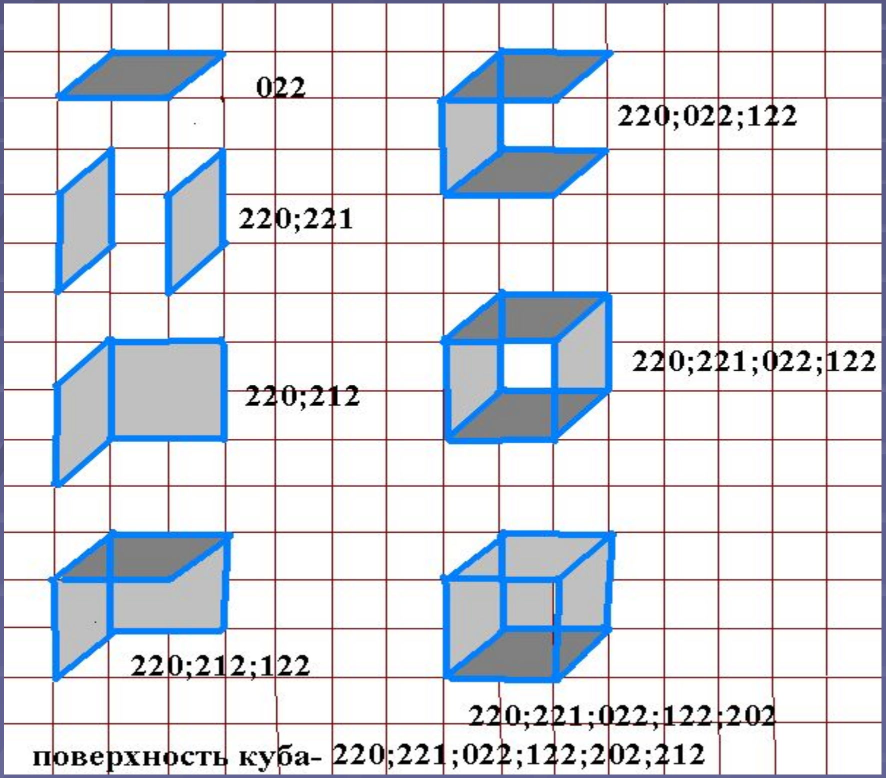
- Ассиметрия распределений.
- $r=0$ □ 3^n;
- $r=n$ □ 4^n-2^{n-1};

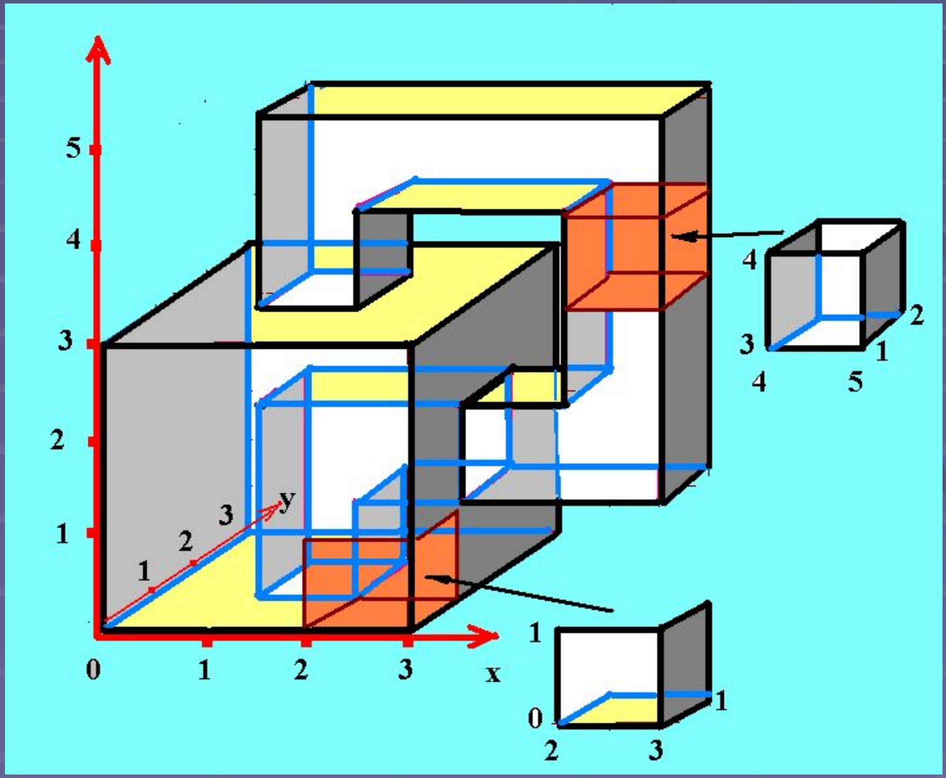
$r_{HH}(n)$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3	3									
2	9	22	14								
3	27	117	174	60							
4	81	540	1380	1072	248						
5	243	2295	8820	11480	5800	1008					
6	729	9234	49410	94960	78600	29088	4064				
7	2187	35721	252882	667380	802200	476784	139104	16320			
8	6561	134136	1211112	4183200	6818000	5794432	2669184	644608	65408		
9	19683	492075	5511240	24068016	50836464	57881376	37591680	14135040	2922624	261888	
10	59049	1771470	24078870	129509280	343148400	501544512	431417280	225876480	71925120	13043200	1048064



Панельное топологическое строительство. Бутылка Клейна в 75 байт.





- Всех комплексов из гиперграней 64-для хранения номера комплекса -один байт памяти.

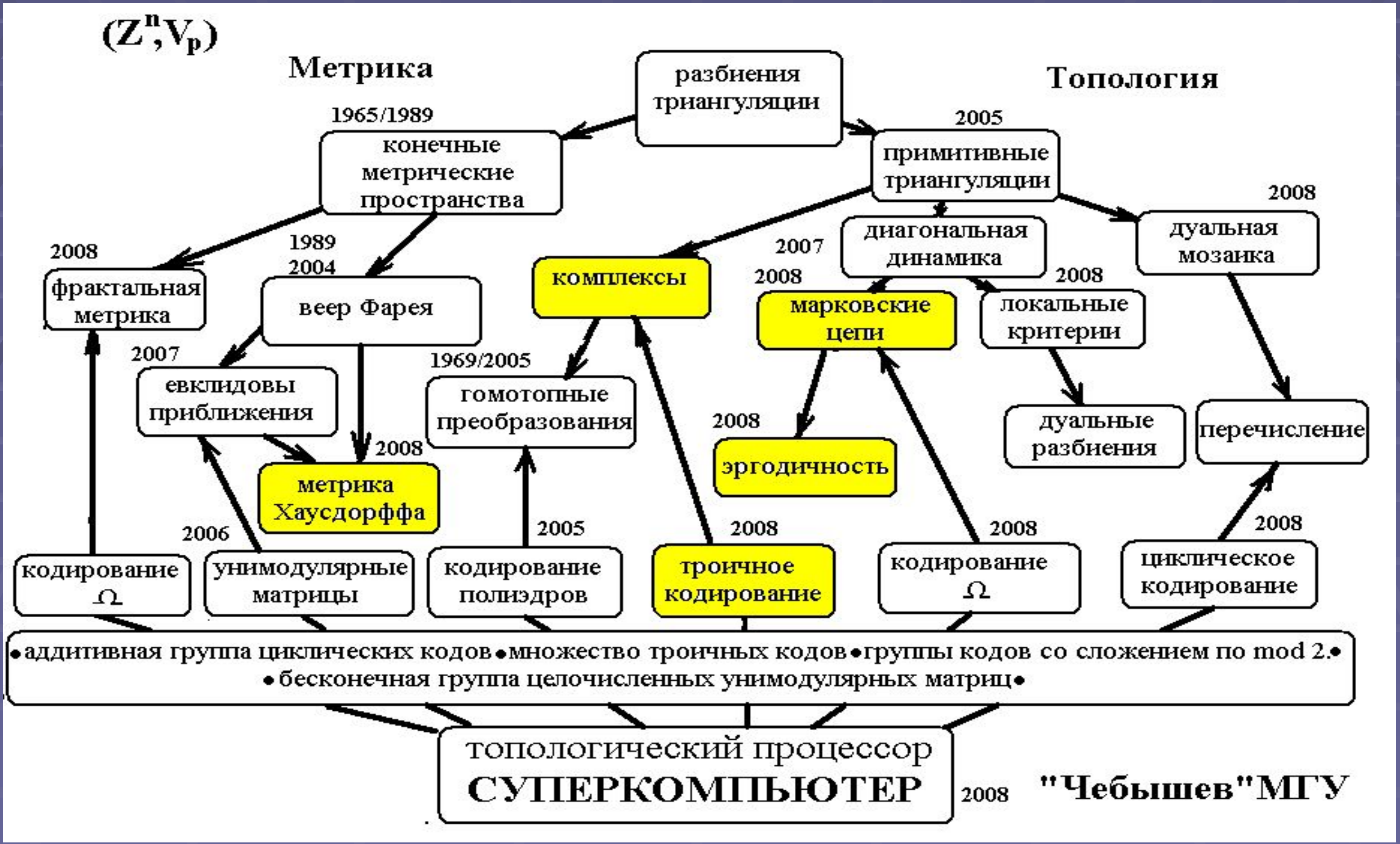
Полиморфизм кубантов (четверичного кодирования).

- Слово
- Число
- Множество точек $\mathbf{R}^n$.
- Геометрическая фигура
- Часть топологического комплекса.
- Элемент алгебраической структуры (моноид).
- Результат **одной операции** содержит информацию о связности, мин пути, размерности пересечения, положении внутри n-куба.
- Кубанты-гиперметрическое пространство.

Кубанты и супервычисления.

- Поразрядные операции над четверичными словами практически неограниченной длины, равной размерности исследуемого пространства.
- **Перевод вычисления метрики Хаусдорфа для кубантов из задач сложности 2^n в задачи сложности n^2.**
- Хранение в табличном виде (заранее рассчитанных) n-мерных комплексов гиперграней (нумеративный подход).
- Исследования асимптотического поведения гиперрешеток (10d-11d) в интересах теоретической физики.
- Одна из проблем-значительное расширение оперативной памяти суперкомпьютера.Для 10d рабочее поле со стороной 100 требует память объемом 10^8 терабайт.

Инструментальная система «Топологический процессор».



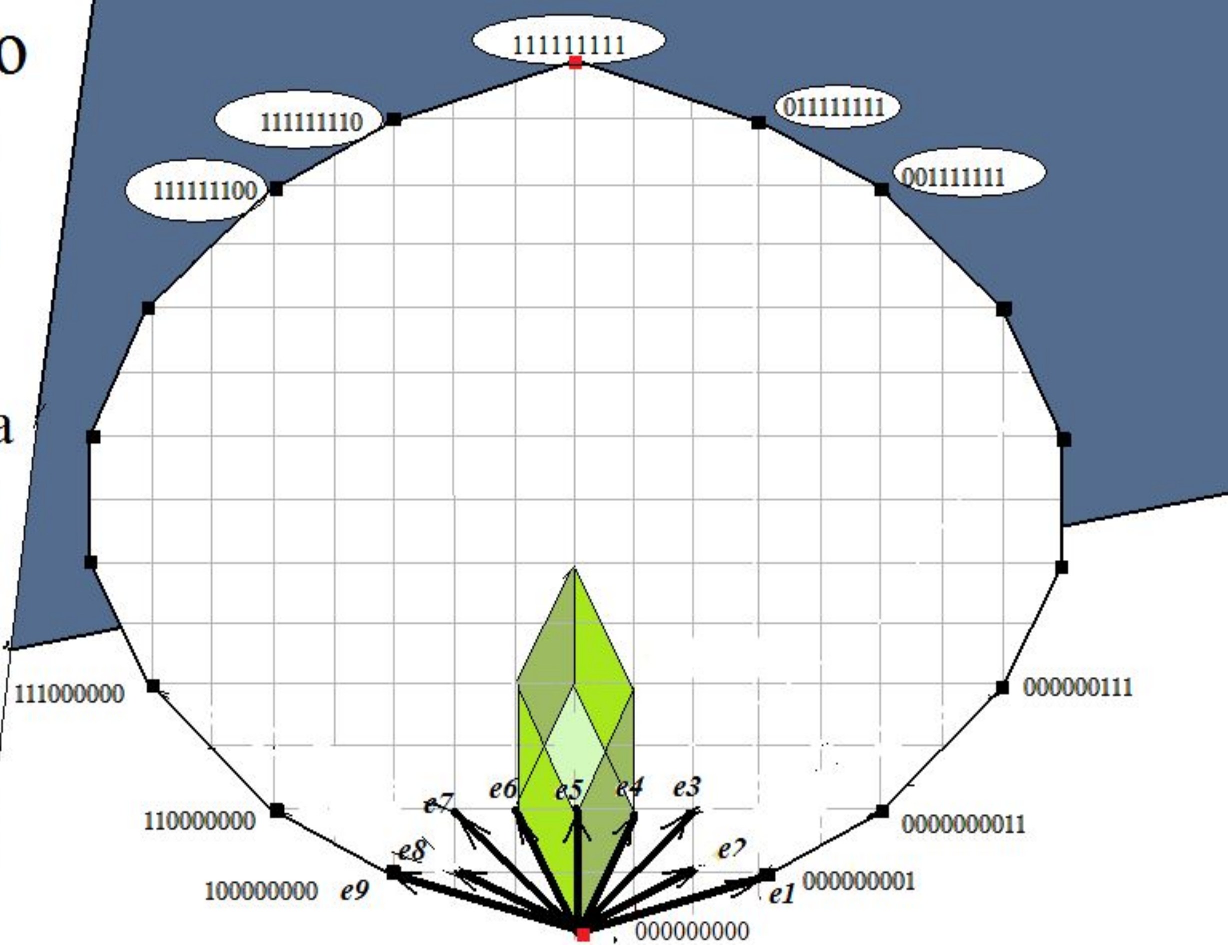
Вместо выводов.

- Связка алгебраических геометрии и топологии, комбинаторики, дифференциальных уравнений со структурой будущих суперкомпьютеров– одно из **прорывных комплексных направлений** не только в математике, но и в целом в науке.
- Отечественная математическая школа в этой области - одна из передовых в мире.
- Успех в этой области обеспечения суперкомпьютеров – шаг к занятию достойного места в международной научной кооперации.

Приложение.Многомерные построения k-путей.

Построить в $\mathbb{I}^9$ максимальное число непересекающихся 3-путей из (00...0) в (11...1).

Три кубических коридора с квадратными воротами (двумерными гранями) между соседними отсеками (трехмерными гранями-кубами).



Многомерные построения k-путей

	A	B	C
1	222000000•	000222000•	000000222•
2	221000002	002221000	000002221
3	211000022	022211000	000022211
4	111000222	222111000	000222111
5	111002221	221111002	002221111
6	111022211	211111022	022211111
7	111222111	111111222	222111111

Исходные данные:

I^9

dim Cb=3;

T(Cb)=9xLx3;->A,B,C; **?**

L=9-3+1=7;

Π(A1,B1,C1)=000000000

Π(A7,B7,C7)=111111111;

Π(Ai,Bi)=∅; i=2-6;

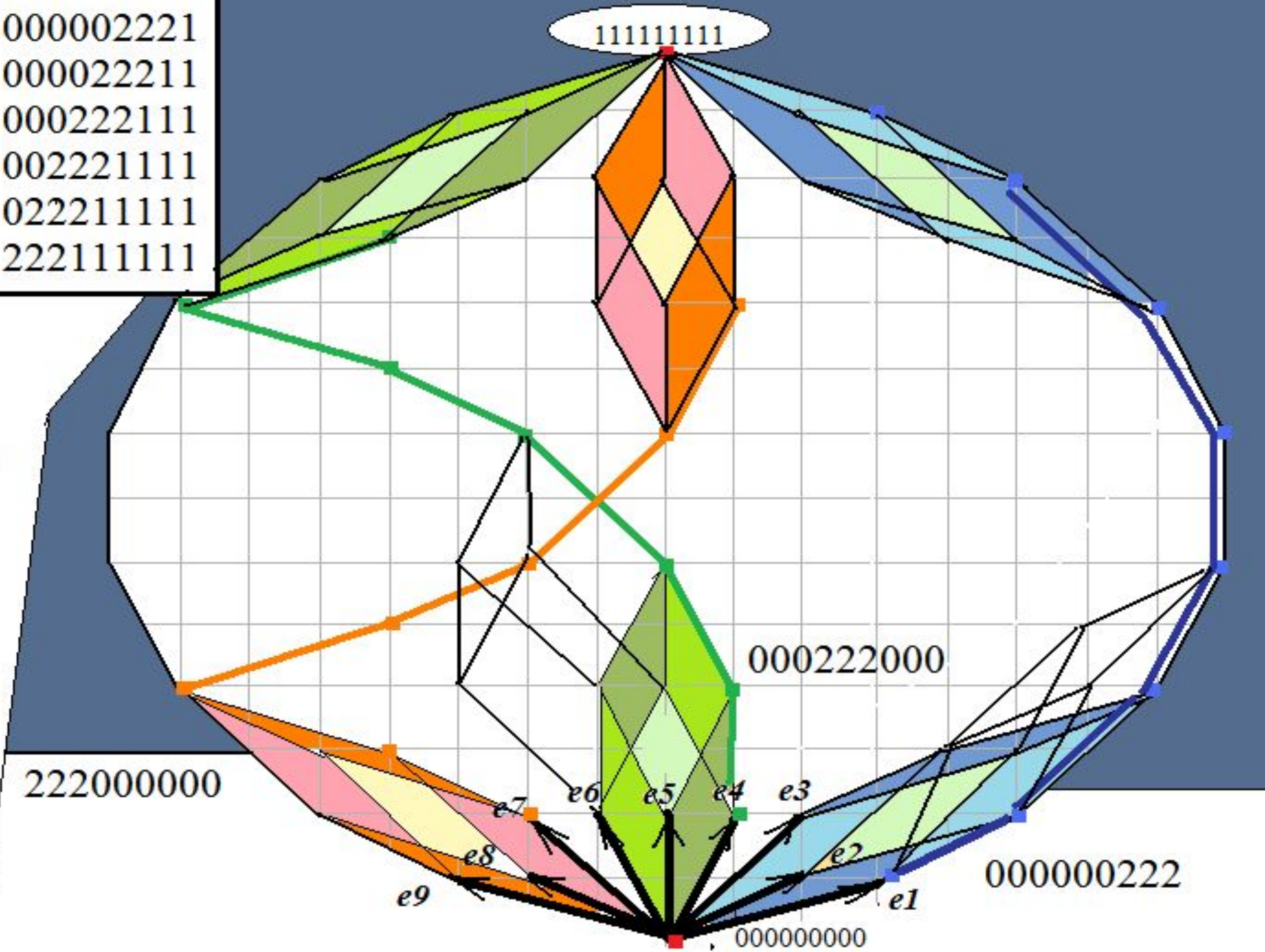
Π(Ai,Ci)=∅; i=2-6;

Π(Bi,Ci)=∅; i=2-6;

dimΠ(Ai,Ai+1)=2;i=1-6;

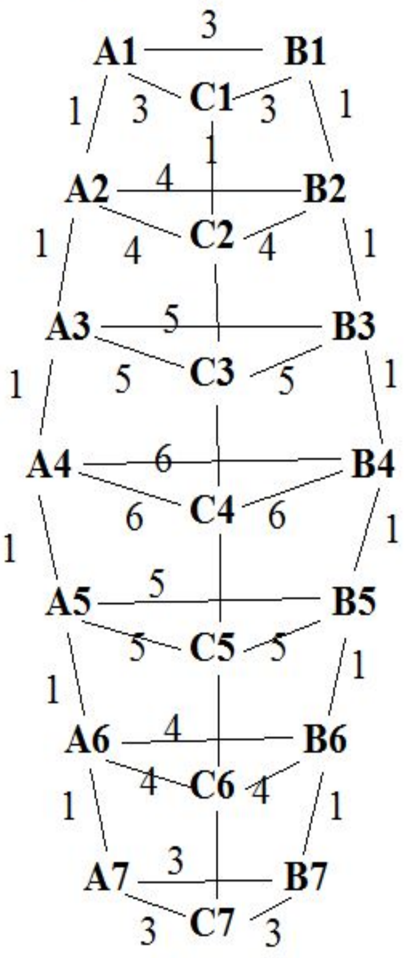
dimΠ(Bi,Bi+1)=2;i=1-6;

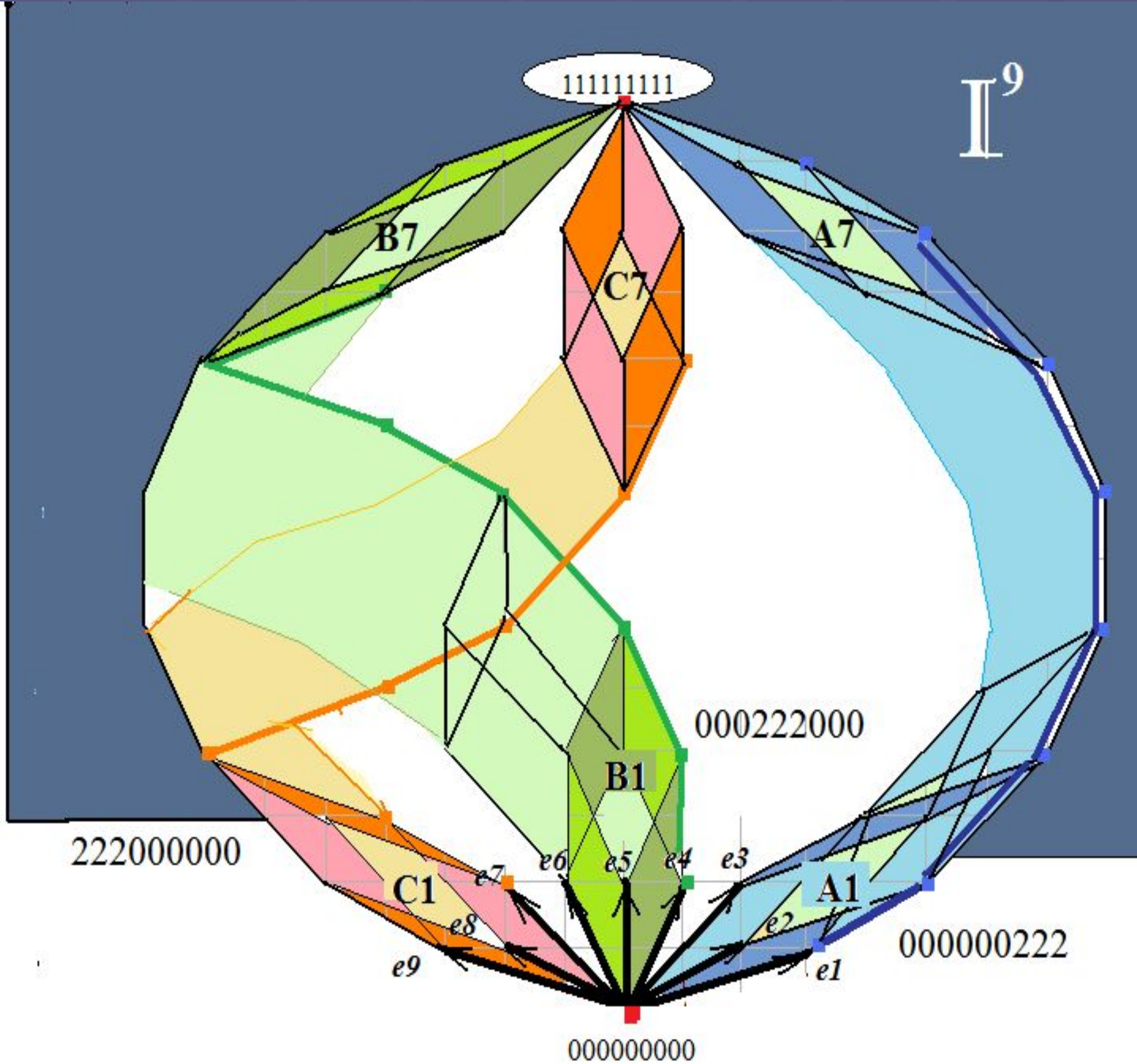
dimΠ(Ci,Ci+1)=2;i=1-6;



Н-метрика в k-путях.

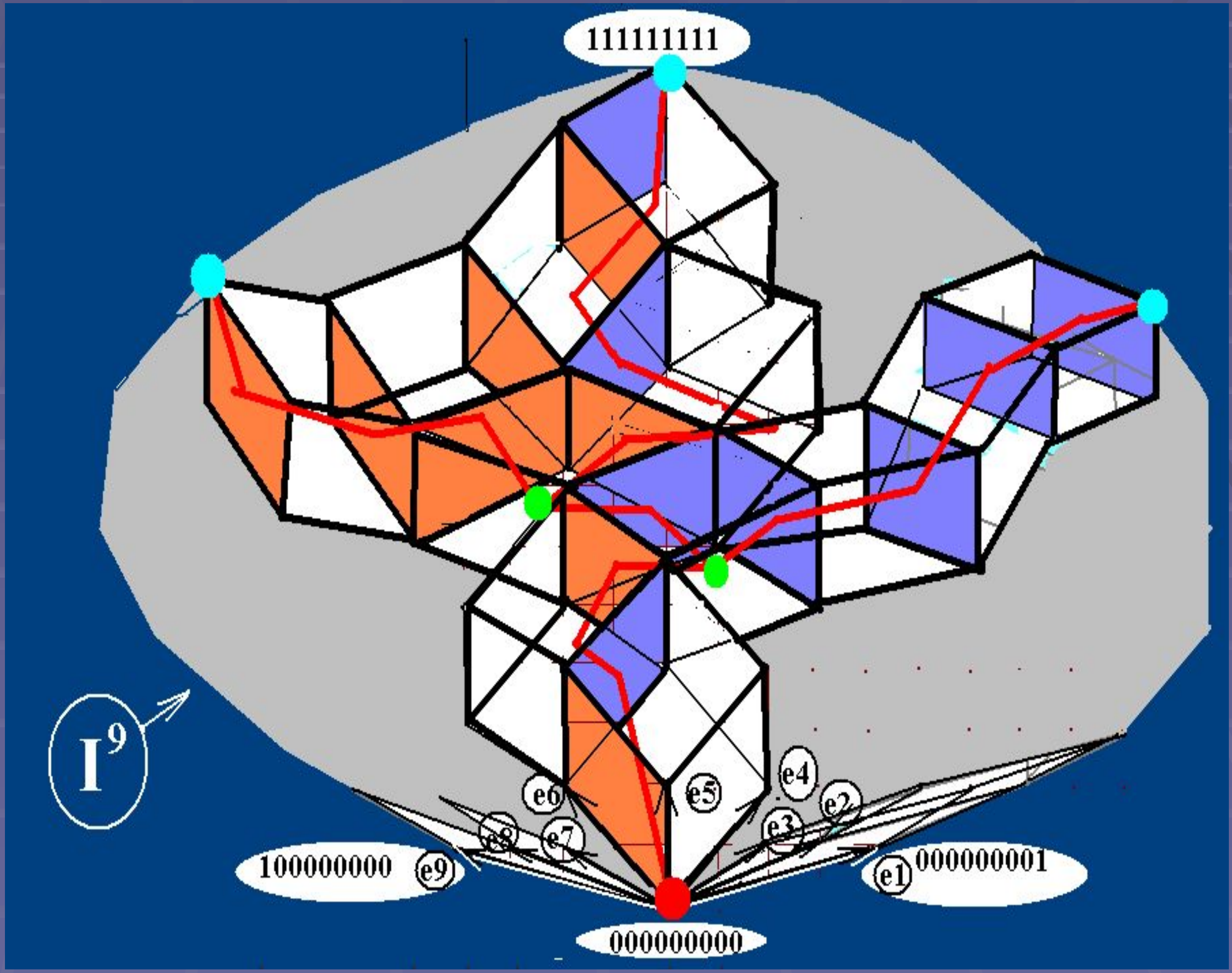
Хаусдорфова метрика 3-путей.





Многомерные построения.

- Процесс расслоения
- Процесс слияния
- Следы процесса на гранях пространства-полиэдра



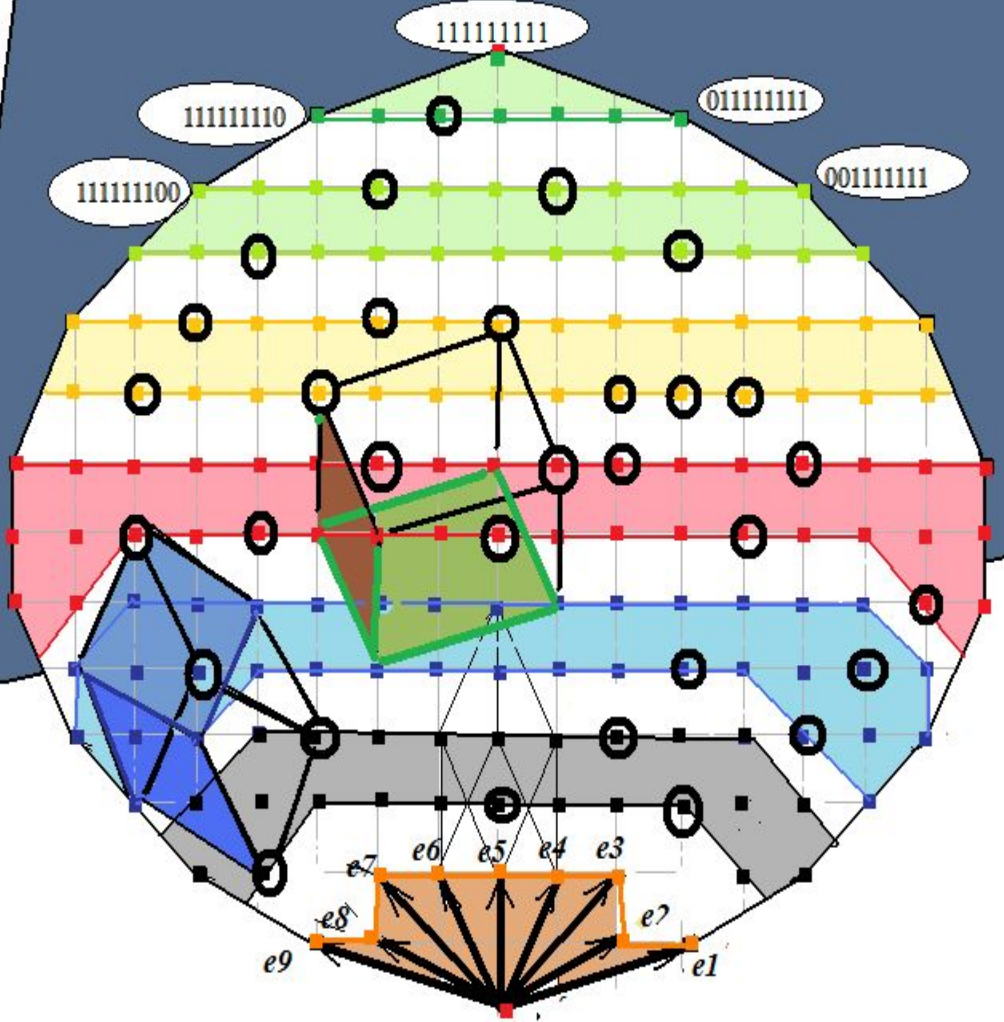
Случайная динамика в n-кубе.

Динамика-перестроение структуры из-за локальных дефектов.

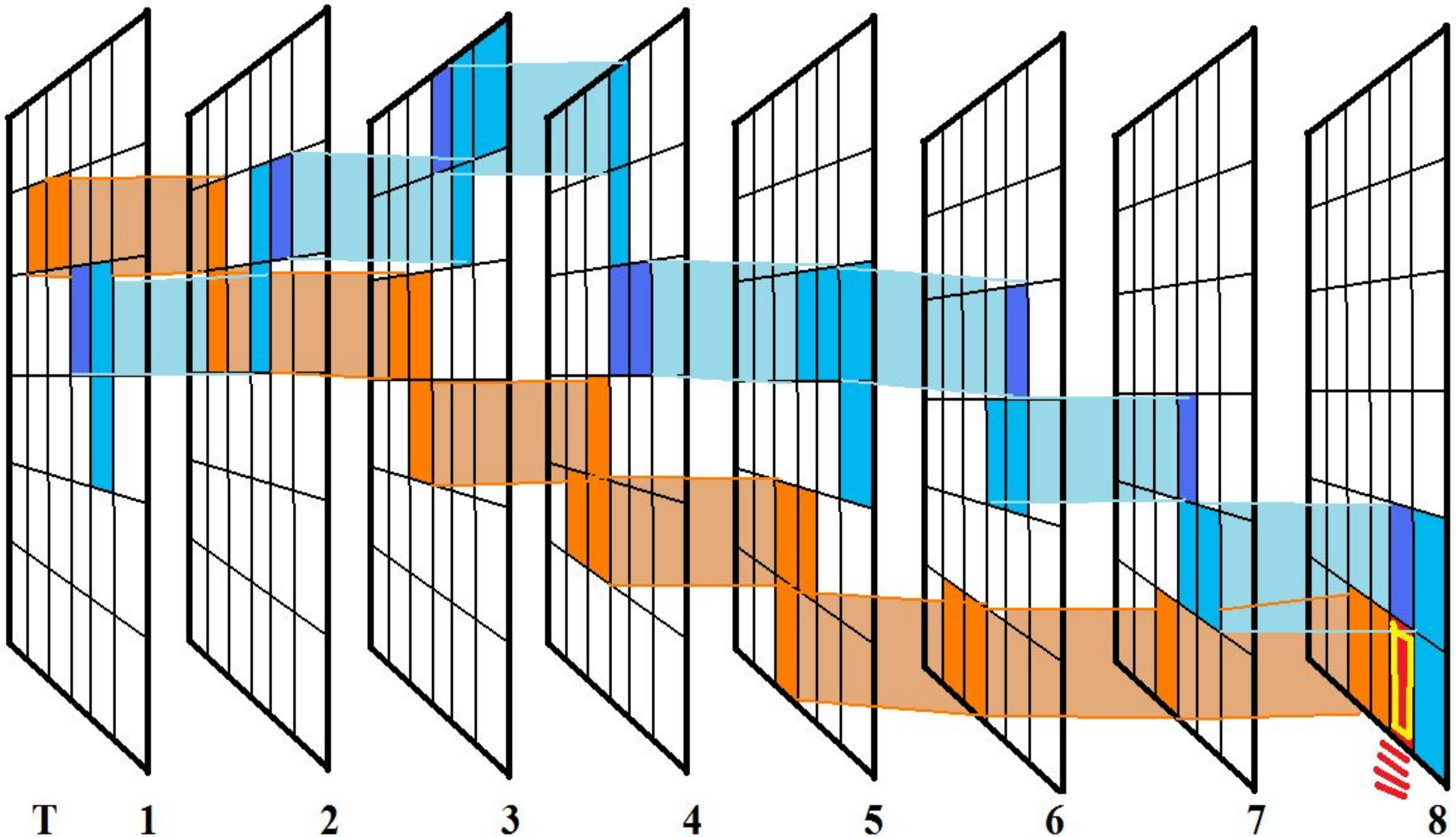
Выпадение вершины-обрыв k-граней, инцидентных ей.

Восстановление грани, когда выпуклая оболочка оставшегося "каркаса" равна грани.

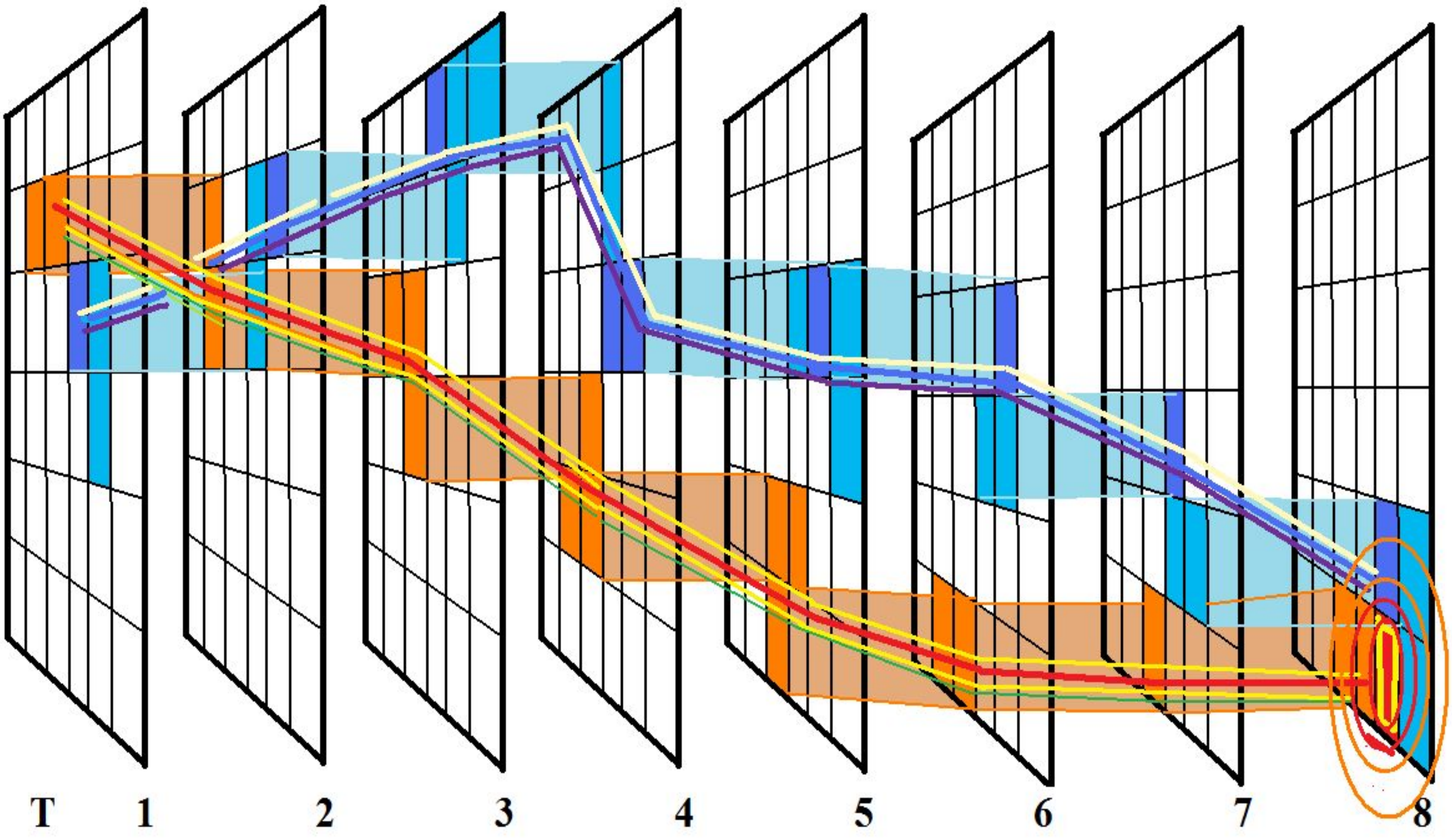
Случайный процесс в n-кубе в дискретном времени.



3-пути (траектории) события (встречи).



Вероятная история события.



Спасибо за приглашение и внимание!

- Интернет журнал «Вычислительные методы и программирование» т.10,2009,с 340-347