Элективный курс по алгебре по теме:

«СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ»

Пояснительная записка

Данный курс рассчитан на 17 часов (I полугодие).

Квадратные уравнения – это фундамент, на котором строится здание алгебры. Квадратные уравнения часто находят применение при решении тригонометрических, показательных, логарифмических, иррациональных уравнений и неравенств (10-11 классы). Все учащиеся умеют решать квадратные уравнения, начиная со школьной скамьи (8 класса).

В школьном курсе математики изучаются формулы корней квадратных уравнений, с помощью которых можно решать любые квадратные уравнения.

Однако имеются и другие способы решения квадратных уравнений, которые позволяют очень быстро и рационально решать любые уравнения. На занятиях курса рассматриваются десять способов решения квадратных уравнений.

В материалах курса доступное и мотивированное изложение теоретических сведений. Развитие содержания идёт по спирали, позволяющей неоднократно возвращаться на новом уровне ко всем вопросам.

Программа курса по выбору приобщает учеников к постоянно меняющемуся, развивающемуся знанию, к новой информации; помогает удовлетворять познавательную потребность учащихся; выстраивает такую учебную траекторию, двигаясь по которой ученики достигают максимально возможного уровня развития интеллекта, а также предусматривает изучение проблемы, которая интегрирует знания со структурами мышления: развитие продуктивного мышления и навыком его практического применения.

№ урока	Содержание учебного материала
1	Разложение левой части уравнения на множители
2	Метод выделения полного квадрата
3	Решение квадратных уравнений по формулам
4	Решение уравнений с использованием теоремы Виета (прямой и обратной)
5	Решение уравнений способом «переброски»
6	Свойства коэффициентов квадратного уравнения
7	Свойства коэффициентов квадратного уравнения
8	Графическое решение квадратного уравнения
9	Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки
10	Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки
11	Решение квадратных уравнений с помощью номограммы
12	Решение квадратных уравнений с помощью номограммы
13	Геометрический способ решения квадратных уравнений
14	Геометрический способ решения квадратных уравнений
15	Итоговый контроль знаний «Выбери рациональный способ»
16	Итоговый контроль знаний «Выбери рациональный способ»
17	Итоговый контроль знаний «Выбери рациональный способ»

9 способов решения квадратных уравнений:

1. СПОСОБ: *Разложение левой части уравнения на множители.* Решим уравнение $x^2 + 10x - 24 = 0$. Разложим левую часть на множители: $x^2 + 10x - 24 = x^2 + 12x - 2x - 24 = x(x + 12) - 2(x + 12) = (x + 12)(x - 2)$. Следовательно, уравнение можно переписать так: $(x + 12)(x - 2) = 0$ Так как произведение равно нулю, то, по крайней мере, один из его множителей равен нулю. Поэтому левая часть уравнения обращается нуль при $x = 2$, а также при $x = - 12$. Это означает, что число 2 и $- 12$ являются корнями уравнения $x^2 + 10x - 24 = 0$.	***2. СПОСОБ***: *Метод выделения полного квадрата.* Решим уравнение $x^2 + 6x - 7 = 0$. Выделим в левой части полный квадрат. Для этого запишем выражение $x^2 + 6x$ в следующем виде: $x^2 + 6x = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3$. В полученном выражении первое слагаемое - квадрат числа x, а второе - удвоенное произведение x на 3. По этому чтобы получить полный квадрат, нужно прибавить 3^2, так как $x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = (x + 3)^2$. Преобразуем теперь левую часть уравнения $x^2 + 6x - 7 = 0$, прибавляя к ней и вычитая 3^2. Имеем: $x^2 + 6x - 7 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 - 7 = (x + 3)^2 - 9 - 7 = (x + 3)^2 - 16$. Таким образом, данное уравнение можно записать так: $(x + 3)^2 - 16 = 0$, $(x + 3)^2 = 16$. Следовательно, $x + 3 - 4 = 0$, $x_1 = 1$, или $x + 3 = -4$, $x_2 = -7$.

3. СПОСОБ: *Решение квадратных уравнений по формуле.*

Умножим обе части уравнения

$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$

на 4а и последовательно имеем:

$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0,$

$((2ax)^2 + 2ax \cdot b + b^2) - b^2 + 4ac = 0,$

$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac,$

$2ax + b = \pm v\ b^2 - 4ac,$

$2ax = - b \pm v\ b^2 - 4ac,$

4. СПОСОБ: *Решение уравнений с использованием теоремы Виета.*

Как известно, приведенное квадратное уравнение имеет вид $x^2 + px + c = 0$. (1)

Его корни удовлетворяют теореме Виета, которая при $a = 1$ имеет вид

$x_1 x_2 = q,$

$x_1 + x_2 = - p$

Отсюда можно сделать следующие выводы (по коэффициентам p и q можно предсказать знаки корней).

а) Если сводный член q приведенного уравнения (1) положителен ($q > 0$), то уравнение имеет два одинаковых по знаку корня и это зависти от второго коэффициента p. Если $p < 0$, то оба корня отрицательны, если $p < 0$, то оба корня положительны.

5. СПОСОБ: *Решение уравнений способом «переброски».*

Рассмотрим квадратное уравнение

$ax^2 + bx + c = 0,$ где $a \neq 0.$

Умножая обе его части на а, получаем уравнение

$a^2x^2 + abx + ac = 0.$

Пусть $ax = y$, откуда $x = y/a$; тогда приходим к уравнению

$y^2 + by + ac = 0,$

равносильно данному. Его корни y_1 и y_2 найдем с помощью теоремы Виета.

Окончательно получаем

$x_1 = y_1/a$ и $x_1 = y_2/a$.

6. СПОСОБ: *Свойства коэффициентов квадратного уравнения.*

А. Пусть дано квадратное уравнение

$ax^2 + bx + c = 0,$ где $a \neq 0.$

1) Если, $a + b + c = 0$ (т.е. сумма коэффициентов равна нулю), то $x_1 = 1,$

$x_2 = c/a.$

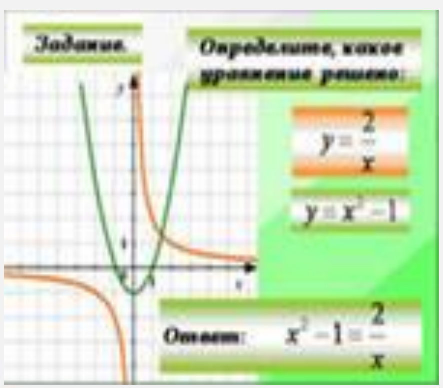
Б. Если второй коэффициент $b = 2k$ – четное число

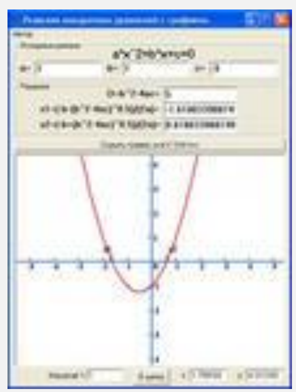
В. Приведенное уравнение

$x^2 + px + q = 0$

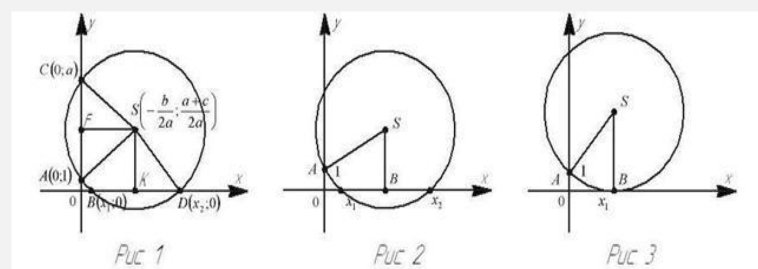
совпадает с уравнением общего вида, в котором $a = 1$, $b = p$ и $c = q$.

7. СПОСОБ: *Графическое решение квадратного уравнения.*
Если в уравнении
$x^2 + px + q = 0$
перенести второй и третий члены в правую часть, то получим
$x^2 = - px - q$.
Построим графики зависимости $y = x^2$ и $y = - px - q$.
График первой зависимости - парабола, проходящая через начало координат. График второй зависимости - прямая (рис.1). Возможны следующие случаи:
- прямая и парабола могут пересекаться в двух точках, абсциссы точек пересечения являются корнями квад- ратного уравнения;
- прямая и парабола могут касаться (только одна общая точка), т.е. уравнение имеет одно решение;
- прямая и парабола не имеют общих точек, т.е. квадратное уравнение не имеет корней.





8. СПОСОБ: *Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки.*
Графический способ решения квадратных уравнений с помощью параболы неудобен. Если строить параболу по точкам, то требуется много времени, и при этом степень точности получаемых результатов невелика.
Предлагаю следующий способ нахождения корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ с помощью циркуля и линейки (рис. 5).
Допустим, что искомая окружность пересекает ось абсцисс в точках $B(x_1; 0)$ и $D(x_2; 0)$, где x_1 и x_2 - корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, и проходит через точки $A(0; 1)$ и $C(0; c/a)$ на оси ординат. Тогда по теореме о секущих имеем $OB \cdot OD = OA \cdot OC$, откуда $OC = OB \cdot OD / OA = x_1 x_2 / 1 = c/a$.
Центр окружности находится в точке пересечения перпендикуляров *SF* и *SK*, восстановленных в серединах хорд *AC* и *BD*, поэтому



10. СПОСОБ: *Геометрический способ решения квадратных уравнений.*

В древности, когда геометрия была более развита, чем алгебра, квадратные уравнения решали не алгебраически, а геометрически. Приведу ставший знаменитым пример из «Алгебры» ал - Хорезми.

Примеры.

1) Решим уравнение $x^2 + 10x = 39$.

В оригинале эта задача формулируется следующим образом : «Квадрат и десять корней равны 39».

Решение. Рассмотрим квадрат со стороной x, на его сторонах строятся прямоугольники так, что другая сторона каждого из них равна 2,5, следовательно, площадь каждого равна 2,5x. Полученную фигуру дополняют затем до нового квадрата ABCD, достраивая в углах четыре равных квадрата , сторона каждого их них 2,5, а площадь 6,25.

D X C

6	2	6
2	x^2	2
6	2	6

A X B

Квадратные уравнения находят широкое применение при решении тригонометрических, показательных, логарифмических, иррациональных и трансцендентных уравнений и неравенств. Однако, значение квадратных уравнений заключается не только в изяществе и краткости решения задач, хотя и это весьма существенно. Не менее важно и то, что в результате применения квадратных уравнений при решении задач не редко обнаруживаются новые детали, удается сделать интересные обобщения и внести уточнения, которые подсказываются анализом полученных формул и соотношений.