

# Лекция

## Машина Тьюринга



# Типы алгоритмов. История создания

- Интенсивный поиск универсального уточнения алгоритма предложил примерно 20 формальных конструкций алгоритмов, которые условно можно разбить на три типа
- **Алгоритмические машины (АМ).**
- **Функции вычислимые алгоритмом.**
- **Исчисления.**

# Алгоритмические машины (АМ)

- имеют единственный процессор, выполняющий небольшой набор очень примитивных действий,
- простую структуру данных (структуру памяти) в виде бесконечной ленты,
- простую логику (правила) управления процессором.

# Основные АМ

- **Машина Тьюринга (МТ)** предложена Тьюрингом в 1937 г.
- **Машина Поста (МР)** предложена Постом в 1937 г.
- **Нормальный алгоритм Маркова (НАМ)** предложен Марковым в 1953 г.

# Функции вычислимые алгоритмом

- алгоритм не определяется формально, а существует как бы в виде «всем понятной механической процедуры».
- Любая функция, вычисляемая на интуитивном (содержательном) уровне, должна быть сконструирована из базовых

- **Рекурсивные функции** на множестве натуральных чисел были предложены Клини в 1938 г.
- Конструктивные механизмы рекурсивных функций очень просты, их применение в процессе построения «функции от функции» позволяет явно выстраивать структуру функции в отличие от АМ, где функция определяется процедурно, через последовательность действий.

# Исчисления.

- **Исчисление функций**, вычисляемых на множестве натуральных чисел предложено Эрбраном и Гёделем в 1938 г.
- **$\lambda$ -исчисление А.Чёрча** также может быть отнесено к этому типу алгоритмов, предложено в 1937 г.
- **Формальные грамматики**, порождающие языки, предложены Хомским в 1953 – 1956 г.

# Структура алгоритма (составляющие алгоритма)

- **Процессорная структура.** (Исполнитель алгоритма).

Во всех теоретических конструкциях алгоритмов и большинстве алгоритмических языках это единственный процессор.

- **Структуры данных.** Структура данных это способ организация записи, хранения и извлечение данных.
- **Данные** – это элементы множеств, которые нужно породить или распознавать..



- **Информационная структура алгоритма (ИСА).** Структура функций есть описание конструирования функции от функций из базовых.
- **Логическая структура алгоритма (ЛСА) или программы (ЛСП).** ЛСА суть описание организации вычислительного процесса, который управляется состоянием памяти.

# Интерпретация МТ.

- **Процессор** – в МТ называется управляющей головкой (УГ).
- **Структура данных** (память процессора) бесконечная лента, разбитая на ячейки, в ячейку может быть записан только один СИМВОЛ
- **Процесс вычислений** происходит по тактам
- **Процесс остановки** (остановка) МТ.
- ✓ **Замечание** Список правил для МТ не упорядочен

математической логике, вычислительной математике.  
В 1936-37 годах ввел математическое понятие абстрактного эквивалента алгоритма, или вычислимой функции, получившее затем название «машины Тьюринга».

В возрасте 24 лет Тьюринг написал работу "О вычислимых числах", которой суждено было сыграть исключительно важную



роль в развитии вычислительной математики и информатики

### **ТЮРИНГ Алан Матисон (Turing Alan Mathison)**

(1912—1954), английский математик. Основные труды по математической логике, вычислительной математике. В 1936-37 годах ввел математическое понятие абстрактного эквивалента алгоритма, или вычислимой функции, получившее затем название «машины Тьюринга».

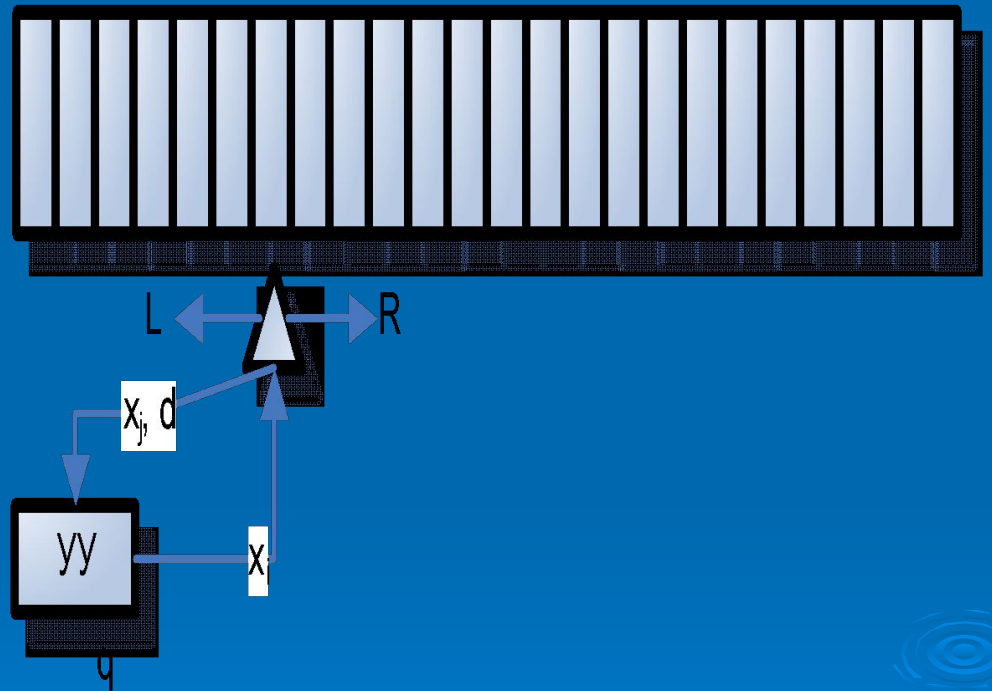
В возрасте 24 лет Тьюринг написал работу "О вычислимых числах", которой суждено было сыграть исключительно важную роль в развитии вычислительной математики и информатики

# MT

- Тьюринг назвал свое абстрактное механическое устройство "**универсальной машиной**", поскольку она должна была справляться с любой допустимой, то есть теоретически разрешимой задачей — математической или логической.
- Данные должны были вводиться в машину на бумажной ленте, поделенной на клетки — ячейки.
- Каждая такая ячейка либо содержала символ, либо была пустой.
- Машина могла не только обрабатывать записанные на ленте символы, но и изменять их, стирая старые и записывая новые в соответствии с инструкциями, хранимыми в ее внутренней памяти.

# Абстрактная модель машины Тьюринга

□  $MT = \langle Q, D, P, q_0, q_{кон} \rangle$



# MT = $\langle Q, D, P, q_0, q_{\text{кон}} \rangle$

где  $\Gamma$  – головка,

УУ – управляющее устройство,

$q \in Q$  – состояние,

L – влево на 1 ячейку, R – вправо на 1 ячейку, S – стоять на месте,

$d \in D$  – команда,  $D = \{L, R, S\}$  – множество команд на перемещение головки,

$Q = \{q_0, q_1, \dots, q_{\text{кон}}\}$  – конечное множество состояний машины Тьюринга,

$\bar{X} = X \cup \{\varepsilon\}$ ,  $X$  – конечное множество входных символов, которые записываются в ячейки ленты,

$P = \{p_i\}$ ,  $p_i: (q, x_i \cup \varepsilon) \rightarrow (q', x_j \cup \varepsilon, d)$

$q_0 \in Q$  – символ начального состояния машины Тьюринга,

$q_{\text{кон}} \in Q$  – символ конечного состояния машины Тьюринга.

**Вход** машины Тьюринга — то, что записано на ленте. За входом следует бесконечное число пробелов.

**Выход** машины Тьюринга — то, что записано на ленте после того, как машина пришла в конечное состояние.

Если машина Тьюринга проверяет принадлежность языку, то удобно иметь два конечных состояния:  $q_{yes}$  и  $q_{no}$ .

Машина Тьюринга может:

- закончить работу;
- работать бесконечно.

## Время

- Временем работы машины Тьюринга на входе  $x$  называем количество шагов, которое машина делает, чтобы прийти в конечное состояние.
- Временной сложностью машины Тьюринга называем максимум по всем входам длины  $n$  времени работы машины на этих входах.

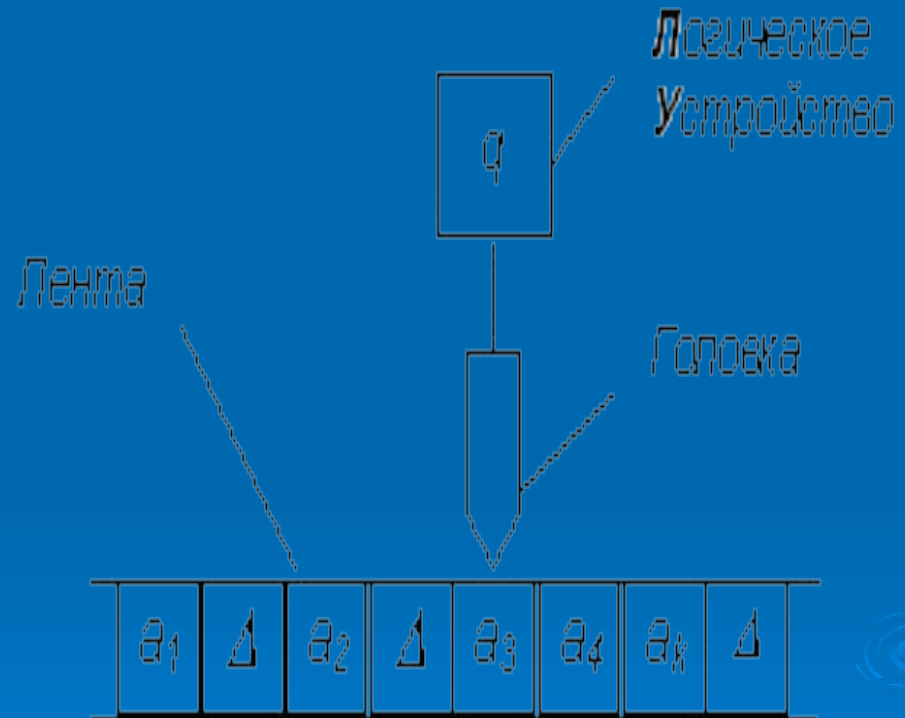
## Память

- Сложностью по памяти работы машины Тьюринга на входе  $x$  называем количество ячеек, в которых побывала головка машины.
- Емкостной сложностью машины Тьюринга называем максимум по всем входам длины  $n$  сложности по памяти работы машины на этих входах.



✓ Лента выступает в качестве внешней памяти; она считается неограниченной (бесконечной)

□ Машина Тьюринга состоит из трех частей: ленты, считывающе-записывающей головки и логического устройства



✓ Лента выступает в качестве внешней памяти; она считается неограниченной (бесконечной)

- **Головка неподвижна**, а лента передвигается относительно нее вправо или влево.
- Машина работает в **некотором произвольном конечном алфавите**  
 $A = \{, a_1 \dots a_n\}$  – этот алфавит называется **внешним**.
- В нем выделяется специальный символ – , называемый **пустым знаком** – его посылка в какую-либо ячейку стирает тот знак, который до этого там находился, и оставляет ячейку пустой.

- В каждую ячейку ленты может быть записан лишь один символ.
- Информация, хранящаяся на ленте, изображается *конечной* последовательностью знаков внешнего алфавита, отличных от пустого знака.
- Головка всегда расположена над одной из ячеек ленты.
- Работа происходит **тактами** (шагами).

- Система исполняемых головкой команд предельно проста:

на каждом такте она производит замену знака в обозреваемой ячейке  $a_i$  знаком  $a_j$

- При этом возможны сочетания:

- $j = i$  – это означает, что в обозреваемой ячейке знак не изменился;

- $i = 0, j = 0$  означает, что хранившийся в ячейке знак заменяется пустым, т.е. стирается;

- $i \neq 0, j \neq 0$  означает, что пустой знак заменяется непустым (с номером  $j$  в алфавите), т.е. производится вставка знака;

- $i \neq j$  соответствует замене одного знака другим.

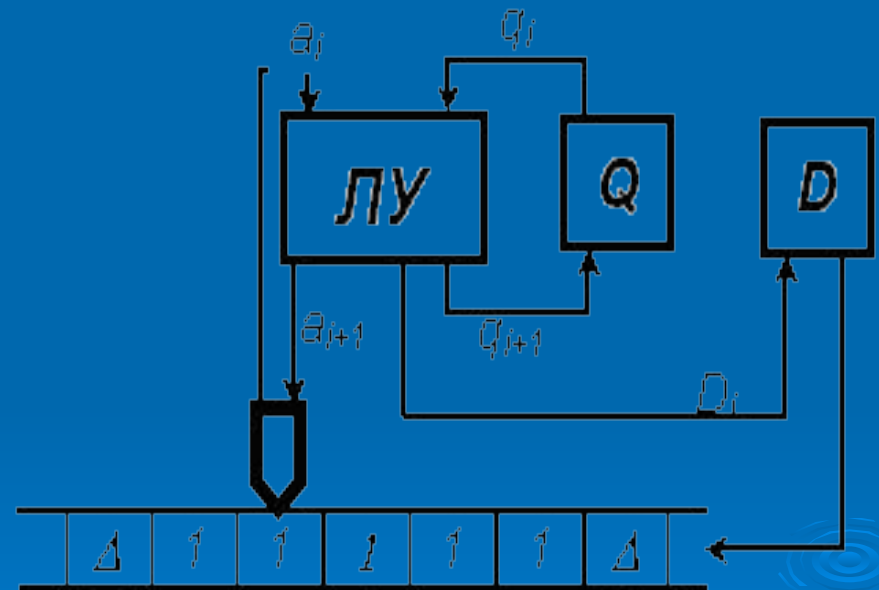
# Команды перемещений ленты

- на ячейку влево,
- на ячейку вправо
- остаться на месте, т.е. адрес обозреваемой ячейки в результате выполнения команды может либо измениться на 1, либо остаться неизменным.

✓ команда сдвига ленты влево обозначается ***R*** («*Right*»),  
✓ сдвига вправо – ***L*** («*Left*»),  
✓ отсутствие сдвига – ***S*** («*Stop*»).

# Элементарный шаг (такт) работы машины Тьюринга

- головка считывает символ из обозреваемой ячейки и, в зависимости от своего состояния и прочитанного символа, выполняет команду, в которой указано, какой символ записать (или стереть) и какое движение совершить. При этом и головка переходит в новое состояние



- **Определение Конфигурация машины-**  
*совокупность состояний всех ячеек ленты,  
состояния ЛУ и положение головки*
- В зависимости от начальной конфигурации  
возможны два варианта :
- после конечного числа тактов **машина**  
**останавливается** по команде остановки; при этом  
на ленте оказывается конечная конфигурация,  
соответствующая выходной информации;
- **остановки не происходит.**
- В первом случае говорят, что **данная машина**  
**применима к начальной информации**, во втором –  
нет.

# Пример

- Пусть начальной является конфигурация  $1q11111$ .
- Такт 1 Обозревается  $1$ , в ЛУ состояние  $q$ . Выходная команда  $q1R$ , что эквивалентно перемещению головки по отношению ленты на  $1$  шаг вправо. Следовательно, образуется промежуточная конфигурация  $11q111$ .
- Такт 2 – аналогичным образом осуществляется переход к конфигурации  $111q11$ .
- Такт 3 – переход к конфигурации  $1111q1$ .
- Такт 4 – переход к конфигурации  $11111q$ .
- Такт 5 Обозревается  $q$ , в ЛУ состояние  $q$ . Выходная команда  $z1S$  – вместо в ячейку записывается  $1$ , сдвига нет, работа прекращается. Конечная конфигурация  $111111z$ .
- Задача решена.



# Тезис Тьюринга

- ▣ *Всякий алгоритм может быть задан посредством тьюринговой функциональной схемы и реализован в соответствующей машине Тьюринга.*
- ▣ *Машина Тьюринга - это модель компьютера*

@ Алго2000 [машина Тьюринга] - Без имени

Файл Интерпретатор Вид Команды Пуск Скорость Помощь

File management icons (New, Open, Save, Print, Copy, Paste) and a status bar showing "нет" (none).

Условие задачи:

Numbered tape (1-27) with a highlighted cell at position 14. Navigation arrows are present on both ends.

Внешний алфавит:

A \ Q	Q0	Q1	Q2	Q3	Q4	Комментарий:
Пробел						

Шаг: min: max:

Выяснить, применима ли машина Тьюринга Т к слову Р.

Если применима, то выписать результат  $T(P)$  применения машины Тьюринга Т к слову Р.

$$T: \left\langle \begin{array}{l} q_1 \ 1 \ q_1 \ 0 \ R \\ q_1 \ 0 \ q_3 \ 0 \ L \\ q_2 \ 0 \ q_2 \ 1 \ L \\ q_3 \ 1 \ q_2 \ 1 \ R \\ q_3 \ 0 \ q_3 \ 1 \ E \end{array} \right.$$

$P=11111001$

Предполагается, что начальный момент Машина Тьюринга обзрывает самую левую единицу слова.

РЕШЕНИЕ. По определению команд машины Тьюринга (см. И.М.Сергиевская "Математическая логика и теория алгоритмов", гл. 9) получаем последовательность конфигураций

```
q1 11111001
q1 1111001
q1 111001
q1 11001
q1 1001
q1 1001
q1 001
q3 0001
q3 1001
1 q2 001
q2 1101
```

Так как команда, начинающаяся символами  $q_2 \ 1$ , в программе отсутствует, то последняя конфигурация является заключительной. Следовательно, машина Тьюринга применима к слову Р и

$T(P)=1101$

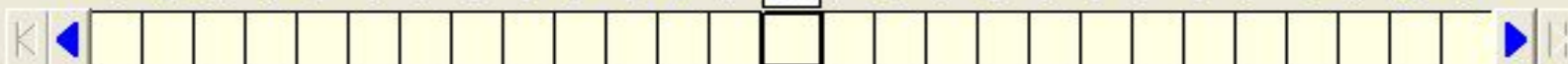
@ Алго2000 [машина Поста] - Без имени

Файл Интерпретатор Вид Команды Пуск Скорость Помощь



Условие задачи:

-13 -12 -11 -10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13



Номер	Команда	Отсылка	Комментарии
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

шаг: мин: макс:

## Алгоритмическая машина Поста

- Абстрактная машина Поста состоит
- из бесконечной ленты, разделенной на равные секции,
- считывающе-записывающей головки.
- Каждая секция может быть либо пуста (т.е. в нее ничего не записано), либо заполнена (*отмечена* – т.е. в нее записана *метка*).
- Состояние ленты и информация о положении головки характеризуют *состояние машины Поста*.

- За один такт (его называют *шагом*) головка может сдвинуться на одну секцию вправо или влево и поставить или удалить метку.
- Работа машины Поста заключается в переходе от одного состояния машины к другому в соответствии с заданной программой, которая строится из отдельных команд.

# Структура команды

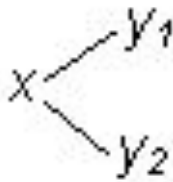
- Каждая команда имеет следующую структуру
- *xKu*,
- *x* – номер исполняемой команды;
- *K* – указание о выполняемом действии;
- *u* – номер следующей команды (*наследника*).

# Система команд машины

№ п/п	Команда	Запись команды	Описание действий машины
1	Шаг вправо	$X \rightarrow y$	Сдвиг головки на одну секцию вправо
2	Шаг влево	$X \leftarrow y$	Сдвиг головки на одну секцию влево
3	Установить метку	$XMy$	В обозреваемую секцию ставится метка
4	Стереть метку	$XSy$	Из обозреваемой секции удаляется метка

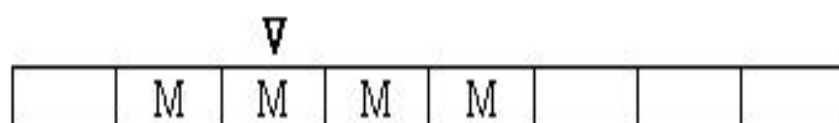


# Система команд машины

5	Передача управления	 <p>A diagram showing a variable <math>x</math> on the left, with two lines extending to the right. The upper line is labeled <math>y_1</math> and the lower line is labeled <math>y_2</math>.</p>	При отсутствии метки в обозреваемой секции управление передается команде $y_1$ , при наличии – команде $y_2$ .
6	Остановка	$x$ стоп	Прекращение работы машины

### ✦ Пример

На ленте записано некоторое число, и головка обозревает одну из помеченных секций (любую). Составить программу прибавления единицы к этому числу. Ситуация иллюстрируется рисунком.



**Программа**, обеспечивающая решение задачи, состоит из 4-х команд:

- |        |   |   |          |
|--------|---|---|----------|
| 1.     | 3 | < | 3. M 4   |
| 2.     | 2 | < |          |
| 2. → 1 |   |   | 4. стоп. |

# Комментарий к примеру

- ✓ Последовательное исполнение команд 1 и 2 приводит к тому, что головка за два такта работы машины сдвигается на одну позицию вправо.
- ✓ Это передвижение продолжается до тех пор, пока после очередного сдвига под головкой не окажется пустой ячейки – тогда по команде 3 в нее будет поставлена метка
- ✓ и по команде 4 машина остановится

- Если данные условия не выполняются, происходит **безрезультатная** остановка машины, т.е. остановка до получения запланированного результата.
- В отличие от этой ситуации, остановка по команде **<х стоп>** является **результативной**, т.е. она происходит после того, как результат действия алгоритма получен.
- Кроме того, возможна ситуация, когда машина не останавливается никогда – это происходит, если ни одна из команд не содержит в качестве последователя номера команды остановки или программа не переходит к этой команде.