

# Динамическое программирование

Все ранее рассматриваемые задачи носили статичный характер, однако на практике существуют задачи, в которых необходимо учитывать изменения параметров систем во времени. Эти параметры могут меняться непрерывно или дискретно - от этапа к этапу. Например, из года в год меняется возраст машин и оборудования, изменяется производственная мощность и т.д.

Очевидно, что необходимо принимать оптимальные решения на год (или другой срок) и одновременно на весь рассматриваемый период в целом с учетом возможных изменений параметров. Для решения такого рода задачи, которые получили название **многошаговые**, разработан соответствующий математический аппарат, который получил название **динамическое программирование**.

На каждом шаге с целью улучшения результата операции в целом осуществляется распределение и перераспределение ресурсов, т.е. управление  $u$ . Эффективность операции в целом характеризуется показателем  $W$ , который зависит от всей совокупности управлений  $u$  и на каждом шаге операции  $W=W(u)=W(u_1, u_2, \dots, u_m)$ .

Управление, при котором показатель  $W$  достигает оптимума (максимума или минимума), называется оптимальным управлением  $u^*$ , которое состоит из совокупности оптимальных шаговых управлений  $u^* = (u_1^*, u_2^*, \dots, u_m^*)$ .

$$W^* = \sum W_i \begin{cases} \max \\ \min \end{cases}, \quad \text{а не } W_i^* \begin{cases} \max \\ \min \end{cases}, \quad i=1..m$$

# Динамическое программирование

## Проектирование дороги

Прокладывается участок лесовозной дороги между нижним складом леспромхоза и погрузочной площадкой лесопункта по пересеченной местности. Требуется провести дорогу, чтобы суммарные затраты на сооружение участка были минимальные.

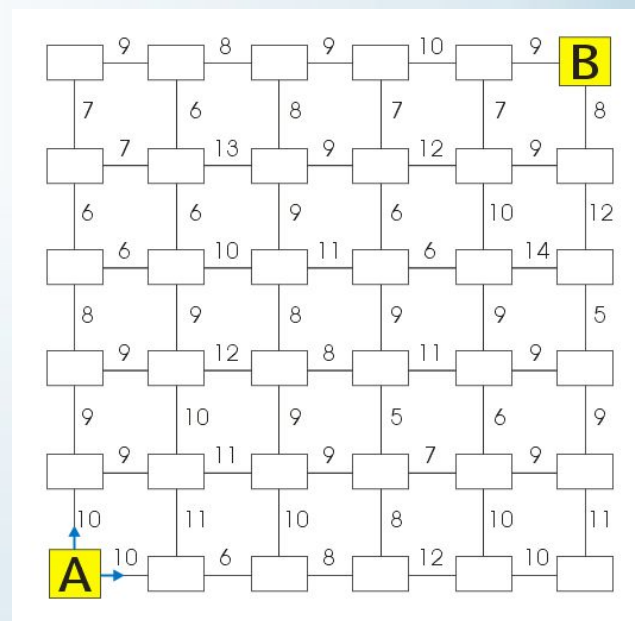
Управление всей операции состоит из совокупности шаговых управлений  $u = (j_1, j_2, \dots, j_m)$ . Требуется найти такое оптимальное управление  $u^*$ , при котором суммарные затраты  $W$  на сооружение участка минимальны, т.е.

$$W^* = \sum W_i \rightarrow \min.$$

Участок местности разбивается на сетку, вдоль направлений которой будет строиться дорога из пункта **A** в пункт **B**. Дорогу из каждой точки можно строить столько слева-направо или снизу-вверх.

Цифры, стоящие рядом с отрезками, обозначают затраты на строительство данного кусочка дороги.

Требуется выбрать такой путь из **A** в **B**, для которого сумма чисел, стоящих на отрезках, была бы минимальна.



# Динамическое программирование

## Метод решения

Решение задач динамического программирования идет двухэтапным способом. На первом этапе решается последовательно несколько задач условного программирования, начиная от последнего шага задачи, двигаясь по направлению к первому.

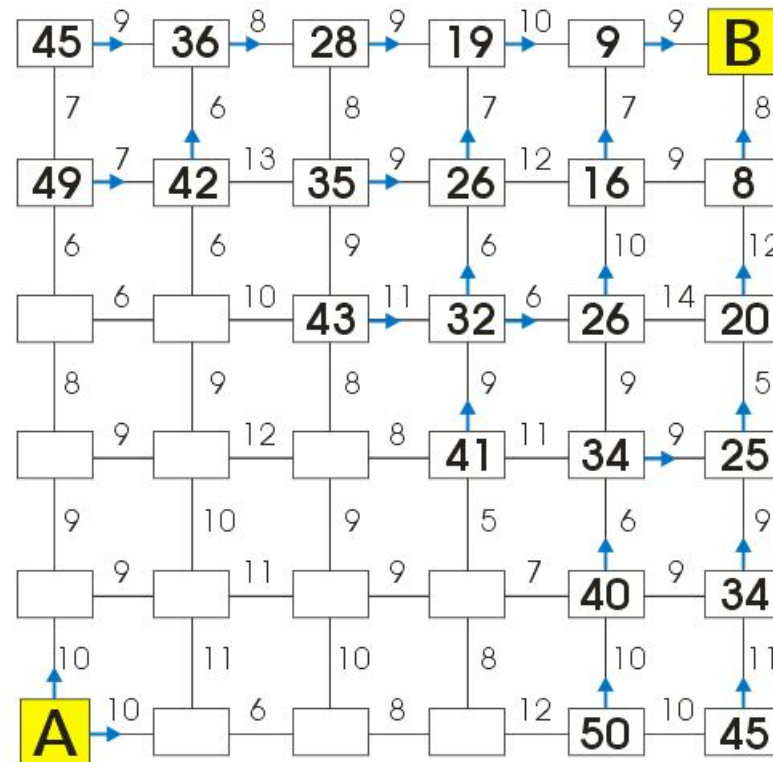
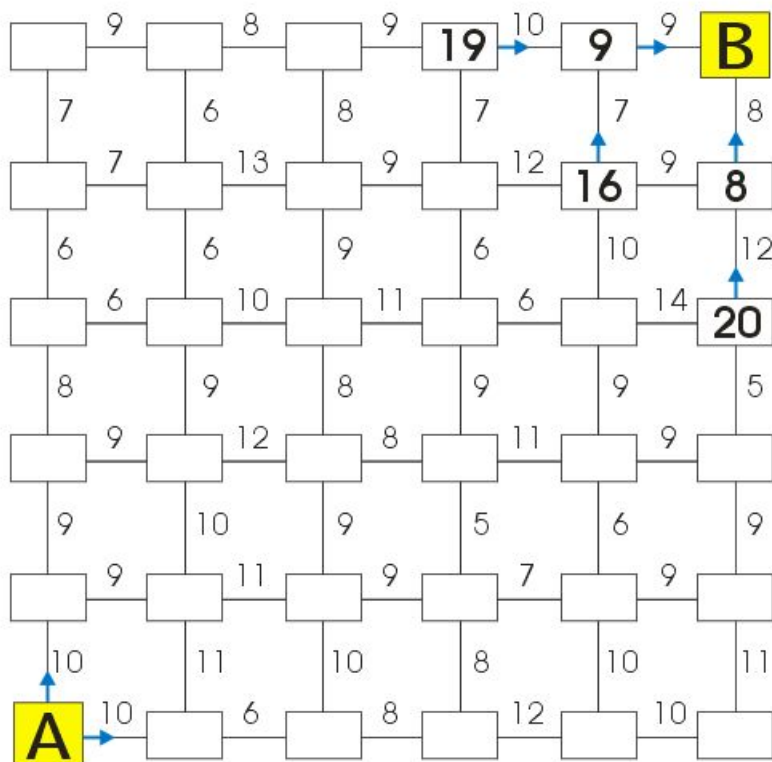
Условность задачи объясняется тем, что  $m$  шаг решается исходя из предположения о том, как завершился  $m-1$  шаг.

Решение неявного второго этапа носит безусловный характер, т.к. оптимальным решением задачи является решение, полученное на первом шаге (оно учитывает все последующие шаги (например, участки дороги) и соответствует оптимальной ситуации в целом).



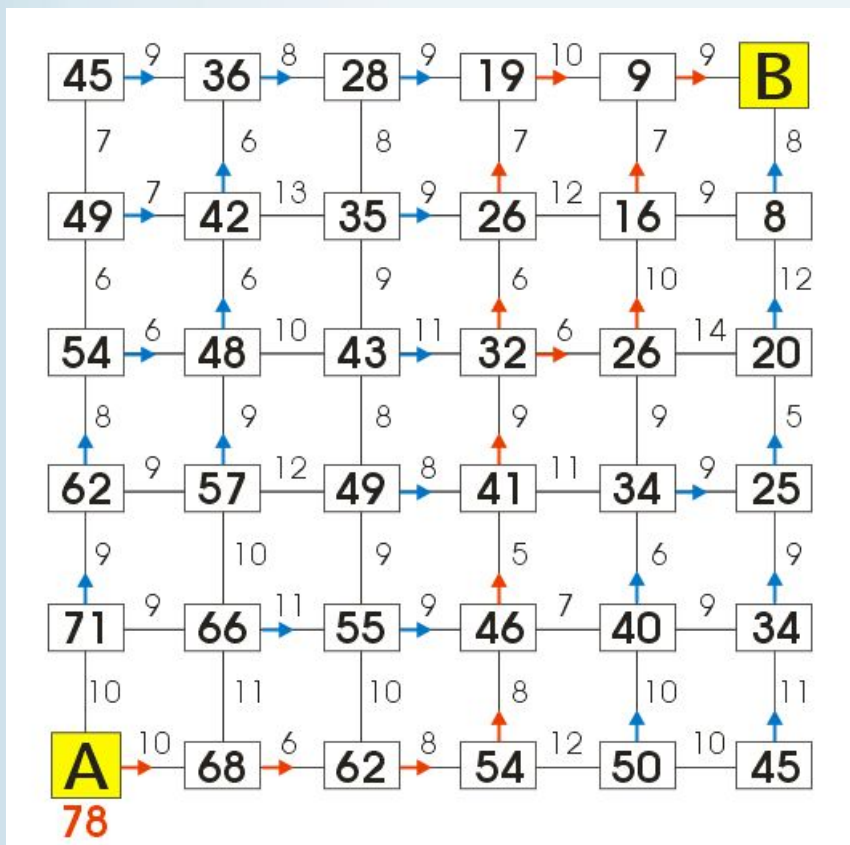
# Динамическое программирование

## Проектирование дороги



# Динамическое программирование

## Проектирование дороги



После решения последовательности задач условной оптимизации общее оптимальное решение находится прямым проходом "по карте" и практически соответствует решению первого (самого ближнего к точке **A**) шага. Общие затраты на строительство дороги составят **78** условных единиц.



# Динамическое программирование

## Оптимальное распределение ресурсов

В общем виде задачи оптимального распределения ресурсов могут быть описаны следующим образом. Имеется некоторое количество ресурсов (материальные, трудовые, финансовые), которые необходимо распределить между различными объектами их использования по отдельным промежуткам планового периода так, чтобы получить максимальную суммарную эффективность от выбранного способа распределения.

Показателем эффективности может служить, например, прибыль, себестоимость, суммарные затраты и т.д.

## Пример. Оптимальное распределение памяти.

Завлаб имеет в своем распоряжении 7 модулей оперативной памяти, которые должен использовать при модернизации 5 компьютеров. Эффективность работы каждого из них при добавлении нескольких модулей приведена в таблице. Определить самый оптимальный вариант распределения модулей между компьютерами для получения наивысшего суммарного коэффициента эффективности.

# Динамическое программирование

## Оптимальное распределение памяти

Эффективность работы  $i$ -того компьютера при добавлении в него  $u$  модулей оперативной памяти выражается функцией  $f_i(u)$ .

$u$ - кол-во модулей памяти, добавленных в компьютер	$f_1(u)$	$f_2(u)$	$f_3(u)$	$f_4(u)$	$f_5(u)$
0	0.74	0.85	0.90	0.88	0.70
1	0.81	0.90	0.92	0.91	0.76
2	0.85	0.93	0.93	0.92	0.80
3	0.90	0.94	0.94	0.93	0.85
4	0.92	0.95	0.95	0.94	0.88
5	0.93	0.96	0.96	0.95	0.91
6	0.94	0.97	0.96	0.95	0.93
7	0.95	0.97	0.96	0.95	0.94

# Динамическое программирование

## Оптимальное распределение памяти

Решение задачи разбивается на 5 шагов, при этом подразумевается, что на первом шаге ОЗУ выделялось для 1-го компьютера, на втором – для второго и т.д. Тогда, все оставшиеся модули после модернизации четырех компьютеров, будут использованы в пятом.

$$W^* = W_{1-5} = \sum f_i(u)$$

Таким образом, начиная решать задачу условной пошаговой оптимизации с последнего шага, функция на пятом шаге будет  $W_5 = f_5(u)$ .

Переходя к 4 шагу и осуществляя перебор возможных вариантов остатков модули памяти после распределения по трем первым компьютерам, находим

$$W_{4-5}^* = (f_4(u) + f_5(u))^*$$

$f_4(u)$	$f_5(u)$
0.88	0.70
0.91	0.76
0.92	0.80
0.93	0.85
0.94	0.88
0.95	0.91
0.95	0.93
0.95	0.94



# Динамическое программирование

## Оптимальное распределение памяти

Эффективность работы  $i$ -того компьютера при добавлении в него  $u$  модулей оперативной памяти выражается функцией  $f_i(u)$ .

$u$	4-5	$W_{4-5}(u)$							
0	0-0	1.58=0.88+0.70							
1	0-1	1.61=0.91+0.70				1.64=0.88+0.76			
2	0-2	1.62=0.92+0.70			1.67=0.91+0.76			1.68=0.88+0.80	
3	0-3	1.63		1.68		1.71		1.73	
4	1-3 и 0-4	1.64		1.69		1.72		1.76	1.76
5	1-4 и 0-5	1.65	1.70	1.73		1.77		1.79	1.79
6	1-5	1.65	1.71	1.74	1.78	1.80		1.82	1.81
7	1-6	1.65	1.71	1.75	1.79	1.81	1.83	1.84	1.82

$f_4(u)$	$f_5(u)$
0.88	0.70
0.91	0.76
0.92	0.80
0.93	0.85
0.94	0.88
0.95	0.91
0.95	0.93
0.95	0.94

# Динамическое программирование

## Оптимальное распределение памяти

Далее от рассмотрения 4-го шага переходим к третьему. Общая целевая функция будет выглядеть как  $W^* = f_3(u) + W_{4-5}(s-u)$ , где  $s$  – остаток от  $u$  после модернизации третьего компьютера,  $u$  – остаток модулей к третьему шагу.

u	3-4-5	$W_{3-5}(u)$					
0	0-0-0	2.48=0.90+1.58					
1	0-0-1	2.50=0.92+1.58			2.54=0.90+1.64		
2	0-0-2	2.51=0.93+1.58		2.56=0.92+1.64		2.58=0.90+1.68	
3	0-0-3	2.63					
4	0-1-3 и 0-0-4	2.66					
5	0-1-4 и 0-0-5	2.69					
6	0-1-5	2.72					
7	0-1-6 и 1-1-5	2.74					

$f_3(u)$	$W_{4-5}(s-u)$
0.90	1.58 (0-0)
0.92	1.64 (0-1)
0.93	1.68 (0-2)
0.94	1.73 (0-3)
0.95	1.76 (1-3 и 0-4)
0.96	1.79 (1-4 и 0-5)
0.96	1.82 (1-5)
0.96	1.84 (1-6)



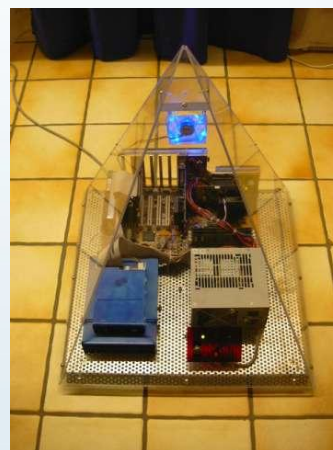
# Динамическое программирование

## Оптимальное распределение памяти

Рассматривая аналогичным образом распределение модулей памяти между вторым и оставшимися (третьим, четвертым, пятым), а также производя вычисления для первого ( $u_1=7$ ), на "прямом проходе" получаем, что оптимальная политика модернизации компьютеров выглядит следующим образом.

Номер компьютера	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
Количество модулей памяти	3	1	0	0	3

$$W^*(3,1,0,0,3)=4.43$$





# Динамическое программирование

## Оптимальная политика замены оборудования

В результате физического и морального износа оборудования растут производственные затраты по выпуску продукции, увеличиваются затраты на ремонт и обслуживание техники, а также снижается производительность. Наступает момент, когда старое оборудование более выгодно продать, заменив новым, чем эксплуатировать ценой больших затрат. При этом оборудование можно заменить либо новым оборудованием того же вида, либо новым или бывшем в употреблении, более совершенным в техническом отношении, с учетом технического прогресса.

При составлении модели динамического программирования процесс замены рассматривается как  $N$ -шаговый, разбив весь период на  $N$  промежутков. Так как в начале каждого из этих промежутков принимается решение о сохранении оборудования, либо его замене, то управление на  $i$  шаге ( $i=1,2,\dots,N$ ) содержит лишь две альтернативные переменные.

Обозначим через  $u_c$  решение, состоящее в сохранении старого оборудования, а через  $u_z$  - решение, состоящее в замене старого оборудования новым. Условная оптимизация на каждом шаге состоит в вычислении двух величин и в выборе из них наибольшей (наименьшей). Это значительно упрощает расчеты на стадии условной оптимизации и позволяет решать вручную задачи о замене с большим числом шагов.

# Динамическое программирование

## Замена форвардера

Рассматривается эксплуатация форвардера в течении шести лет. В начале каждого года может быть принято решение о замене машины новой.

Стоимость нового форвардера на  $i$  шаге эксплуатации составляет  $z_i = 50000 + 5000(i-1)$  долларов. После  $t$  лет эксплуатации машину можно продать за  $s(t) = z_i \cdot 2^{-t}$  долларов. Стоимость содержания машины в течении  $i$  года составляет  $g(t) = 0.1z_i \cdot (t+1)$  долларов. Найти оптимальный способ эксплуатации машины: когда нужно заменить машину новой, чтобы суммарные затраты (с учетом затрат на покупку новой машины в начале срока эксплуатации и компенсации за счет заключительной продажи) были минимальны.





# Динамическое программирование

## Замена форвардера

Процесс эксплуатации форвардера описывается шестью шагами. Состояние  $s_{i-1}$  системы в начале  $i$  шага характеризуется одним параметром  $t$  – возрастом машины. Управление на каждом шаге состоит в выборе одного из двух решений:  $u_c$  – решение, состоящее в сохранении форвардера, или  $u_3$  – решение, состоящее в его замене. Основные функциональные уравнения модели динамического программирования имеют вид:

$$W_i(t) = \min \begin{cases} g_i(t) + W_{i+1}(t+1), u_i = u_c, i < 6 \\ z_i + g_i(0) - s_i(t) + W_{i+1}(1), u_i = u_3 \end{cases}$$

Для шестого шага:

$$W_6(t) = \min \begin{cases} g_6(t) - s_7(t+1), u_6 = u_c, i = 6 \\ z_6 + g_6(0) - s_6(t) - s_7(1), u_6 = u_3 \end{cases}$$

Подставляя уравнения задачи в первую систему, получаем

$$W_i(t) = \min \begin{cases} 500(t+1)(i+9) + W_{i+1}(t+1), u_i = u_c, i < 6 \\ 5000(i+9)(1.1-2^{-t}) + W_{i+1}(1), u_i = u_3 \end{cases}$$



# Динамическое программирование

## Замена форвардера

Подставляя уравнения задачи в систему для шестого шага, получаем

$$W_6(t) = \min \begin{cases} 7500(t+1) - 80000 \cdot 2^{-t+1}, u_6 = u_5 \\ 42500 - 75000 \cdot 2^{-t}, u_6 = u_3 \end{cases}$$

Рассчитываем два варианта исхода 6 шага в зависимости от срока предыдущей эксплуатации форвардера (1-5 лет, 0 лет ему быть не может, т.к. рассматривается начало 6 года, и смена форвардера на новый в начале года, а не в конце).

t	сохранение	$W_6(t)$	замена	Вывод
1	-5000		5000	$u_c$
2	12500		23750	$u_c$
3	25000		33125	$u_c$
4	35000		37812	$u_c$
5	43750		40156	$u_3$

# Динамическое программирование

$$W_i(t) = \min \begin{cases} 500(t+1)(i+9) + W_{i+1}(t+1), & u_i = u_c \\ 5000(i+9)(1.1-2^{-t}) + W_{i+1}(1), & u_i = u_3 \end{cases}$$

i	6					5				4			3		2	1
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	1	2	3	1	2	1	0
$500(t+1)(i+9)$						14000	21000	28000	35000	13000	19500	26000	12000	18000	11000	5000
$W_i(t, U_c)$	-5000	12500	25000	35000	43750	26500	46000	63000	75156	59000	82500	93625	93750	107875	118875	173875
$5000(i+9)(1.1-2^{-t})$						42000	59500	68250	72625	39000	55250	63375	36000	51000	33000	
$W_{i+1}(1)$						-5000	-5000	-5000	-5000	26500	26500	26500	59000	59000	93750	
$W_i(t, U_3)$	5000	23750	33125	37812	40156	37000	54500	63250	67625	65500	81750	89875	95000	110000	126750	
$U_i(t)$	$U_c$	$U_c$	$U_c$	$U_c$	$U_3$	$U_c$	$U_c$	$U_c$	$U_3$	$U_c$	$U_3$	$U_3$	$U_c$	$U_c$	$U_c$	$U_c$

При прямом проходе по рассчитанным данным получается, что на 1 году форвардер новый (0 лет), на начало второго года ему однозначно будет 1 год ( $t=1$ , выбираем  $U_c$ ), на начало третьего года ему будет 2 года (выбираем  $U_c$  в столбике  $i=3$ ,  $t=2$ ), на четвертом форвардер находится в эксплуатации уже 3 года, поэтому меняем его на новый, которому к началу 5 года "стукнет" 1 год.

Безусловная оптимизация приводит к результату:  $W^*=173875$  долларов; оптимальное решение  $U^*=(u_c, u_c, u_c, u_3, u_c, u_c)$ . Сл., приобретенный форвардер целесообразно эксплуатировать в течении трех лет, на четвертом году его следует заменить новым и продолжать эксплуатировать оставшееся время.