# Большие дополнительные пространственные измерения: многомерная теория поля и гравитация на масштабе ТэВ

*Савина Мария*
*ЛФЧ, ОИЯИ*

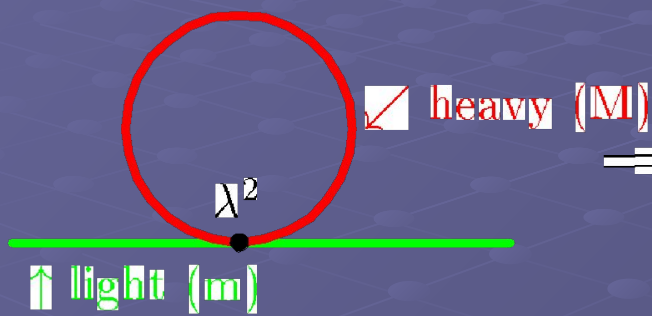
## Лекция 1: Многомерная теория поля – мотивы для изучения, характерные черты и общие свойства

Краткий план:

- Проблема иерархий и защищающие симметрии: SUSY, техницвет
- Иерархия без симметрий – геометрия многомерного пространства, LED
- Стандартная КК-декомпозиция, 4D- и (4+N)D-интерпретации, эффективная 4D теория
- Локализация нулевых мод полей на топологическом дефекте.
- Пример реализации юкавской иерархии, смешивания поколений и процессов за рамками в СМ, без привлечения нарушенных симметрий в многомерных теориях

# Проблема иерархий: два масштаба в теории

Впервые сформулирована С.Вайнбергом ’76




$$\Longrightarrow \delta m^2 \sim \lambda^2 \cdot M^2$$

$$\wr \qquad \wr \qquad \wr$$

$$10^2 \quad 10^{-1} \quad 10^{16}$$

**Радиационные поправки к «голой» массе хиггса**

⇓

**очень большие вклады**

⇓

**должны быть скомпенсир. подходящим выбором $m_0$:**

(QED: $\delta m_e \approx \frac{\alpha}{\pi} m_e \log \frac{k_{max}}{m_e}$ )

Добавка от калибровочного сектора: $$m_H^2 = m_0^2 + (c_2 g^2 + c_4 g^4 + ..)\Lambda^2$$

Насколько большим м.б. UV масштаб Λ ? ⇨ Два стандартных UV обрезания

$$M_{GUT} \approx 10^{16}\, GeV \qquad M_{Pl} \approx 10^{19}\, GeV$$

$$\left(\frac{\eta}{\Lambda}\right)^2 \approx 10^{-28} - 10^{-34}$$

Абсолютно непонятно, как обеспечить тонкую настройку с такой колоссальной точностью !

# Несколько слов о естественности: уроки QCD

Теория с фазовым переходом: нарушение киральной симметрии,
<qq>, <gg> конденсаты определяют значения масс в спектрах мезонов и барионов

$\Lambda_{QCD} \sim 100$ MeV $\Longrightarrow$ $M_{Pl} \sim 10^{19}$ GeV

Естественный механизм генерации этой гигантской иерархии масштабов
Метод ренормгруппы : логарифмический бег константы связи:

$$\Lambda_{QCD} \propto M_{Pl} e^{-\frac{8\pi^2}{g^2(M_{Pl})b_c}}$$

: Асимптотическая свобода + размерная трансмутация

$\Downarrow$

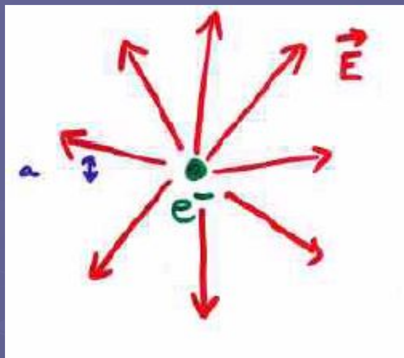
- Естественное динамическое происхождение иерархии безо всякой тонкой подгонки параметров: **«сильная» естественность теории**

- Параметр физической теории, раз выбранный малым, остается таковым, вследствие специального (мультипликативного) вклада от радпоправок:
**«техническая» естественность** $\Longrightarrow$ $m = m_0(1 + \alpha^2 f + \ldots)$

Симметрия позволяет сохранить малое значение параметра (защищающая сим.)

Пример: QED, $m_e = 0$ $\Longrightarrow$ *защищающая киральная симметрия* $U(1)_L \times U(1)_R$

# Some analogy from QED:



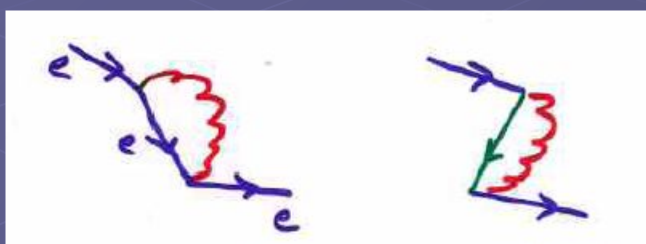

Energy: $\int d^3r \frac{1}{2}\vec{E}^2 \approx \alpha \int \frac{d^3r}{r^2} \approx \alpha a^{-1}$

Contribution to electron self-energy $\delta m_e \approx \alpha a^{-1} \approx k_{max}$

introduce antiparticles, positrons, with doubling in d.o.f.

$$\delta m_e \approx \frac{\alpha}{\pi} m_e \log \frac{k_{max}}{m_e}$$

it is acceptable, QED OK!



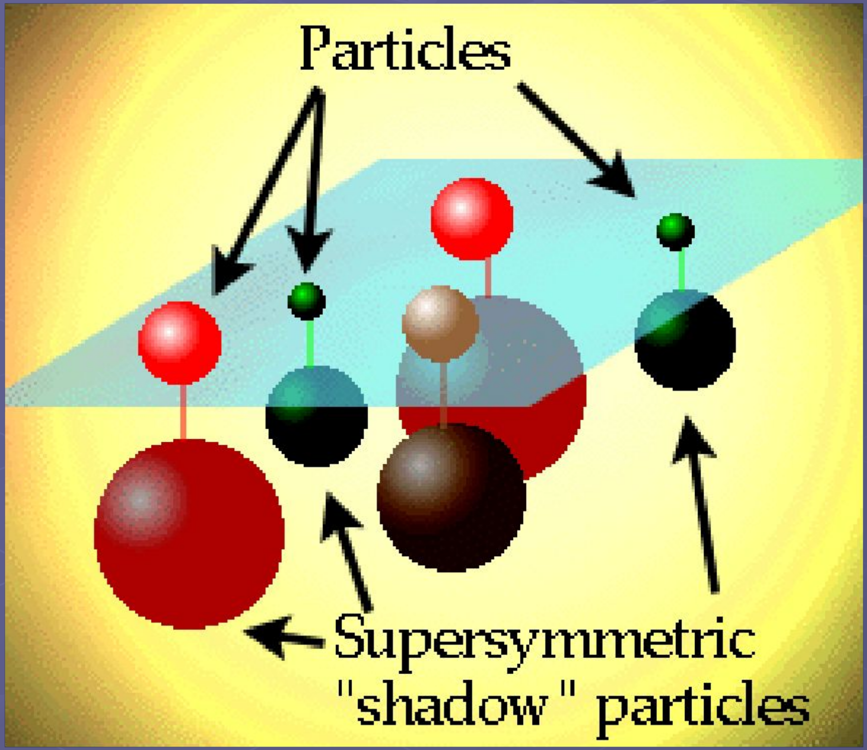

Fine-tuning is not required!
Rapidly growing dangerous contributions are cancelled by introducing new particles (positrons) with an extended symmetry:

The lesson from this example: to eliminate fine-tuning we need some new physics what is caused by new wider symmetry. This new physics provides a good UV behaviour of our theory.

SM: Can we obtain the hierarchy for higgs in the same way? Compositeness, technicolor

Supersymmetry: compensation of different matter vacuum contributions

stabilization of a scale hierarchy (unbroken SUSY)




$$Q|boson>=|\,fermion\rangle$$

$$Q|\,fermion\rangle=|boson\rangle$$

$$<\rho>_{vac}^{ferm}=-<\rho>_{vac}^{bos}$$

Exact cancellation of contributions from fields and their supersymmetric partners

We can address this to solve both the hierarchy problem and CCP

SUSY is working excellent for the hierarchy stabilization, but it failures for CCP

A set of new particles is the price for improved behaviour of the theory

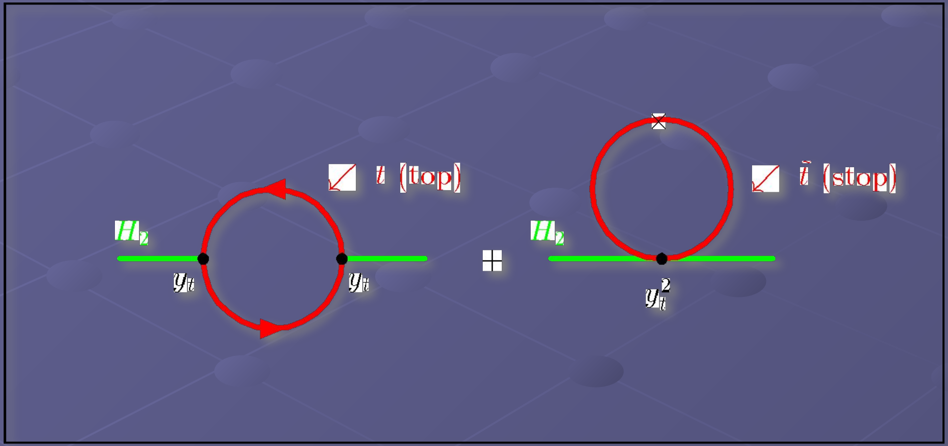
# Hierarchy problem and SUSY

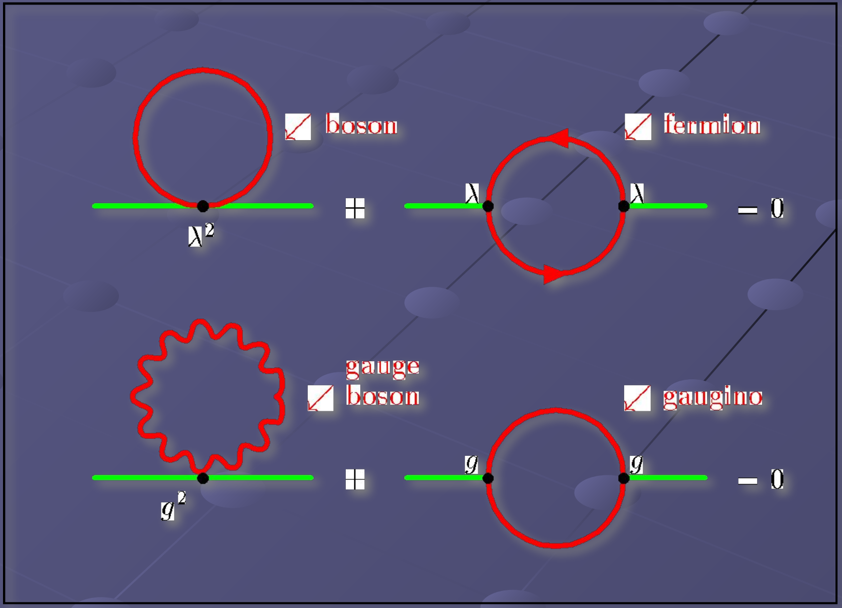
Unbroken SUSY: usual matter fields and superpartners have equal masses

Dangerous loop contributions from usual fields and superpartners are mutually cancelled

cancellation of corrections to the higgs self-energy from top and stop quark loops when SUSY is unbroken

cancellation of corrections in the gauge sector when SUSY is unbroken




**no fine-tuning!**

# Hierarchy problem and SUSY

IF SUSY is broken at the scale about 1 TeV:

$$\frac{g^2}{16\pi^2}\Delta m^2 \approx \eta^2$$

A difference between values of masses of usual fields and superpartners is about Δm

$$\boxed{\frac{g^2}{16\pi^2}\Delta m^2 \lesssim \eta^2}$$

**If this relation are satisfied fine-tuning is not required!!**

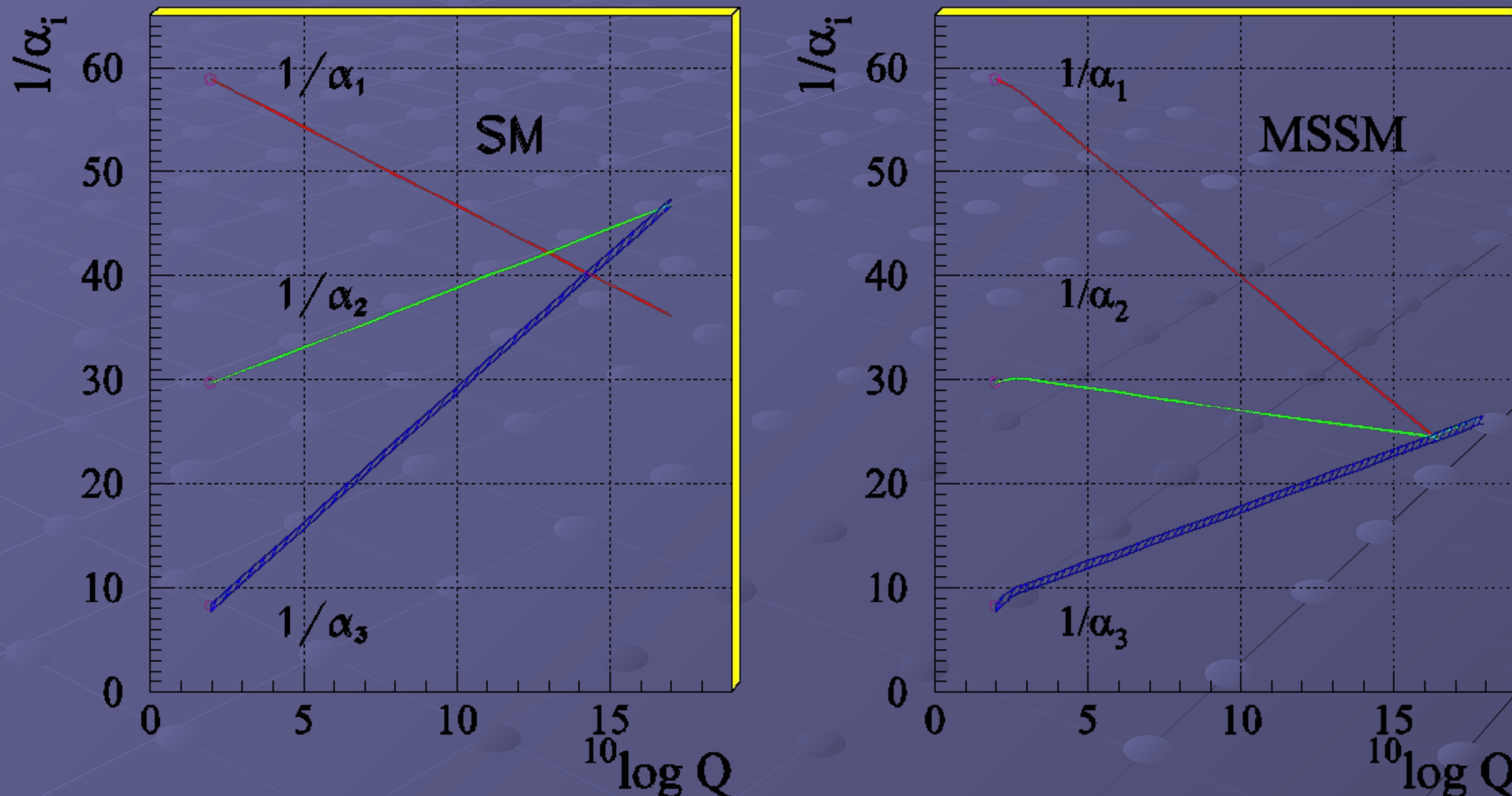
Important condition: masses of superpartners can not be much larger then 1 TeV!!!

Superpartner contributions modify the behaviour of running coupling constants:

$$\hat{\alpha}_i(M_{GUT}) = \frac{\hat{\alpha}_i(M_Z)}{1-(b_i/2\pi)\hat{\alpha}_i(M_Z)\ln(M_{GUT}/M_Z)}$$

**Unification of running coupling constants, *$M_{SUSY} \approx 1$ TeV***

# Unification of the Coupling Constants in the SM and the minimal MSSM



# Защищающая киральная симметрия

Иерархия масштабов может сохраняться естественным образом (в «техническом» смысле, т.е. быть стабилизированной, а также и в сильном смысле - динамически), если теория обладает некоторой защищающей симметрией, которая запрещает возникновения радпоправок, будучи ненарушенной, и обеспечивает малость поправок в случае нарушения симметрии (вклад от поправок будет порядка величины нарушения симметрии).

Один хороший пример - SUSY. Защищающая симметрия в этом случае - киральная симметрия для частиц и их суперпартнеров, поскольку они располагаются в одном и том же супермультиплете. Для ненарушенной SUSY эта симметрия - точная, и любые радпоправки запрещены. Для нарушенной на некотором энергетическом масштабе SUSY величина вклада от радпоправок конечна, и порядка масштаба нарушения

Существуют и другие примеры естественных теорий, в частности, хорошо известные модели техницвета – «копирование» КХД для более высоких энергий. Защищающая симметрия и в этом случае – киральная. Сильновзаимодействующий сектор – SSB на некотором масштабе (порядка нескольких ТэВ).

Нет других «естественных» механизмов SSB в 4D !

# Resume on 4D theories with SSB

The hierarchy of scales in SM is not "a technical" but *a principal* problem, a weak point of the model that must be solved to get a blameless scheme.

*SUSY:*

- SUSY prevents the hierarchy against HO contributions which destroy it it solves the problem of hierarchy stabilization and eliminates the necessity of fine-tuning.
- SUSY scale appears to be equal 1 TeV (low-scale SUSY) as motivated by running coupling constant unification. B,L conservation
- SUSY does not solve the hierarchy problem in whole as it does not explain *the hierarchy itself*, that is where two energy scale in theory are going from (It is insufficient to stabilize the hierarchy to explain the hierarchy!)

*Strong coupled sector:*

- Composite higgs model (or Technicolor): $\Lambda \sim$ 5-10 TeV or higher, large contribution to EW observables - ruled out by EW precision data
- Hard to obtain quantitative predictions because of strong coupling regime corrections for technifermions and technibosons - confinement!
- Interesting intersections with new ideas of multidimensional gravity through AdS/CFT correspondence!

# Alternative new physics beyond the TeV scale

- Composite higgs model (or Technicolor): 70's of last century

$\Lambda \sim$ 3-5 TeV or higher

hard to obtain quantitative predictions because of strong coupling regime
corrections for technifermions and technibosons - again the problem of confinement!

⇓

interesting intersections with new ideas of multidimensional gravity through AdS/CFT correspondence!

- Large extra spatial dimensions: last decade

Planck scale is *an effective scale* regularized by a size of extra dimensions.

flat bulk space
ADD-type, power hierarchy

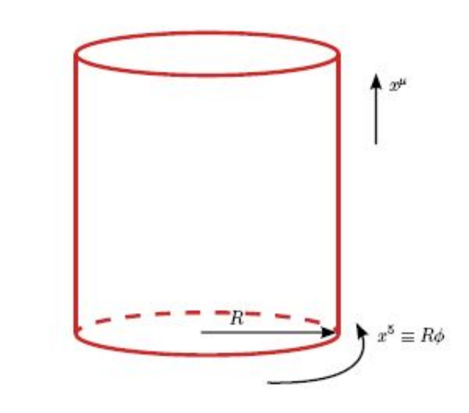
curve bulk space
RS-type, exponential hierarchy
negative CC, inflation

- Little higgs and little hierarchy (N.Arkani-Hamed, E.Cohen, E.Katz...): 2001

All of this is along the direction of naturalness philosophy

# Геометрия многомерного объема: иерархии без симметрий

# Стандартный калуца-кляйновский подход




(4+1)D-теория свободного скалярного поля. Одно компактное дополнительное пространственное измерение с условием периодичности по доп. коорд.:

$$\eta_{\mu\nu} = +1,-1,-1,..-1; \quad (\partial_\mu \partial^\mu - \partial_y^2)\phi = 0, \quad \mu = 0,1,2,3$$

КК-декомпозиция:

$$\phi(x,y) = e^{ip_\mu p^\mu} e^{in\frac{y}{R}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

$$p_\mu p^\mu = \frac{n^2}{R^2} = m^2 \leftarrow$$ массы КК-мод

угловой момент

Существует однородная нулевая мода с m=0, распространяющаяся вдоль браны (модуль). 4D-лоренц-инвариантность не нарушена, трансляционная инв-ть нарушена в направлении, перпендикулярном бране

$m_{KK}$ не ниже ТэВ (из эксперимента)

Несколько ED: по-прежнему одна нулевая мода, но много КК-мод с фиксир. массой

$$\phi(x,y) = e^{ip_\mu p^\mu} e^{in_1\frac{y_1}{R_1}} e^{in_2\frac{y_2}{R_2}} ... e^{in_N\frac{y_N}{R_N}}, \quad y_{1,...}y_N \to R_1,...R_N$$

$$m_{\{n\}}^2 = \sum \frac{n_i^2}{R_i^2}$$

# 5D vs эффективное 4D-описание

Действие 5D-скалярного поля:

$$[\Phi] = M^{3/2}$$

$$S = \int d^4x \int_0^{2\pi R} dy \frac{1}{2} \partial_A \Phi \partial^A \Phi = \int d^4x \int_0^{2\pi R} dy \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \partial_y \Phi \partial^y \Phi)$$

КК-декомпозиция: $$\Phi(x,y) = \sum_n \phi_n(x) e^{in\frac{y}{R}}$$

$$S = \int d^4x \sum_n (2\pi R)\left[\frac{1}{2}\left|\partial_\mu \phi_n\right|^2 - \frac{1}{2}\frac{n^2}{R^2}\left|\phi_n\right|^2\right]$$

объем ED

Свободное действие для бесконечного набора 4D скалярных полей

Каноническая нормировка позволяет привести действие к совершенно стандартному виду

$$\hat{\phi}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \phi_n(x), \qquad [\hat{\phi}_n] = M$$

# Взаимодействующее поле

$$S_{\text{int}} = \int d^4x \int_0^{2\pi R} dy \lambda^{(5)} \phi^4 \,, \qquad [\lambda^{(5)}] = \frac{1}{M}$$

Отрицательная степень массы для к-ты связи – неперенормируемая теория

$$E_{strong} \propto \frac{1}{\lambda^{(5)}} \equiv M_{(5)}$$

Фундаментальный масштаб – значение энергии, при которой теория переходит в режим сильной связи, и эффективное описание становится неприменимым

Как связаны многомерная и 4D константы взаимодействия? (КК-декомпозиция, учет только нулевой моды)

$$S_{\text{int}} = \int d^4x (2\pi R) \frac{\lambda^{(5)}}{(2\pi \text{R})^2} \hat{\phi}_0^4(\text{x}), \longrightarrow \lambda^{(4)} = \frac{\lambda^{(5)}}{2\pi R}$$

нормировка

два параметра:
$R$ и $M_{(5)}$

4D константа связи – не фундаментальная, а эффективная, выведенная из многомерной

# Некоторые очевидные следствия:

1. Условие для слабосвязанной теории $\lambda^{(4)} = \frac{1}{2\pi R M_{(5)}} << 1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{R} >> \lambda^{(5)} = \frac{1}{M_{(5)}}$

Размер ED должен существенно превышать значение обратной фундам. массы!

2. Условие на массы КК-мод $m_n = \frac{|n|}{R} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{m_n} << M_{(5)} \quad \text{для} \quad \mathrm{n} \approx 1$

легкие первые КК-моды

3. Взаимодействие нулевой моды и высших возбуждений

$$S_{\text{int}} = \int d^4x \int_0^{2\pi R} dy \lambda^{(5)} \Phi^4 \longrightarrow \Phi^4 = (\hat{\varphi}_0 + \sum_{n\neq 0} \hat{\varphi}_n e^{in\frac{y}{R}})^4 \frac{1}{(2\pi R)^2}$$

$$L_{\text{int}} = \frac{1}{(2\pi R)^2}[\hat{\varphi}_0^4 + 4\hat{\varphi}_0^3 \sum_{n\neq 0} \hat{\varphi}_n e^{in\frac{y}{R}} + 6\hat{\varphi}_0^2 \sum_{n\neq 0}\sum_{n'\neq 0} \hat{\varphi}_n \hat{\varphi}_{n'} e^{i(n+n')\frac{y}{R}}]$$

$$= 0, \quad \int \mathrm{dy}\,\delta(\mathrm{y}) \qquad \delta(\mathrm{n}+\mathrm{n}')$$

$$S_{\text{int}} = \int d^4x 12\lambda^{(4)} \sum_{n\neq 0} \hat{\varphi}_0{}^2 \hat{\varphi}_n \hat{\varphi}_{-n}$$

парное рождение КК-мод,
сохранение углового момента
(не верно для BW ! )

единственная безразмерная к-та связи

## Мир на бране – локализация полей на 3D-гиперповерхности. Как сделать?

ТС – свои методы
КТП – локализация на топологическом дефекте
(Рубаков, Шапошников, 1983)

Потенциал «подходящего вида», EDs могут быть развернуты (бесконечные)

$$S^{(5)} = \int d^4x \int dy [\frac{1}{2}\partial_A\varphi\partial^A\varphi - V(\varphi)] \xrightarrow{\text{E.o.M.}} \partial_A\partial^A\varphi + \frac{\partial V}{\partial\varphi} = 0$$

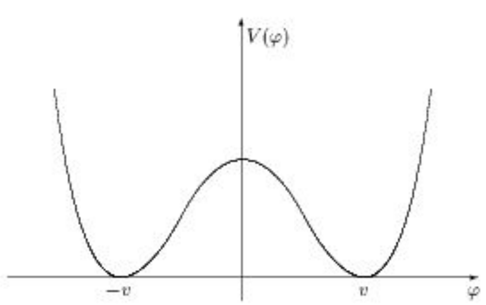


Figure 1: Scalar potential in the model (2).

$\varphi = v$

$\varphi = -v$

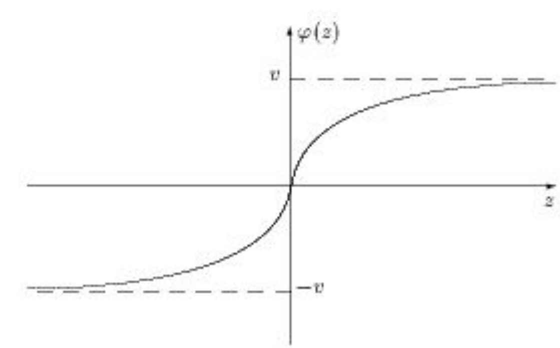
Классические IR вакуумы теории (космологическая константа)

$$V(\varphi) = \lambda^{(5)}(\varphi^2 - v^2)^2$$

Существует топологически нетривиальное решение – доменная стенка (кинк), зависящее только от дополнительной координаты - одномерное

$$\varphi_c = \varphi_c(y) = v\tanh(\sqrt{2\lambda^{(5)}}vy)$$

Нарушает трансляционную инвариантность вдоль y



Флуктуации скалярного поля над этим классическим решением:

$$\varphi(x,y)=\varphi_c(y)+\delta\varphi(x,y)$$

Линеаризованные E.o.M.

$$\partial_A\partial^A(\delta\varphi)+\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}[\varphi=\varphi_c]\delta\varphi=0$$

потенциальная стенка

КК-декомпозиция:

$$\delta\varphi=e^{ip_\mu p^\mu}\delta\varphi_m(y),$$

$$\mathrm{p}_\mu p^\mu=m^2$$ 4D-масса

$$m^2\delta\varphi_m(y)=[-\partial_y{}^2+U(y)]\delta\varphi_m$$

Нулевая мода, m=0

$$\delta\varphi_0(y)=\varphi_c{}'(y)\propto\frac{1}{\cosh(\sqrt{2\lambda^{(5)}}vy)}$$

Нулевая 4D-мода локализована на бране.

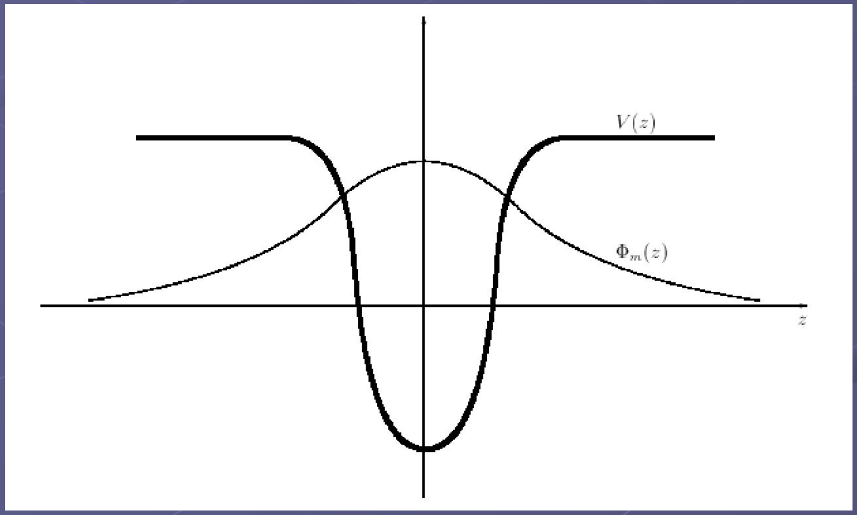
# Высшие КК-моды

$$m \approx \sqrt{\lambda^{(5)}}\,v$$

дискретный спектр, отделенный от нулевой моды щелью, моды все еще группируются вблизи браны, и подавлены степенным образом вдали от нее

$$m > m_{cont} = \sqrt{8\lambda^{(5)}}\,v$$

непрерывный спектр мод, нелокализованных вблизи браны, и уходящих вдоль дополнительного Измерения на бесконечность: $|y| \to \infty$



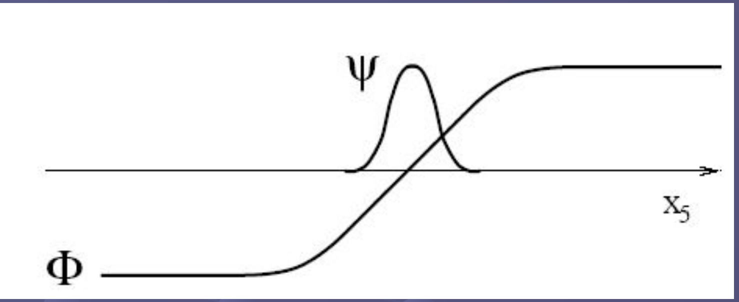

При энергиях выше фундаментального масштаба частицы могут уходить в дополнительные измерения:

сигналы с недостающей энергией

- пороговые эффекты $e^+e^- \longrightarrow E_{mis}$
- явное несохранение энергии в процессах взаимодействий ($e^+e^- \longrightarrow \gamma + E_{mis}$)

# Локализация фермионов на дефекте

$$S_\psi = \int d^4x\,\mathrm{dy}\,(\mathrm{i}\overline{\psi}\Gamma^A\partial_A\psi - \mathrm{h}\varphi\overline{\psi}\psi)$$




E.o.M. $i\Gamma^A\partial_A\psi - h\varphi_c(y)\psi = 0$

$$\Gamma^\mu \equiv \gamma^\mu\,,\quad \Gamma^5 = -i\gamma^5\,,\quad \{\Gamma^M,\Gamma^N\} = 2\eta^{MN}$$

Нулевая мода с m=0 $\quad i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_0 = 0$

$$i\Gamma^5\partial_5\psi_0 \equiv \gamma^5\partial_y\psi_0 = h\varphi_c(y)\psi_0$$

Существует единственное решение $\quad \gamma^5\psi_0 = \pm\psi_0$

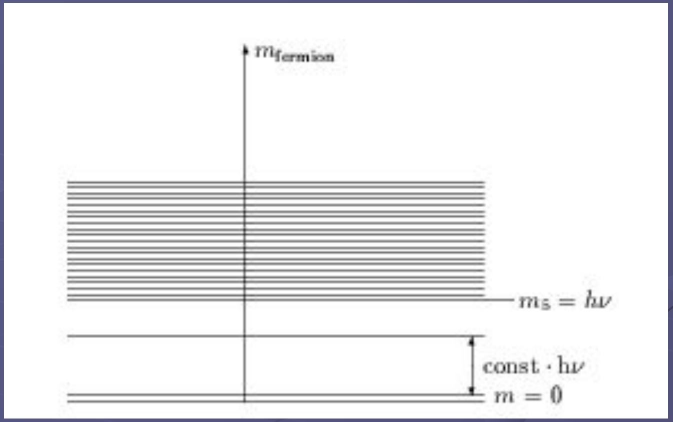
$$\psi_0 \propto e^{\pm\int_0^y h\varphi_c(y')dy'} \longrightarrow \gamma^5\psi_0 = -\psi_0$$

нормируемая мода

$$e^{\pm hv|y|}$$

# Спектр фермионных мод

$$\psi_0(x,y) = e^{-\int_0^y h\varphi_c(y')dy'}\psi_L(x)$$




Нулевая мода получилась локализованной и Киральной (теорема об индексе)

Чтобы получить несколько нулевых мод (3 поколения частиц СМ), надо увеличить число дополнительных измерений, и рассмотреть топологические дефекты высших размерностей:
N=2 – ANO вихрь
N=3 – монополь ‘т Хофта-Полякова

Количество локализованных нулевых мод равно топологическому числу дефекта

# Что насчет калибровочного поля?

Проблема, связанная с требованием зарядовой универсальности для взаимодействия разных заряженных полей материи с калибровочными бозонами

Пусть есть нулевая мода калибровочного бозона $A_0(y)$. Тогда взаимодействие с заряженными полями определяется интегралом от перекрытия функций профилей нулевых мод фермионов:

$$S_{eff}^{(4)} \propto \int dy \;\; \psi_0^{+} A_0(y) \psi_0(y)$$

Зависит от формы функций профилей – зарядовая неуниверсальность, разные выражения для разных нулевых мод. Очень плохо !

Как можно решить проблему?

1. Все нулевые фермионные моды имеют одинаковую форму – верно для модели с некоммутативнами солитонами (Рубаков)

2. $A^0$ = Const – не зависит от y. $\int dy \;\; \psi_0^{+} \psi_0(y) = 1$ несохранение заряда!

3. Вообще нет калибровочных полей в многомерном объеме – конфайнмент

# Пример: юкавская иерархия масс фермионов, смешивание поколений etc.

Три нулевые фермионные моды, локализованные на одном топологическом дефекте (6D-теория, космологическая струна), имеющие разные профили:

$$\psi_0^{(1)} = f^{(1)}(\rho) \leftarrow \text{1 поколение}$$

$$\psi_0^{(2)} = e^{i\theta} f^{(2)}(\rho) \leftarrow \text{2 поколение}$$

$$\psi_0^{(3)} = e^{i2\theta} f^{(3)}(\rho) \leftarrow \text{3 поколение}$$

1. Приблизительная симметрия вращений в перпендикулярных к бране направлениях (в доп. измерениях) обеспечивает малое смешивание между поколениями

2. Разные массы фермионов обеспечиваются разной радиальной формой профилей нулевых мод и разным перекрытием WF фермионов и хиггсовской нулевой моды, локализованной на дефекте

3. Слабые взаимодействия, несохраняющие лептонное и барионное число

$$\overline{\psi}^{(1)}\widetilde{W},\widetilde{Z}\psi^{(2)} \Leftrightarrow K_L \to \mu e$$

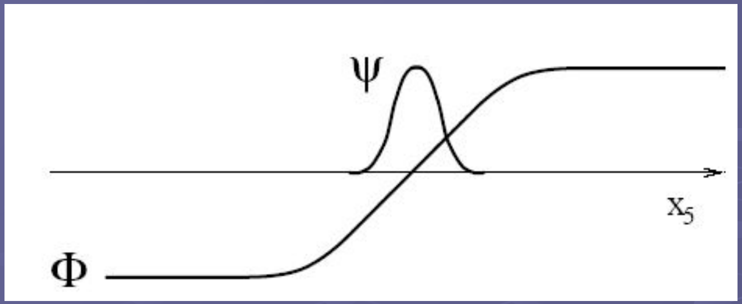
$$f^{(1)}(\rho) \quad e^{-i\theta}W(\rho) \quad e^{i\theta}f^{(2)}(\rho)$$

$$\widetilde{W},\widetilde{Z} \propto e^{-i\theta} f^2(\rho)$$

КК-моды *W,Z* – сохр. угл. мом.

# Локализация фермионов в фиксированных точках толстой браны

N.Arkani-Hamed, M.Schmaltz ’99




Локализуются только левые фермионы

вводим правые через зарядовое сопряжение

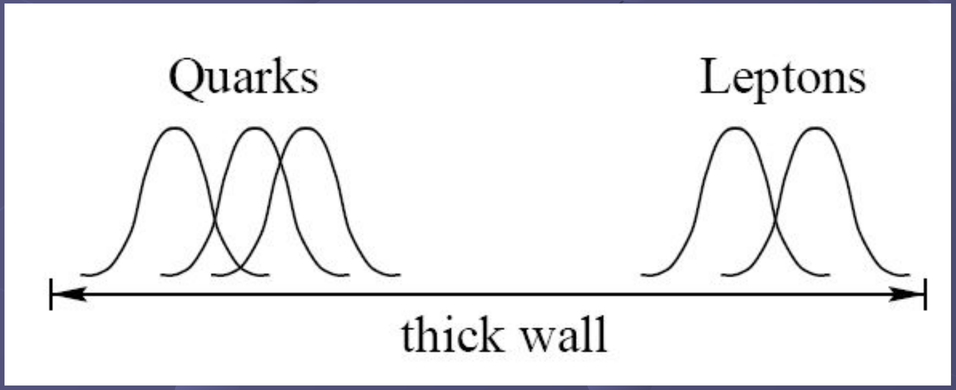
$$(Q, U^c, D^c, L, E^c) \qquad C_5 = \gamma^0\gamma^2\gamma^5 = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & -\varepsilon \end{pmatrix}$$

«Геометрическое» подавление нежелательных процессов, типа B- и L-нарушающих переходов (нет симметрии ароматов на малых расстояниях)

Подходяще малые юкавские константы связи в хиггсовском секторе без апеллирования к глобальным нарушенным симметриям

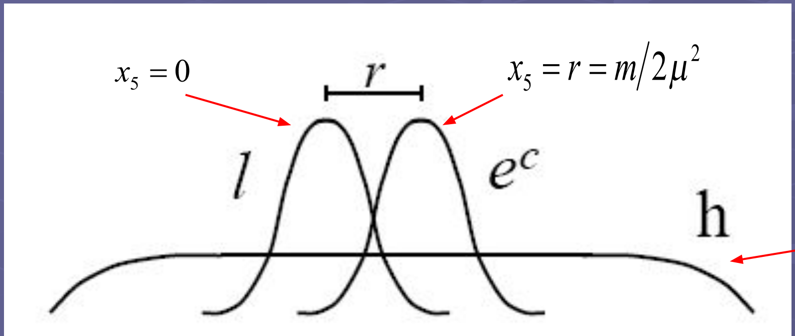
$$S = \int d^5x \sum_{i,j} \overline{\Psi}_i [i\partial_5 + \lambda\Phi(x_5) - m]_{ij} \Psi_j$$

- Взаимодействие и смешивание между поколениями определяется единственным параметром – расстоянием между точками локализации ароматов
- Стабилизация отн. распада протона !



Взаимодействие в хиггсовском секторе (правые фермионы представлены через зарядово-сопряженные левые компоненты):

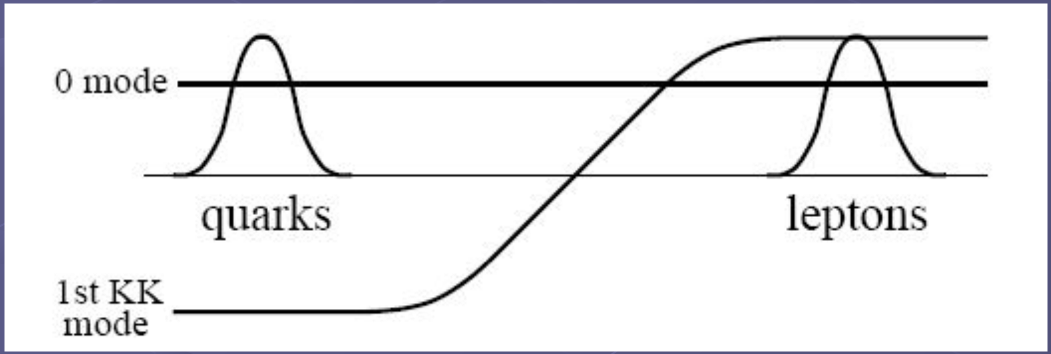
$$S=\int d^5x\,\overline{L}[\mathrm{i}\partial_5+\Phi(\mathrm{x}_5)]\,L+\overline{E}^c[i\partial_5+\Phi(x_5)-m]E^c+\kappa HL^T C_5 E^c$$




$$\propto e^{-\mu^2 r^2/2}$$

нулевая мода хиггса, распространяющаяся вдоль толстой браны (нелокализованная на расстоянии порядка толщины браны)

Взаимодействие с калибровочным сектором – зарядовая универсальность для нулевой моды GB и слабые нарушения на масштабе выше $\mu^2$




когда открываются дополнительные измерения