ТЕОРИЯ ПЕРЕДАЧИ ПО ОПТИЧЕСКИМ ВОЛОКНАМ

Физические процессы в волоконных световодах

Передача по волоконным световодам осуществляется в оптическом диапазоне волн f=10^{14} – 10^{15} Гц (λ=3 – 0,3мкм)

Диаметр сердцевины и оболочки

6 – 50 и 125 – 500 мкм.

Точное описание процесса распространения световых волн в волоконных световодах возможно лишь на основе уравнений электродинамики, т.е. методами волновой теории.

Основные положения лучевой оптики при распространении света в волоконных световодах

$$\varphi = \varphi_{отр} \qquad n_1 \cdot \sin\varphi = n_2 \cdot \sin\varphi_{пр}$$

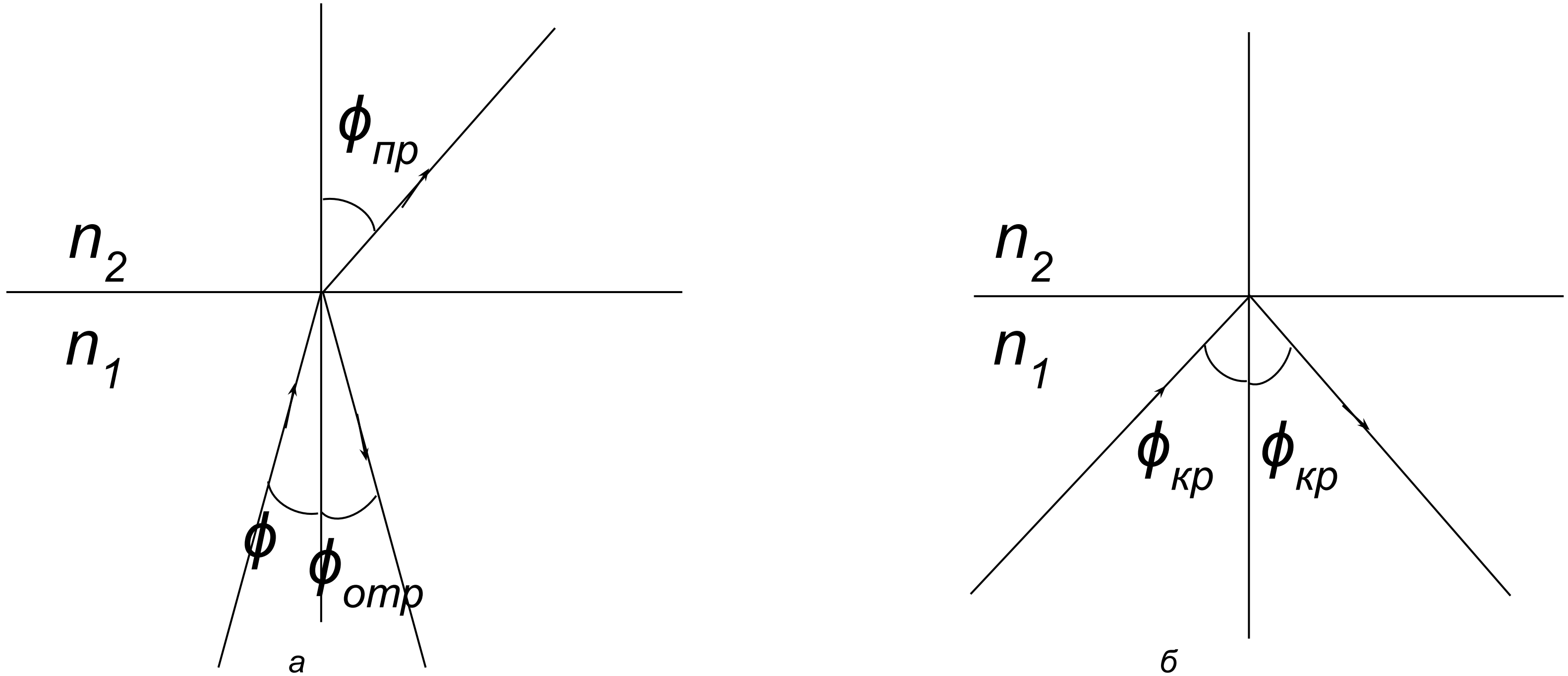


Рис. Падение плоской волны на границу двух сред при

$n_1 > n_2$

$$n_1 = \sqrt{\varepsilon_1} \qquad n_2 = \sqrt{\varepsilon_2}$$

$$\varphi_{кр} = \arcsin \frac{n_2}{n_1}$$

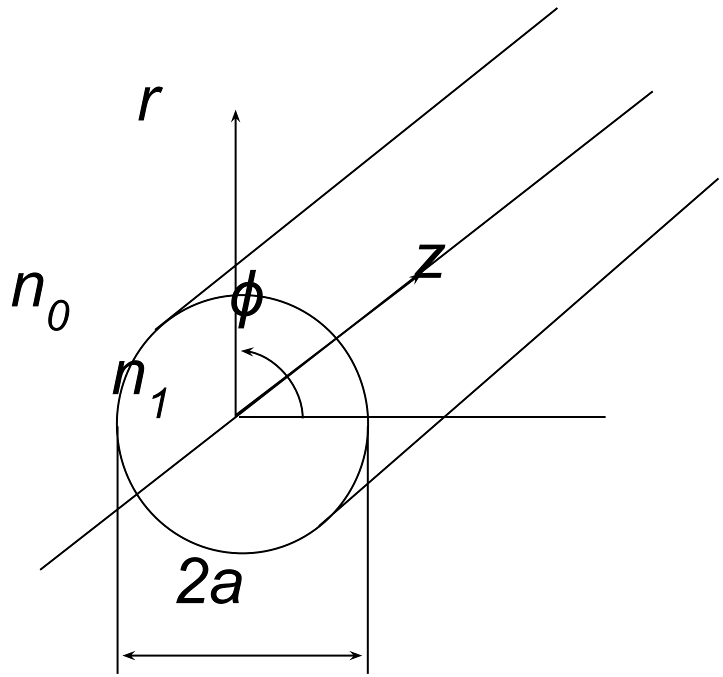
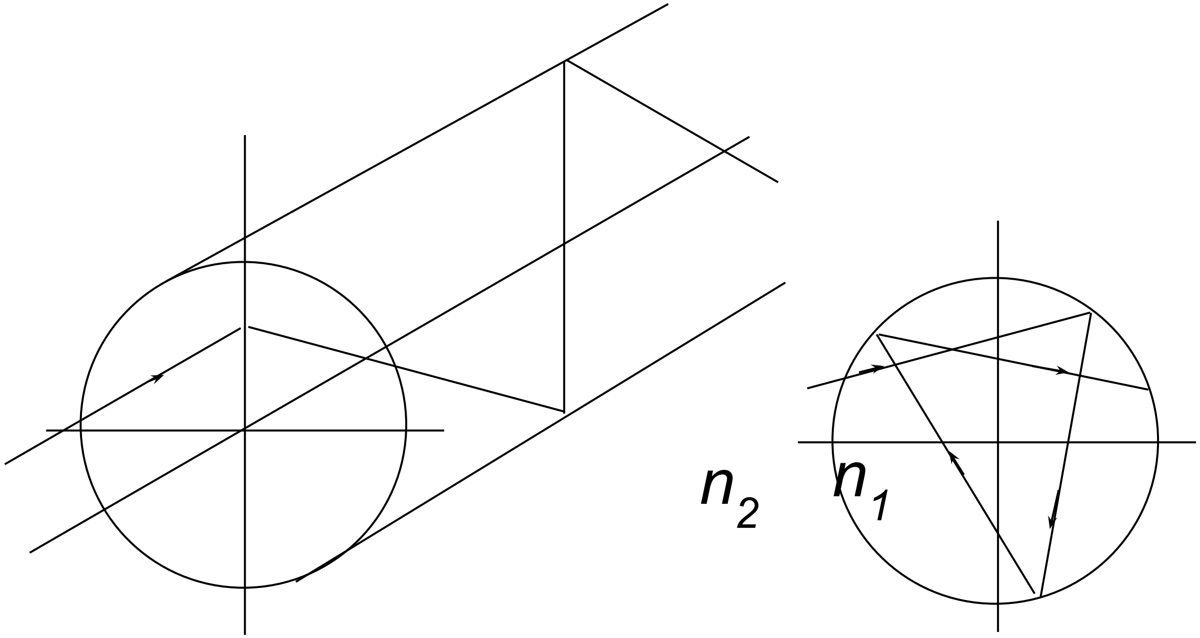


Рис. Двухслойная модель световода



$\phi > \phi_{кр}$

Рис. Прохождение косого луча в ступенчатом световоде

$$\delta = \frac{\lambda}{2\pi \cdot n_1 \sqrt{\sin^2 \varphi - \left({n_2}/{n_1} \right)^2}}$$

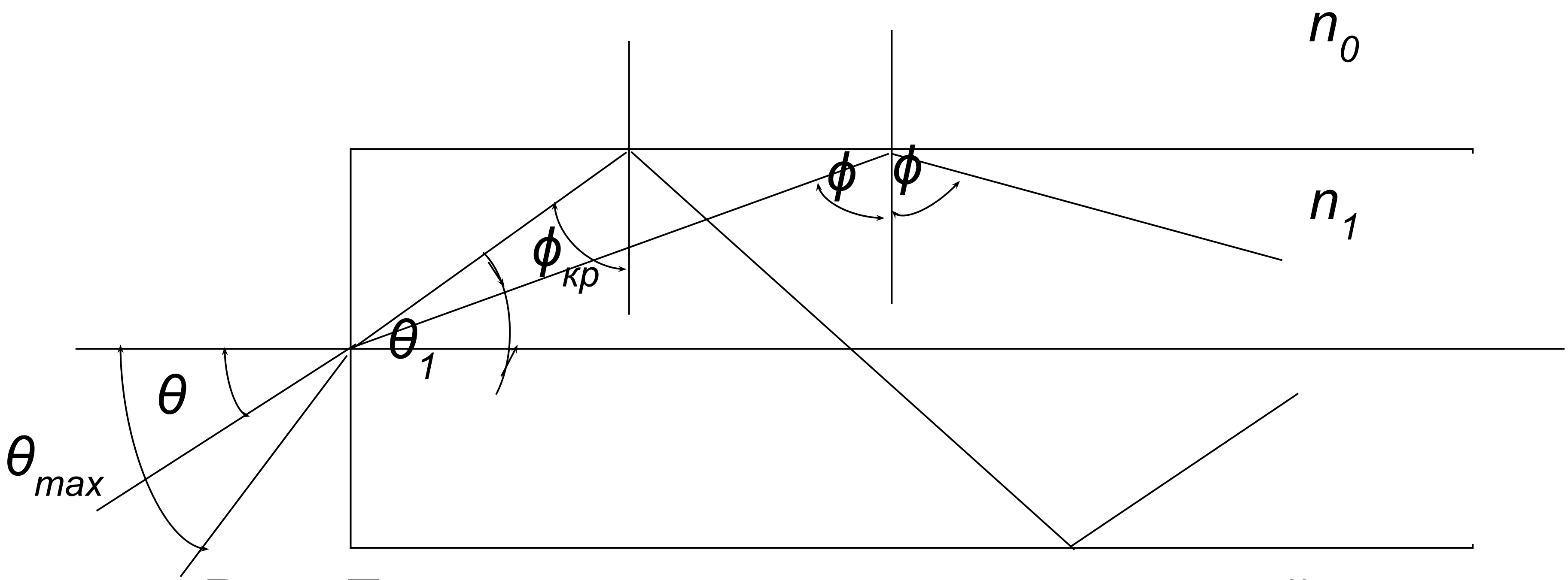


Рис. Прохождение меридиональных лучей по диэлектрическому стержню

$$n_0 \cdot \sin\theta = n_1 \cdot \sin\theta_1$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta_1 \qquad \sin\varphi = \cos\theta_1 \geq {}^{n_0}\!/_{n_1}$$

$$\cos\theta_1 = \sqrt{1 - \sin^2\theta_1} = \sqrt{1 - \left(\frac{n_0}{n_1}\right)^2 \sin^2\theta}$$

$$\sqrt{1-\left(\frac{n_0}{n_1}\right)^2 \sin^2\theta} \geq \frac{n_0}{n_1}$$

или

$$\left(\frac{n_1}{n_0}\right)^2 - \sin^2\theta \geq 1$$

$$\sin^2\theta \leq 1 \qquad \left(\frac{n_1}{n_0}\right)^2 \geq 2$$

$$\frac{n_1}{n_0} \geq \sqrt{2}$$

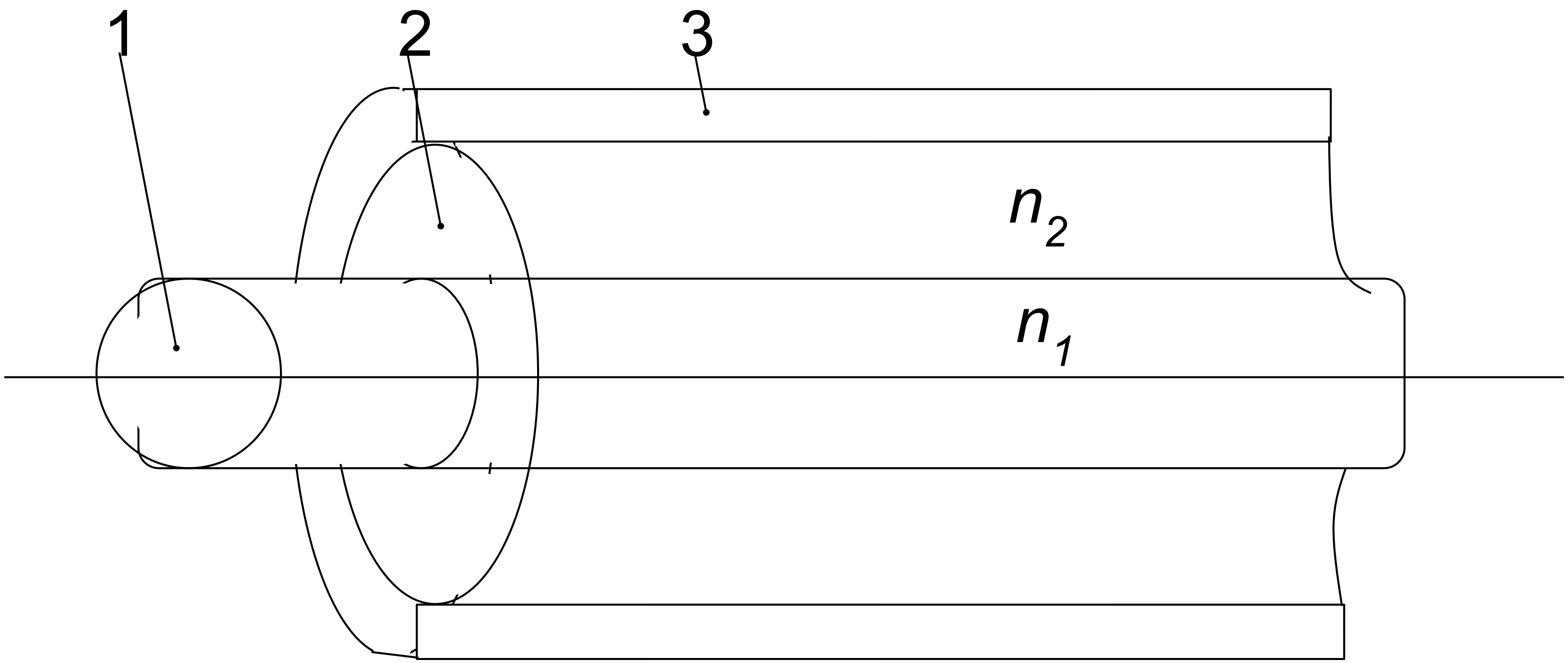


Рис. Оптическое волокно: 1 сердцевина; 2 оболочка; 3 защитное покрытие

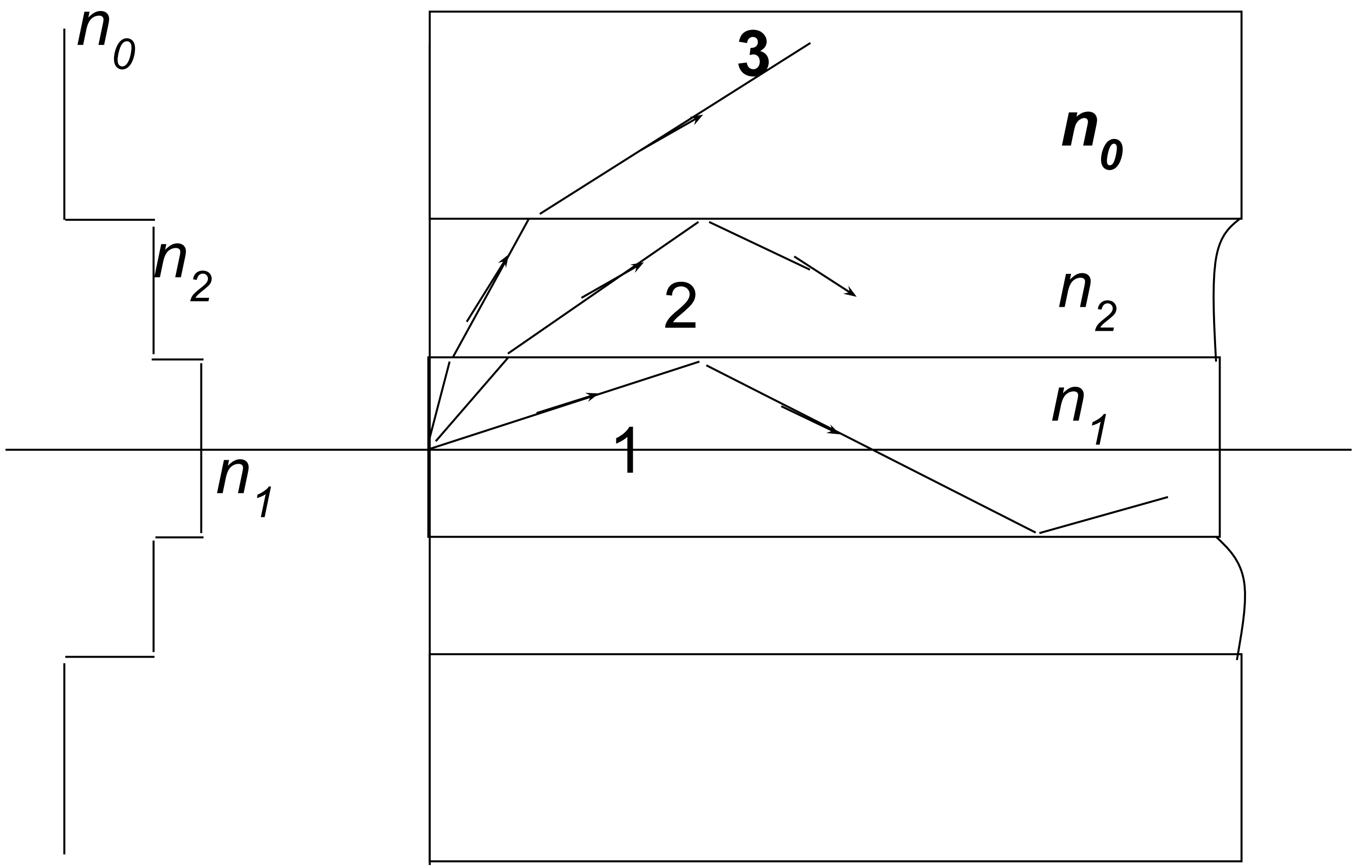


Рис. Распространение лучей в ступенчатом волоконном световоде. 1 мода сердцевины (направляемые моды); 2 моды оболочки; 3 моды излучения

$$\Delta = (n_1 - n_2)/n_1 = \Delta n/n_1$$

$\Delta n = 10^{-2} - 10^{-3}$

$$NA = n_0 \sin\theta_{\max}$$

$$NA = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \approx n_1\sqrt{2\Delta}$$

$$\Delta = \left(n_1 - n_2\right)/n_1 << 1$$

$$n_1 + n_2 \approx 2n_1$$

Основные положения волновой теории для ступенчатых волоконных световодов

Уравнения электромагнитного поля для ступенчатого световода

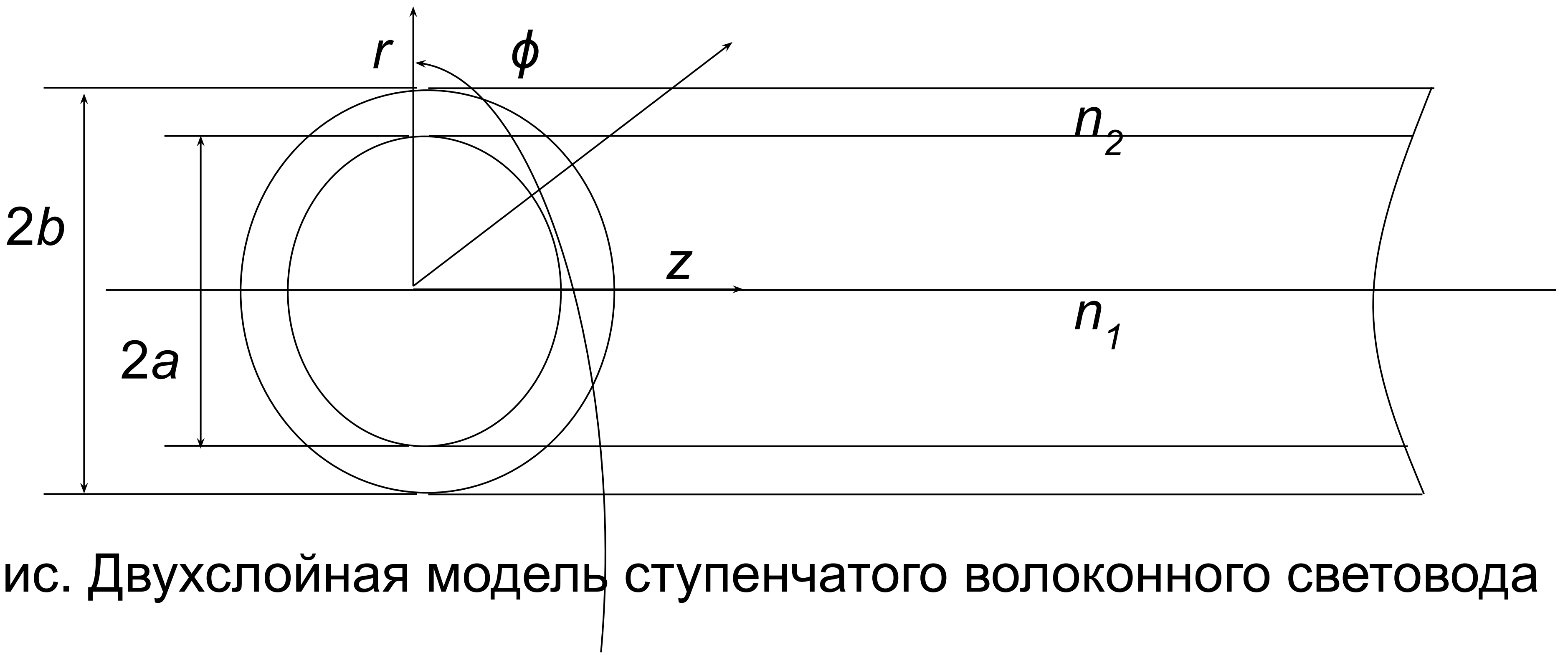


Рис. Двухслойная модель ступенчатого волоконного световода

$$rot\,\overline{H} = \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} \qquad rot\,\overline{E} = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t}$$

$$\overline{D} = \varepsilon_a \cdot \overline{E} \qquad \overline{B} = \mu_a \cdot \overline{H}$$

$$\varepsilon_a = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \qquad \mu_a = \mu_0 \cdot \mu$$

Для монохроматических гармонических полей, для которых

$$\overline{E} = \overline{E_m} \cdot e^{j\omega t}$$

$$rot\,\overline{H} = j\omega\varepsilon_a \cdot \overline{E}$$

$$rot\,\overline{E} = -j\omega\mu_a \cdot \overline{H}$$

Примем следующие условия

1. Считаем, что поле на внешней поверхности оптической оболочки пренебрежимо мало, т.е. можно считать, что оболочка в радиальном направлении простирается до бесконечности ($b \to \infty$). Это существенно упрощает решение задачи и позволяет получить результаты, которые могут быть использованы на практике для реальных световодов. Указанное допущение сводит задачу к рассмотрению модели световода, у которой сердцевина с n_1 радиуса a окружена средой (бесконечной оболочкой) с n_2

2. Известно, что на поверхности раздала двух диэлектрических сред с различными значениями *ε* граничные условия для векторов электромагнитного поля имеют следующий вид:

$$E_{1t} = E_{2t} \qquad H_{1t} = H_{2t}$$

$$D_{1n} = D_{2n} \qquad B_{1n} = B_{2n}$$

3. При анализе решений поставленной задачи следует иметь в виду, что функции, описывающие поведение поля в сердцевине и оболочке, исходя из физической сущности процесса, должны иметь разный характер. Функции для сердцевины ($0<r<a$) должны быть конечными по величине, а для оболочки ($r>a$) долины описывать спадающее в радиальном направлении поле.

4. Принимаем цилиндрическую систему координат *r*, *ϕ*, *z*, причем ось *z* совмещаем с осью световода. Распространяющиеся вдоль оси *z* световода моды, удовлетворяющие уравнениям (1.11), представляются обычно в виде изменяющихся по оси *z* функций

$$\overline{E}(r,\varphi,z) = \overline{E}(r,\varphi) \cdot e^{-\gamma z}$$

$$\overline{H}(r,\varphi,z) = \overline{H}(r,\varphi) \cdot e^{-\gamma z}$$

Определение составляющих электромагнитного поля. Дисперсионное уравнение

уравнение Максвелла в цилиндрической системе координат

$$\left.\begin{aligned}
E_r &= -\frac{j}{g_1^2}\left(\beta\frac{\partial E_z}{\partial r} + \omega\mu_0\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial \varphi}\right)\\
E_\varphi &= -\frac{j}{g_1^2}\left(\beta\frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \omega\mu_0\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial r}\right)\\
H_r &= -\frac{j}{g_1^2}\left(-\omega\varepsilon_a\frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial \varphi} + \beta\frac{\partial H_z}{\partial r}\right)\\
H_\varphi &= -\frac{j}{g_1^2}\left(\omega\varepsilon_a\frac{\partial E_z}{\partial r} + \beta\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial \varphi}\right)
\end{aligned}\right\}$$

$$g_1^2 = \omega^2 \varepsilon_a \mu_0 - \beta^2 = n_1^2 k_0^2 - \beta^2 = k_1^2 - \beta^2$$

g_1 – поперечная составляющая волнового числа в сердцевине; β – коэффициент распространения в световоде; k_1 – волновое число сердцевины световода показателем преломления n_1

$$k_0 = \omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$$ волновое число вакуума.

$$k_1 = \omega\sqrt{\mu_{a1}\varepsilon_{a1}} = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\sqrt{\mu_1\varepsilon_1} = k_0\sqrt{\varepsilon_1} = k_0 n_1$$

$$1\Big/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = C_0$$

$$C_0 = \lambda \cdot f$$

$$k_1 = k_0 n_1 = n_1 \cdot \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = \frac{n_1 \cdot \omega}{C_0} = \frac{2\pi \cdot f \cdot n_1}{C_0} = \frac{2\pi \cdot n_1}{\lambda}$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} + g_1^2 E_z = 0$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 H_z}{\partial \varphi^2} + g_1^2 H_z = 0$$

для сердцевины

$$\left.\begin{aligned} E_z &= A_n J_n(g_1 r) e^{jn\varphi} e^{-\beta z} \\ H_z &= B_n J_n(g_1 r) e^{jn\varphi} e^{-\beta z} \end{aligned}\right\}$$

$$g_1 = \sqrt{n_1^2 k_0^2 - \beta^2} = \sqrt{k_1^2 - \beta^2} > 0$$

Для оболочки

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} + g_1^2 E_z = 0$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 H_z}{\partial \varphi^2} + g_1^2 H_z = 0$$

поперечная составляющая волнового числа в оболочке световода

$$g_2 = \sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_2^2} = \sqrt{\beta^2 - k_1^2}$$

$$k_2 = k_0 n_2 = n_2 \cdot \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = \frac{2\pi \cdot n_2}{\lambda}$$

$$\left.\begin{aligned} E_z &= C_n H_n^{(l)}(jg_2 r)e^{jn\varphi}e^{-\beta z} \\ H_z &= D_n H_n^{(l)}(jg_2 r)e^{jn\varphi}e^{-\beta z} \end{aligned}\right\}$$

$$g_2 = \sqrt{\beta^2 - n_2^2 k_0^2} > 0$$

$$\left.\begin{aligned} E_{z1}(a) &= E_{z2}(a);\ \ E_{\varphi 1}(a) = E_{\varphi 2}(a) \\ H_{z1}(a) &= H_{z2}(a);\ \ H_{\varphi 1}(a) = H_{\varphi 2}(a) \end{aligned}\right\}$$

для коэффициента распространения β, которое носит название дисперсионного уравнения

$$\left[\frac{1}{g_1}\frac{J_n^{/}(g_1 a)}{J_n(g_1 a)} - \frac{j}{g_2}\frac{H_n^{(/)/}(jg_2 a)}{H_2^{(/)/}(jg_2 a)}\right]\cdot\left[\frac{\omega^2\varepsilon_{a1}J_n^{/}(g_1 a)}{g_1 J_n(g_1 a)} + \frac{j\omega^2\varepsilon_{a2}H_n^{(/)/}(jg_2 a)}{g_2 H_n^{(/)}(jg_2 a)}\right] =$$

$$= n^2\beta^2\left(\frac{1}{g_1^2 a} + \frac{1}{g_2^2 a}\right)$$

Характеристики распространения и типы направляемых волн

Для симметричных волн

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{g_1 a}\frac{J_1(g_1 a)}{J_0(g_1 a)} = -\frac{1}{jg_2 a}\frac{H_1^{(1)}(jg_2 a)}{H_0^{(1)}(jg_2 a)} \quad \text{для волн } Hom \\
&\frac{n_1^2}{g_1 a}\frac{J_1(g_1 a)}{J_0(g_1 a)} = -\frac{n_2^2}{jg_2 a}\frac{H_1^{(1)}(jg_2 a)}{H_0^{(1)}(jg_2 a)} \quad \text{для волн } Eom
\end{aligned}\right\}$$

Для несимметричных дипольных волн

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{g_1 a}\frac{J_{n-1}(g_1 a)}{J_n(g_1 a)} = -\frac{1}{g_2 a}\frac{H^{(/)}_{n-1}(jg_2 a)}{H^{(/)}_n(jg_2 a)} \quad \textit{для волн } HEnm \\
&\frac{1}{g_1 a}\frac{J_{n+1}(g_1 a)}{J_n(g_1 a)} = \frac{1}{g_2 a}\frac{H^{(/)}_{n+1}(jg_2 a)}{H^{(/)}_n(jg_2 a)} \quad \textit{для волн } EHnm
\end{aligned}\right\}$$

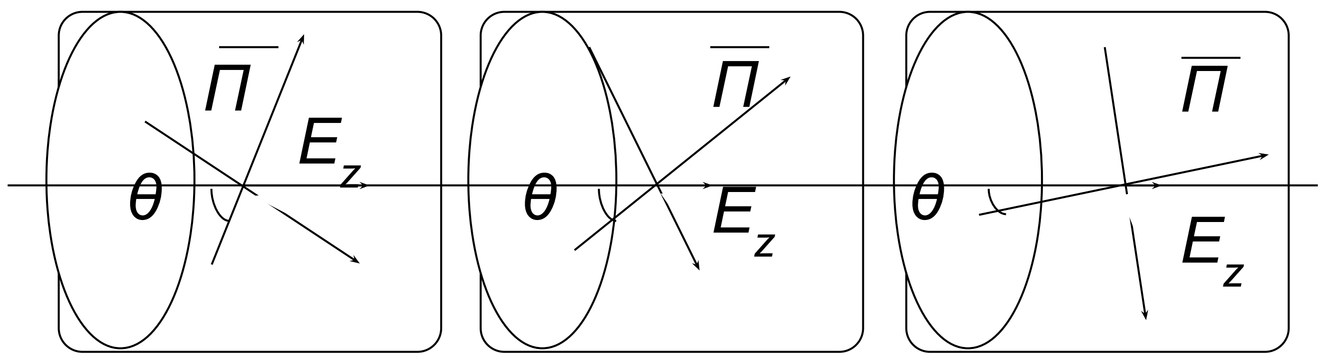


Рис.Уменьшение продольной составляющей E_z с уменьшением угла наклона вектора направления распространения волны к оси световода

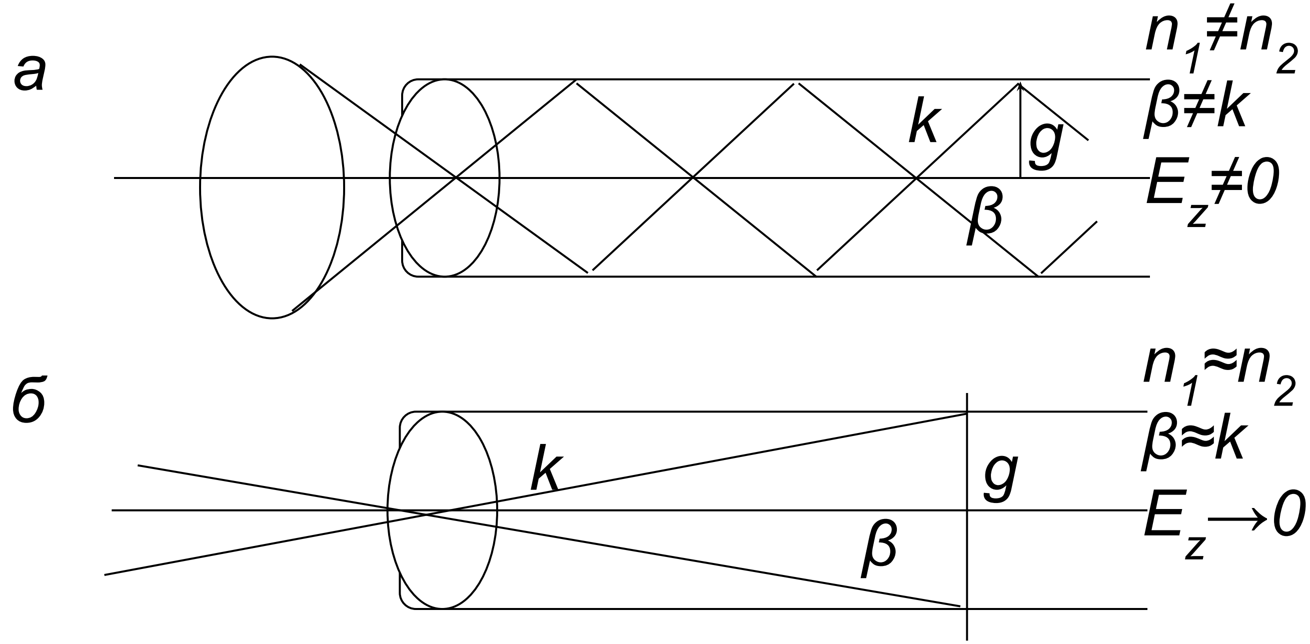


Рис. Составляющие волны в общем случае (а) и линейно-поляризованной (*LP*) волны (б)

Характеристическое уравнение для LP мод имеет весьма простую форму

$$g_1 \frac{J_{\substack{n+1 \\ n-1}}(g_1 a)}{J_n(g_1 a)} = \square\, g_2 \frac{K_{\substack{n+1 \\ n-1}}(g_2 a)}{K_n(g_2 a)}$$

Для одномодовой системы, которая работает на гибридной волне HE_{11}, получаем

$$g_1 \frac{J_1(g_1 a)}{J_0(g_1 a)} = g_2 \frac{K_1(g_2 a)}{K_0(g_2 a)}$$

Коэффициент распространения может быть рассчитан по формуле

$$\beta = \frac{\omega \cdot n_1}{C_0}\sqrt{1-\left(\frac{f_0}{f}\right)^2 \cdot \left(1-\frac{n_2^2}{n_1^2}\right)}$$

В предельных случаях при критической частоте (f_0) и больших расчётных частотах имеем

$$\beta = \frac{\omega \cdot n_2}{C_0} = k_0 \cdot n_2 = k_2 \ \textit{при} \ f = f_0$$

$$\beta = \frac{\omega \cdot n_1}{C_0} = k_0 \cdot n_1 = k_1 \ \textit{при} \ f \to \infty$$

$$g_1^2 + g_2^2 = k_1^2 - k_2^2$$

$$g_1^2 + g_2^2 = k_0^2\left(n_1^2 - n_2^2\right)$$

определим критическую частоту световода:

$$f_0 = \frac{g_1 C_0}{2\pi\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}$$

$$f_0 = \frac{g_1 \cdot a \cdot C_0}{\pi \cdot d \sqrt{n_1^2 - n_2^2}}$$

критическая длина волны

$$\lambda_0 = \frac{C_0}{f_0} = \frac{\pi \cdot d}{g_1 \cdot a} \cdot \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

Значение корней Бесселевых функций P_{nm} $g_1a=V_0$

n	m			Типы волн
	1	2	3	
0	2,405	5,520	8,654	E_{om}, H_{om}
1	0,000	3,832	7,016	HE_{11}
1	3,832	7,016	10,173	EH_{1m}
2	2,405	5,538	8,665	HE_{2m}
2	5,136	8,417	11,620	EH_{2m}

нормированная частота

$$V = \frac{2\pi \cdot a}{\lambda} \cdot \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

Значения нормированной частоты и тип соответствующей моды

V	Моды	V	Моды
0 – 2,405	HE_{11}	5,520 – 6,380	H_{02}, E_{02}, HE_{22}
2,405 – 3,832	H_{01}, E_{01}, HE_{21}	6,380 – 7,016	EH_{31}, HE_{51}
3,832 – 5,136	HE_{12}, EH_{11}, HE_{31}	7,016 – 7,588	HE_{13}, EH_{12}, HE_{32}
5,136 – 5,520	EH_{21}, HE_{41}	7,588 – 8,417	EH_{41}, HE_{31}

При значении $g_1 a$=2,405 критическая частота использования одномодового волокна

$$f_0 = \frac{2{,}405}{2\pi \cdot a \cdot \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 \cdot \left(n_1^2 - n_2^2\right)}}$$

Число типов волн в световоде зависит от диаметра сердцевины $d=2a$ и длины волны λ и определяется по выражению:

$$N = \frac{V^2}{2\left(1 + \frac{2}{u}\right)}$$

$$n_r = n_0 \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot \Delta \cdot \left(\frac{r}{a}\right)^u}$$

Обычно

$$\Delta = \frac{n_1 - n_2}{2n_1} \approx \frac{n_1 - n_2}{n_1}$$

и лежит в пределах Δ=0,003 – 0,01

Для градиентного световода, имеющего параболический профиль показателя преломления u=2 получается

$$n_r = n_0 \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot \Delta \cdot \left(\frac{r}{a}\right)^2}$$

Для ступенчатого профиля показателя преломления показатель степени $u \to \infty$, т.е. получается известное выражение

$$n_2 = n_1 (1 - \Delta)$$

число мод для ступенчатого волокна

$$N = \frac{1}{2}V^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi \cdot a}{\lambda}\sqrt{n_1^2 - n_2^2}\right)^2$$

для градиентного

$$N = \frac{1}{4}V^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{2\pi \cdot a}{\lambda}\sqrt{n_1^2 - n_2^2}\right)^2$$

Фазовая и групповая скорости. Волновое сопротивление

$$V_{\phi} = \frac{\omega}{\beta}$$

$$k_2 = \omega\sqrt{\mu_{a2}\varepsilon_{a2}}$$

$$V_2 = \frac{1}{\sqrt{\mu_{a2}\varepsilon_{a2}}}$$

$$V\phi = \frac{V_2 k_2}{\beta}$$

$$V_{\phi} = C_0 \sqrt{\frac{g_1^2 + g_2^2}{g_1^2 n_2^2 + g_2^2 n_1^2}}$$

$$V_{\phi} = {C_0}/{n_2} = V_2$$

$$V_{\phi} = {C_0}/{n_1} = V_1$$

$$\frac{C_0}{n_1} \leq V_{ф} \leq \frac{C_0}{n_2}$$

Групповая скорость распространения по световоду определяется выражением

$$V_{гр} = \frac{C_0}{n + \omega \dfrac{dn}{d\omega}}$$

Волновое сопротивление световода

$$Z_B = \frac{E_r}{H_\varphi} \qquad Z_B = \frac{E_\varphi}{H_r}$$

предельное значения волнового сопротивления сердцевины

$$Z_{B1} = Z_0 / n_1$$

$$Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0} = 376{,}7$$

оболочки $$Z_{B2} = Z_0 / n_2$$

В реальных условиях волновое сопротивление световода имеет промежуточное значение

$$Z_0/n_1 < Z_B < Z_0/n_2$$

численно составляет примерно 250 – 260 Ом