

# Математическое и компьютерное моделирование

**Шориков Андрей Фёдорович,**

профессор, доктор физ.-мат. наук

Институт математики и механики УрО РАН,

Уральский государственный экономический университет

Екатеринбург

2009

## 1. О линейных алгебраических структурах

Значительная часть истории развития естественных наук *представляет собой летопись непрерывного стремления человечества к обобщению понятий, которые позволили бы представить действительной мир в математических терминах.* В истории развития социальных наук (особенно экономических) в последнее время также наблюдаются определенные попытки выдвижения количественно обоснованных теорий, использующих математические методы. Чтобы иллюстрировать математически некоторые законы действительного мира, необходимо создать соответствующие математические модели относительно одной или большего числа рассматриваемых параметров (переменных).

Целью такой модели может быть, например, наилучшее распределение имеющегося объема финансовых средств банка среди нескольких объектов инвестирования, приносящих разную доходность, с целью получения наибольшей суммарной прибыли, или наилучшая организация грузоперевозок транспортной фирмой внутри города, с целью обеспечения наименьшего пробега машин порожняком и выполнения всех заявок клиентов в срок и в полном объеме.

Следует отметить, что сформированная математическая модель для конкретного рассматриваемого процесса или объекта может быть достаточно сложной для ее математического анализа и тогда необходимы более упрощенные ее модификации. Причем, в некоторых случаях такие упрощенные модели могут с достаточно высокой степенью точности соответствовать описываемому процессу или объекту. В других случаях доступные нам математические модели могут давать значения решений, отличающиеся более чем на 100% от результатов действительных физических измерений.

Таким образом, фактически, мы ожидаем, что **сформи-рованная математическая модель будет служить для следующих основных целей: количественной оценки вы-бранных параметров для рассматриваемого процесса или объекта; предсказанию изменения их значений в будущем, т.е. для прогнозирования; влиянию на изменение значений выбранных показателей оценки качества рассматрива-емых процессов или объектов, т.е. управления ими. При этом точность, требуемая от такой модели, опреде-ляется конечной целью, для которой она создавалась.**

**Линейность** для различных математических структур представляет собой весьма общее понятие: существуют линейные алгебраические уравнения, линейные обыкновенные дифференциальные уравнения, т.е. уравнения относительно производных функций от выбранных переменных и т.д.

Все линейные модели обладают свойствами **аддитивности и однородности**.

С математической точки зрения, **линейные** модели имеют серьезные преимущества перед всеми остальными – **нелинейными** моделями. При этом, в случае нелинейных систем при применении математических методов почти всегда возникают трудности при их аналитическом (формульном) изучении и часто возникают потребности в применении компьютеров даже при решении простейших задач поставленных в рамках этих моделей, т. е. требуется разработка сложных численных (приближенных) методов и алгоритмов для решения задач, сформулированных в рамках таких моделей.

При этом во многих случаях даже мощные компьютеры оказываются бесполезными для исследования таких систем. С другой стороны, часто значительно легче работать с линейными моделями и получать аналитические и численные решения, представляющие интерес для рассматриваемых практических задач.



Оба эти фактора – **доступность для исследования и достаточная точность приближения к действительному миру** – делают линейные модели наиболее широко применимым математическим аппаратом в естественных и социальных науках. Причем существуют математические методы, позволяющие при математическом моделировании рассматривать только наиболее значимые для рассматриваемого процесса параметры и использовать только линейные математические структуры, которые являются достаточно адекватными рассматриваемым процессам и позволяют получать приемлемые для практики результаты решения соответствующих конкретных практических задач.

При этом, под **адекватностью математической модели** исходному процессу понимают такую **соответствующую ему математическую модель, что решение чисто математических задач, сформированных в рамках этой модели, позволяет получать приемлемые количественные результаты для конкретных практических задач, связанных с данным процессом.**

Тогда возникает вопрос: **«Что понимается под линейной операцией и чем она характеризуется?».**

**Можно дать следующее формальное определение понятия линейной операции.**

1. Пусть  $X$  – заданное множество элементов  $x$  произвольной природы, т.е.  $x \in X$ , в котором определена операция сложения его элементов, а именно:

1.1) для любой пары элементов  $(x_1, x_2)$ ,  $x_1 \in X, x_2 \in X$  определен элемент  $x \in X$  называемый их суммой, т.е. такой, что  $x_1 + x_2 = x \in X$ ;

1.2) для любого элемента  $x \in X$  и любого действительного числа  $\lambda \in \mathbb{R}^1$  (где  $\mathbb{R}^1$  есть множество всех действительных чисел) определена операция умножения элементов на действительное число, т.е. данному элементу  $x$  и числу  $\lambda$  ставится в соответствие элемент  $\tilde{x} \in X$ , называемый их произведением, т.е. такой, что  $\lambda x = x\lambda = \tilde{x} \in X$ .

2. Пусть  $Y$  – заданное множество элементов  $y$  произвольной природы, т.е.  $y \in Y$ , в котором, аналогично множеству  $X$  определена операция сложения его элементов, а именно:

2.1) для любой пары элементов  $(y_1, y_2)$ ,  $y_1 \in Y, y_2 \in Y$  определен элемент  $y \in Y$  называемый их суммой, т.е. такой, что  $y_1 + y_2 = y \in Y$ ;

2.2) для любого элемента  $y \in Y$  и любого действительного числа  $\lambda \in \mathbb{R}^1$  определена операция умножения элементов на действительное число, т.е. данному элементу  $y$  и числу  $\lambda$  ставится в соответствие элемент  $\tilde{y} \in Y$ , называемый их произведением, т.е. такой, что  $\lambda y = y \lambda = \tilde{y} \in Y$ .

Тогда операция  $\varphi$ , определенная на элементах  $x$  из множества  $X_\varphi$  ( $x \in X_\varphi \subseteq X$ ), которое является подмножеством (частью) введенного множества  $X$ , со значениями  $\varphi(x) = y \in Y_\varphi \subseteq Y$  является **линейной операцией** если для нее выполняются следующие два свойства:

1) **аддитивности**, т.е. для пары элементов  $(x_1, x_2)$ ,  $x_1 \in X_\varphi, x_2 \in X_\varphi$ , таких, что  $x_1 \xrightarrow{\varphi} y_1 \in Y_\varphi$  ( $y_1 = \varphi(x_1)$ ),  $x_2 \xrightarrow{\varphi} y_2 \in Y_\varphi$  ( $y_2 = \varphi(x_2)$ ), выполняется равенство

$$(x_1 + x_2) \xrightarrow{\varphi} (y_1 + y_2) = y \in Y_\varphi$$

или

$$\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2) = y_1 + y_2 = y,$$

т.е. результат применения операции  $\varphi$  над суммой элементов равен сумме результатов применения этой операции над этими элементами;

**2) однородности**, т.е. для любого элемента  $x \in X_\varphi$  такого, что  $x \xrightarrow{\varphi} y \in Y_\varphi$  ( $y = \varphi(x)$ ), и любого действительного числа  $\lambda \in \mathbf{R}^1$ ,  $\lambda x = x\lambda = \tilde{x} \in X_\varphi$ ,  $\lambda y = y\lambda = \tilde{y} \in Y_\varphi$ , справедливо следующее равенство

$$\lambda x = x\lambda \xrightarrow{\varphi} \lambda y = y\lambda = \tilde{y} \in Y_\varphi$$

или

$$\varphi(\lambda x) = \varphi(x\lambda) = \lambda\varphi(x) = \varphi(x)\lambda = \tilde{y},$$

т.е. результат применения операции  $\varphi$  над произведением действительного числа на элемент равен произведению этого числа на результат применения этой операции над элементом.

Отметим, что только операции, которые **удовлетворяют условиям аддитивности и однородности** (для множеств произвольной природы) называются **линейными операциями**, а все остальные операции называются **нелинейными операциями**.

Можно сказать, что алгебраические структуры, порожденные линейными операциями над множествами элементов, в которых определены операции сложения элементов и умножения их на действительное число, называются **линейными алгебраическими структурами**.

**Предметом для линейных алгебраических структур** является изучение таких элементов, как вектора, матрицы, определители, линейные алгебраические уравнения и др., изучение связанных с ними свойств и свойств порожденных ими структур (например, систем линейных алгебраических уравнений, систем линейных алгебраических неравенств, линейных пространств и др.), а также изучение связанных с ними математических задач и методов их решения.

*Основными задачами для линейных алгебраических структур*

являются следующие:

- 1) изучения свойств линейных алгебраических структур;*
- 2) выяснения существования решений задач, порожденных линейными алгебраическими структурами;*
- 3) в случае существования решений таких задач, разработка методов нахождения их решений;*
- 4) разработка и изучение алгоритмов для реализации нахождения решений таких задач, например, на компьютере и др.*



Следует также отметить, что разработанный аппарат для линейных алгебраических структур, т.е. элементы рассматриваемых в ней структур и порожденные ими объекты и свойства, имеют широкое и важное применение в математическом моделировании, также при разработке и реализации различных алгоритмов для решения задач в различных математических моделях, т.е. в моделировании и решении конкретных прикладных, в том числе и экономических задач, например, на компьютерах.

## 2. Методология математического и компьютерного моделирования

Существуют различные подходы и принципы экономико-математического и компьютерного моделирования функционирования сложных экономических систем (объектов) и ниже **предлагается один из таких возможных подходов.**

Введем в рассмотрение следующее основное определение.

Под **общей многоуровневой иерархической динамической экономической системой** (объектом исследования), управляемой основным субъектом управления, будем понимать совокупность ее внутренних частей (подсистем), состоящих из соответствующих им объектов и элементов, в которых рассматриваются процессы, управляемые соответствующими субъектами управления, имеющими собственные сферы интересов в условиях иерархической подчиненности основному субъекту управления, функционирующую в конкретной среде при наличии неопределенности, которую в целом можно различать среди других систем и в своем составе она имеет:

- 1) **входные информационные устройства и средства (устройства ввода данных)**, сопряженные с ее объектами или элементами;
- 2) **устройства и средства для хранения данных (запоминающие устройства)**, сопряженные с ее объектами или элементами;
- 3) **устройства и средства, позволяющие реализовать математические, логические и иные операции для анализа и обработки данных**, сопряженные с ее объектами или элементами;
- 4) **выходные информационные устройства и средства (устройства вывода данных)**, сопряженные с ее объектами или элементами;

- 5) **устройства и средства для реализации управляющих связей** между ее объектами или элементами;
- 6) **устройства и средства для реализации информа-ционных связей** между ее объектами или элементами;
- 7) **устройства и средства, позволяющие реализовать выбранные системы кодирования и декодирования дан-ных** (например, в двоичной системе счисления), сопря-женные с ее объектами или элементами.

Тогда **основные этапы математического и компьютерного моделирования различных задач проектирования и организационного управления в сложных многоуровневых иерархических динамических экономических системах, функционирующих в условиях неопределенности,** можно представить в виде реализации следующей последовательности основных этапов.

1. В рассматриваемой системе выделяется **основной субъект управления** рассматриваемыми в ней процессами, **контролирующий основной уровень управления**, и выделяются ее части (подсистемы) – **другие (подчиненные) уровни управления**, которые могут находиться **в сфере интересов других (подчиненных) управляющих субъек-тов (если таковые присутствуют)**, находящиеся **в условиях иерархической подчиненности основному субъекту управления.**

2. В рассматриваемой системе и ее подсистемах **выделяются наиболее значимые** для их исследования соответствующие им **параметры состояния**, характеризующие исследуемые в системе процессы в фиксированный момент времени (если рассматривается динамический процесс, как наиболее общий) **и соответствующие им ограничения.**



3. **Выделяются параметры управления процессами в системе в целом и подсистемах,** которые могут изменяться по ходу реализации конкретного процесса в зависимости (по желанию и возможностям) от выбора соответствующего управляющего субъекта **и соответствующие им ограничения** (физической реализуемости, технические, экономические и др.).

4. **Выделяются неуправляемые параметры для рассматриваемых в системе в целом и подсистемах процессов** (неконтролируемые конкретным управляющим субъектом, или учитывающие влияние конкретной внешней среды или описывающие погрешности моделирования процессов), которые изменяются вне зависимости от желания и возможностей конкретного управляющего субъекта **и соответствующие им ограничения.**

5. Для каждой из подсистем и для системы в целом **определяются параметры процессов, характеризующие их структуру и внутренние связи** между объектами или элементами системы.
6. **Формируются условия информационного обеспечения для каждого из управляющих субъектов,** которым подчиняются соответствующие уровни управления, **информационные и управляющие связи между ними и условия иерархической подчиненности** при принятии управленческих решений субъектами управления, а также **соответствующие им ограничения.**

7. Для каждой из подсистем рассматриваемой системы формируются критерии (в частном случае – один критерий), позволяющие оценивать качество функционирования этой подсистемы и формируются также соответствующие критерии (или критерий), которые позволяют оценивать качество функционирования исследуемой системы в целом.

8. *Для каждой подсистемы*, на основании выбранных соответствующих критериев качества функционирования соответствующих ей процессов, *формируются цели*, достижение которых является наилучшим или приемлемым для соответствующего управляющего субъекта, и аналогично *формируются соответствующие цели и для субъекта, управляющего рассматриваемыми процессами в системе в целом*, которые в совокупности соответствуют сформированным критериям качества для рассматриваемых процессов.

9. На основании предыдущих этапов **определяется математический и технический инструментарий моделирования и формируются математические модели** для каждой из подсистем и рассматриваемой системы в целом, учитывающие соответствующие им процессы, которые **в какой-то мере адекватны реальным процессам и позволяют анализировать и исследовать их имеющимися средствами и в приемлемое время.**

10. Для сформированных задач **разрабатываются математические методы их решения в форме реализации соответствующих последовательностей логических, математических и иных операций.**
11. В математических моделях процессов, исследуемых в подсистемах и рассматриваемой системе в целом, **формируются математические задачи, соответствующие набору имеющихся реальных задач и процессов.**

12. Для каждого из математических методов решения задач **разрабатываются соответствующие им численные алгоритмы** (также в форме логических, математических и иных операций), позволяющие **реализовать моделирование решения этих задач (например, на компьютере) с целью получения приемлемых результатов.**
13. С помощью программных и технических средств, на базе разработанных численных алгоритмов, **осуществляется реализация математического и компьютерного моделирования исследуемых процессов в подсистемах и в рассматриваемой системе в целом.**

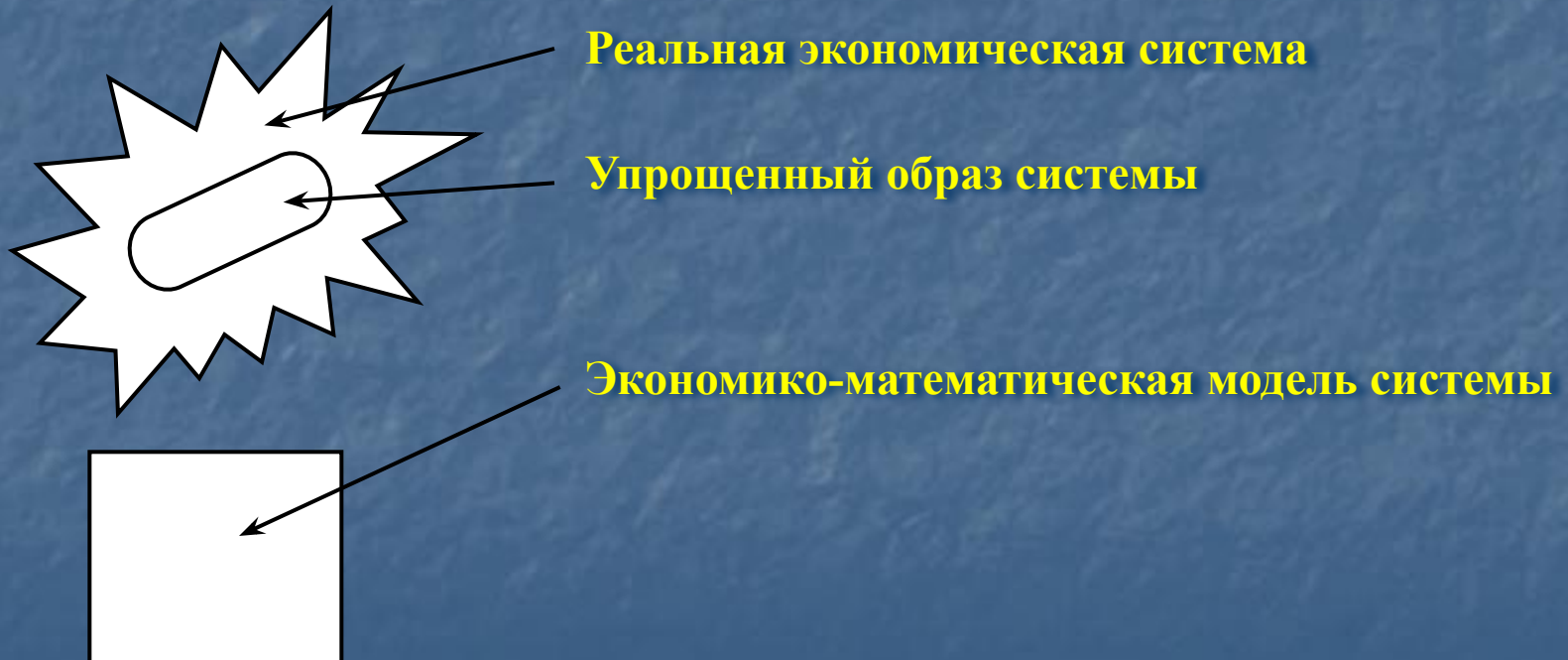


*Рассматриваемая методология математического и компьютерного моделирования различных экономических систем и процессов в них может применяться как в целом, состоящая из всех этапов (для достаточно сложных экономических систем и процессов), так и частично – в зависимости от основных целей моделирования и структуры конкретного исследуемого экономического процесса.*

*Сделаем важное замечание – с помощью такого подхода можно реализовать математическое и компьютерное моделирование различных процессов в технике, экономике, медицине и в др. предметных областях деятельности человека.*

Отметим, что **реальная исследуемая экономическая система может иметь достаточно большое количество значимых параметров (состояния, управляемых, неуправляемых и др.),** характеризующих ее функционирование. Тогда для анализа и исследования соответствующих ей процессов, **выделяют только наиболее существенные (с точки зрения выбранных критериев качества процессов) параметры, описывающие ее подсистемы и систему в целом, т.е. снижают размерность соответствующих математических моделей, формируя упрощенный образ рассматриваемой системы.** Затем разрабатывают математические модели подсистем и системы в целом, которые являются определенной абстракцией, приемлемой для исследования соответствующих им реальных процессов.

Образно, сформированные математические модели по отношению к реальной экономической системе и ее подсистемам, учитывающие соответствующие им процессы, можно изобразить следующим образом.



При этом математическая модель системы находится **«вне реальной системы»**, а не содержится в ней, т.к. она может быть использована и для исследования других реальных систем и соответствующих им процессов. Так, например, математические модели могут быть такими математическими структурами, которые могут применяться для моделирования и исследования реальных систем и соответствующих им практических задач, как в области экономики, так и в области медицины.

### 3. Реализация методологии математического и компьютерного моделирования

Приведенную выше последовательность основных этапов экономико-математического и компьютерного моделирования на практике можно реализовать в форме следующих основных блоков.

I. Для выделенных значимых параметров состояния системы, структурных параметров, управляемых и неуправляемых параметров, в рамках выбранного математического инструментария, формируется **математическая модель**, описывающая стационарные или динамические процессы, соответствующие исследуемым процессам для подсистем и системы в целом в форме:

- 1) алгебраических или операторных соотношений (детерминированных или стохастических, в случае, если объект стационарный);
- 2) алгебраических рекуррентных соотношений, дифференциальных или операторных динамических соотношений (детерминированных или стохастических, в случае, если процесс динамический) и др.

При этом соотношения будут стохастическими, если присутствуют неопределенные параметры, для которых известны их вероятностные характеристики.

II. Для математических моделей подсистем и системы в целом, формируются имеющиеся **управляющие связи, условия иерархической подчиненности и информационного обеспечения** для соответствующих субъектов, управляющих подсистемами и для субъекта, управляющего системой в целом, в следующем виде:

- информационных сигналов, являющихся **«ВЫХОДНЫМИ ДАННЫМИ»** или значениями функционального (операторного) преобразования (соотношения), определенного на **«ВХОДНЫХ ДАННЫХ»** – параметрах состояния, структурных параметрах, управляемых или неуправляемых параметрах, **при наличии погрешностей (ошибок) измерений** (эти преобразования могут иметь вид, например, действительных функций многих переменных, дифференциальных или операторных соотношений, описывающих **уравнение измерений информационных сигналов**).

III. Для каждой из подсистем рассматриваемой системы и для системы в целом формируются **критерии качества функционирования соответствующих им процессов**, которые в случае наличия, например, одного критерия, имеют вид действительной функции одной или нескольких действительных переменных, а в случае наличия нескольких критериев (наиболее общий случай) – критерием качества является набор функций (или векторная функция), состоящий из набора действительных функций нескольких действительных переменных (в таких случаях говорят, что имеется **векторный критерий качества** или векторный показатель функционирования процесса в конкретной подсистеме или в системе в целом – наиболее сложный показатель).



IV. Для выделенных подсистем и системы в целом, а также для сформированных критериев качества функционирования подсистем и системы в целом, формируются **цели, которые преследуют соответствующие управляющие субъекты**, имеющие обычно форму достижения максимальных или минимальных значений соответствующих критериев (причем, для векторных критериев необходимо использовать аналогичные им понятия, с учетом специфики задачи).

V. Для параметров состояния, структурных параметров, управляемых и неуправляемых параметров, всех априори неопределенных параметров системы (погрешностей моделирования подсистем и системы в целом, ошибок измерений информационных сигналов, неопределенностей моделирования критериев качества рассматриваемых процессов и др.) формируются **ограничения на их изменения**, отражающие имеющиеся реальные ограничения (физические, химические, биологические, экономические и др.) в форме:

- 1) алгебраических уравнений или неравенств (детерминированных или стохастических);
- 2) дифференциальных уравнений или неравенств (детерминированных или стохастических);
- 3) операторных уравнений или неравенств (детерминированных или стохастических) или др.

***При этом важна достаточная адекватность ограничений в математической модели, имеющимся реальным ограничениям.***

VI. Для сформулированных в блоках I – V математических моделей, образующих в комплексе математическую модель исследуемых процессов в рассматриваемой системе, формулируются, например, **математические задачи оптимизации гарантированного результата** (позволяющие учитывать наличие неопределенности или конфликта в рассматриваемой системе), соответствующие реальным практическим задачам и для сформулированных задач разрабатываются **математические методы их решения** [см., например, 1,2], а также **численные алгоритмы** (например, в форме реализации конечных последовательностей логических, математических и иных операций), позволяющие организовать и реализовать моделирование решения этих задач, например, на компьютере.

VII. На основе сформированных в блоке VI алгоритмов разрабатывается и формируется **программное и техническое обеспечение** или используется стандартное, позволяющее реализовать процесс моделирования исходной системы и решения сформулированных в рамках ее задач, соответствующих исходным реальным задачам.

VIII. С помощью сформированных программных и технических средств реализуется, например, **компьютерное моделирование исследуемых процессов** для рассматриваемой системы. При этом в случае получения приемлемых результатов моделирования, согласующихся с известными практическими результатами, моделирование считается приемлемым для решения практических задач. В случае, если отсутствуют приемлемые результаты при компьютерном моделировании, то процесс формирования математической модели системы корректируется, начиная с блока I до блока VII, и затем повторяется до получения приемлемых результатов компьютерного моделирования, согласующихся с практическими результатами реализации исследуемых процессов в рассматриваемой системе.

Следует отметить, что **процесс математического и компьютерного моделирования (в общем случае) является циклическим.** При его реализации изменяются как рассматриваемые параметры исследуемой системы, так и используемые математические и технические средства.

Таким образом, на основании вышеизложенного, **можно сделать общий вывод, что для реализации математического и компьютерного моделирования сложных экономических процессов в форме многоуровневых иерархических динамических систем, необходимо изучение методов формирования и анализа таких моделей, методов и алгоритмов решения различных задач, которые могут быть сформулированы в рамках таких моделей (например, задач оптимизации гарантированного результата), а также исследование различных математических операций, которые позволяют организовать реализацию этих алгоритмов, например, с помощью компьютера и современных информационных технологий, имеющимися или сформированными техническими и программными средствами.**



Тогда можно сделать вывод (более конкретный), что **предметом математического и компьютерного моделирования** является изучение принципов и методов построения различных математических моделей реальных систем и со-ответствующих им процессов, анализ этих моделей, изучение методов и разработка алгоритмов решения различных задач, которые могут быть сформулированы в рамках таких моделей, а также исследование различных логических, математических и иных операций, которые позволяют организовать реализацию этих алгоритмов, например, с помощью компьютера, имеющимися или сформированными программными и техническими средствами.

## 4. Модели математического программирования

*Одной из наиболее общих и широко используемых в математическом моделировании, в частности, в экономико-математическом моделировании, является модель нелинейного математического программирования, которая может быть описана следующим образом.*

Для заданной действительной функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $n$ -действительных переменных, которая называется целевой функцией, требуется найти ее максимальное (минимальное) значение  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max (\min)$  при условии, что каждый фиксированный набор переменных  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  может выбираться из заданного множества  $X \subset \mathbb{R}^n$ , т.е. подмножества линейного векторного пространства  $\mathbb{R}^n$ . При этом говорят, что переменная  $x_i$ , где  $i \in \overline{1, n}$ , является параметром состояния. Тогда можно сформулировать следующую оптимизационную задачу (например, для случая максимизации целевой функции).

**Задача 1.** Для заданной целевой функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , которая является действительной функцией  $n$ -действительных переменных (например, дифференцируемой для заданного  $x \in \mathbb{R}^n$ ), и множества  $X \subset \mathbb{R}^n$ , ограничивающего переменное состояние  $x$  и, например, заданного в виде

$$X: \begin{cases} g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, \\ i \in \overline{1, m}, \end{cases} \quad (1.1)$$

(т.е. описываемого системой из  $(m+n)$  неравенств, где, например, каждая из функций  $g_i$  является действительной функцией  $n$  действительных переменных и для всех  $i \in \overline{1, m}$  является дифференцируемой для заданного  $x \in \mathbb{R}^n$ ), требуется найти допустимый набор  $(x_1^{(e)}, x_2^{(e)}, \dots, x_n^{(e)}) \in X$  (хотя бы один) такой, что выполняется следующее условие экстремальности

$$f^{(e)} = f(x_1^{(e)}, x_2^{(e)}, \dots, x_n^{(e)}) = \max_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X} f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (1.2)$$

Функцию  $f$  в этой задаче часто называют также **критерием качества (или функционалом) для данной задачи.**

**Набор  $(x_1^{(e)}, x_2^{(e)}, \dots, x_n^{(e)}) \in X$  называют экстремальным или оптимальным планом (программой) для задачи 1, а числовое значение  $f^{(e)}$ , удовлетворяющее соотношению 1.2, которое является наибольшим допустимым значением целевой функции  $f$  на множестве  $X$ , называют экстремальным или оптимальным ее значением для задачи 1.**

Отметим, что **решение задачи 1 существует, если множество  $X \neq \emptyset$  и функции  $f$  и  $g_i, i \in \overline{1, m}$ , например, непрерывны по совокупности своих переменных.**

**Задача 1** называется **задачей нелинейного математического программирования** (НМП).

Следует отметить, что **задача 1** является **наиболее общей среди так называемых оптимизационных задач на условный экстремум**, т.е. задач, в которых требуется находить максимум или минимум заданной целевой функции на заданном множестве, которые формируются из каких-то классов функций и множеств.

К задаче 1 НМП (как математической модели) сводятся различные и важные практические задачи, например, в области техники, экономики, биологии, медицины и др.

Для решения задачи 1 существуют различные методы ее решения, которые в большей степени зависят (в смысле их эффективности) от того, из каких классов выбираются или какими свойствами обладают целевая функция  $f$  и функции  $g_{i \in \overline{1, m}}$ , определяющие множество  $X$ , являющегося ограничением на переменные состояния.

При определенных ограничениях на функцию  $f$  и функции  $g_{i \in \overline{1, m}}$ , определяющие множество  $X$ , **одним из наиболее эффективных методов решения задачи 1 является метод динамического программирования** (МДП), который был разработан **выдающимся американским математиком Р. Беллманом** и применим для различных классов оптимизационных задач и, в частности, для достаточно общих классов задач математического программирования.

В случае, когда функция  $f$  является выпуклой на выпуклом множестве  $X \subset \mathbb{R}^n$ , каждая из функций  $g_i, i \in \overline{1, m}$ , также является выпуклой на этом же множестве и все эти функции являются, например, дифференцируемыми для всех  $x \in X$ , то порождаемый ими класс задач 1 **называется классом задач выпуклого математического программирования** (ВМП), который является подклассом задач нелинейного математического программирования.

Для решения задач ВМП (при условиях дифференцируемости целевой функции и функций, определяющих ограничения, и существования решения) разработаны так называемые **градиентные методы** их решения, которые являются достаточно эффективными.



В случае если функция  $f$  в задаче 1.1 и каждая из функций  $g_i, i \in \overline{1, m}$ , являются линейными функциями на множестве  $X \subset \mathbb{R}^n$ , то задача 1 порождает **класс задач линейного математического программирования** (ЛМП), который является подклассом задач выпуклого математического программирования.

Для решения задач ЛМП разработан очень эффективный метод – **симплекс-метод** в случае, если система линейных неравенств, порождающая ограничения (1.2), является совместной. **В разработку этого метода и исследование различных свойств задач ЛМП внесли большой вклад выдающиеся математики Л.В. Канторович, Дж. Б. Данциг, Т.К. Купманс, Дж. Фон Нейман, Г.У. Кун, А.У. Таккер, а Л.В. Канторович и Т.К. Купманс получили за свои работы в этой области Нобелевскую премию по экономике.**

При этом для задач ЛМП разработаны также другие методы решения, которые могут быть использованы для моделирования решения различных практических задач, в том числе, и в экономике.

Если в рассмотренных задачах математического программирования множество  $X$ , ограничивающее множество всех допустимых состояний рассматриваемой системы или объекта является целочисленным, то такие задачи называются **задача-ми целочисленного математического программирования** (ЦМП). Для решения задач ЦМП также разработаны достаточно эффективные методы (например, направленного перебора, «ветвей и границ» и др.), допускающие численную реализацию на компьютере.

## 5. Пример экономико-математического моделирования

### Пример 1.

Пусть имеется производственное предприятие, которое **выпускает два вида красок – краски типа I и II.** При этом **стоимость 1 т краски типа I на рынке 3000 \$, а стоимость 1 т краски типа II – 5000 \$.** Для производства 1 т краски типа I требуется 2 т сырья вида A и 1 т сырья вида B, а для производства 1 т краски типа II требуется 1 т сырья A и 2 т сырья B. Причем для производства каждой из красок требуется только эти две компоненты сырья. На данном предприятии **имеются условия для хранения суточного запаса сырья вида A в объеме не превышающем 25 т, а сырья вида B – не более 30 т.**

Тогда эти данные можно свести в следующую таблицу.

*Таблица 1*

	I	II	Запасы, т
A	2	1	25
B	1	2	30

Из проведенных маркетинговых исследований известно, что **суточный сбыт краски типа I не превышает 10 т, а возможный суточный сбыт краски типа II может превышать сбыт краски типа I не более чем на 3 т.**

Таким образом, имеются вышеописанные данные для решения рассматриваемой технико-экономической задачи организации производства, которую словесно можно описать следующим образом.

Руководству предприятия требуется так организовать суточное производство красок типа I и II, чтобы получить максимальный суточный доход от реализации обоих типов краски, причем требуется учитывать имеющиеся суточные складские запасы сырья и не затовариться готовой продукцией, т.е. учитывать суточный рыночный спрос.

Это – словесное описание задачи производственного и организационного управления.

В принципе эту **задачу можно решать перебором возможных вариантов различных суточных объемов производства краски обоих типов при учете имеющегося складского ресурса и спроса на краску**. При достаточно большой номенклатуре производства и используемого сырья, **такой способ нахождения решения может привести к необозримому числу необходимых арифметических операций** и не исключено, что мы не сможем найти в приемлемое время существующий наилучший вариант суточного производства объемов красок для получения соответствующего максимально возможного суточного дохода. При этом отметим, что **существует также трудность организации перебора допустимых вариантов производства**.

С другой стороны, *для рассматриваемой задачи существует возможность формирования экономико-математической модели, которая достаточно адекватна условиям данного производства, хранения, сбыта и позволяет разработать эффективные методы решения рассматриваемой технико-экономической задачи организации производства.*

Ниже *рассмотрим один из возможных вариантов экономико-математического моделирования.*

1. Пусть параметры  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^1$  оценивают суточные объемы производства красок типа I и II соответственно, а именно:

$x_1$  – возможное или допустимое значение суточного объема производства краски I типа (т);

$x_2$  – возможное или допустимое значение суточного объема производства краски II типа (т).

***Это параметры состояния процесса, которые являются значимыми для данной задачи.***



2. Из имеющихся данных о расходе сырья на производство одной тонны красок типа *I* и *II* и суточных объемов складских запасов сырья, представленных в таблице 1, которые можно описать в виде соответствующей матрицы  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 25 \\ 1 & 2 & 30 \end{pmatrix}$ , **сформируем следующие ограничения на суточный расход сырья:**

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 25, \\ x_1 + 2x_2 \leq 30. \end{cases} \quad (2.1)$$

Принимая во внимание известные данные о суточном спросе на краски типа *I* и *II*, необходимо также учитывать следующие ограничения:

$$\begin{cases} x_1 \leq 10, \\ x_2 \leq x_1 + 3, \end{cases} \quad (2.2)$$

т.е. объемы их производства не должны превышать известный суточный спрос.

При этом существуют также естественные физические ограничения, которые также необходимо учитывать. А именно, необходимо, чтобы соблюдались неравенства

$$\begin{cases} x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

***Таким образом, ограничения (2.1) – (2.3) позволяют учитывать суточные запасы сырья, необходимого для производства красок типа I и II, учитывать суточный спрос краски на соответствующем сегменте рынка, а также учитывать естественные физические ограничения.***

С помощью этих ограничений описывается все множество допустимых и возможных в данной задаче значений набора  $(x_1, x_2)$ . Тогда обозначим через  $X$  множество всех пар  $(x_1, x_2)$ , где  $x_1 \in \mathbb{R}^1$ ,  $x_2 \in \mathbb{R}^1$ , удовлетворяющих всем ограничениям (2.1) – (2.3), т.е. являющихся множеством всех допустимых решений общей системы неравенств, состоящей из сформированных шести неравенств.

3. Из условий рассматриваемой задачи известно, что цена 1 т краски типа *I* составляет 3000 \$, а 1 т краски типа *II* – 5000 \$. **Тогда в предположении, что цена краски типа *I* не зависит от цены на краску типа *II* и наоборот,** можно вычислить для фиксированных значений  $x_1$  и  $x_2$  величину  $f(x_1, x_2)$ , равную суточному доходу от продажи красок *I*-го и *II*-го типов в объемах  $x_1$  (т.) и  $x_2$  (т.), а именно:

$$f(x_1, x_2) = 3000x_1 + 5000x_2. \quad (2.4)$$

При этом функцию  $f(x_1, x_2)$ , значения которой вычисляются по формуле (2.4), будем называть **целевой функцией** (показателем суточного дохода) или **критерием качества** для рассматриваемой задачи.

4. В соответствии с условиями данной задачи необходимо организовать производство красок типа *I* и *II* в объемах, удовлетворяющих ограничениям (2.1) – (2.3) и таким, что суточный доход от их реализации будет наибольшим из возможного. Тогда **целью** в данной технико-экономической задаче является нахождение таких допустимых значений пар  $(x_1^{(e)}, x_2^{(e)}) \in X$ , что значение функции  $f(x_1^{(e)}, x_2^{(e)})$ , соответствующее этой паре, является **наибольшим (максимальным)** возможным значением.

5. На основании реализации предыдущих этапов, в рамках сформированной экономико-математической модели, исходную технико-экономическую задачу организации производства **можно представить в виде следующей оптимизационной задачи.**

**Задача 2.** Среди всех допустимых наборов  $(x_1, x_2) \in X$  требуется найти хотя бы один набор  $(x_1^{(e)}, x_2^{(e)}) \in X$  такой, что **выполняется следующее условие оптимальности (экстремальности)**

$$f^{(e)} = f(x_1^{(e)}, x_2^{(e)}) = \max_{(x_1, x_2) \in X} f(x_1, x_2) = 3000x_1^{(e)} + 5000x_2^{(e)}. \quad (2.5)$$

В задаче 2 набор  $(x_1^{(e)}, x_2^{(e)})$  называют **оптимальной программой** или **оптимальным планом** суточного производства красок типов *I* и *II*, а числовое значение  $f^{(e)}$  называют **оптимальным** или **экстремальным значением целевой функции** (функции, оценивающей суточный доход от реализации красок типов *I* и *II*).

Возникает вопрос: **«Существует ли в задаче 2 в рамках сформированной экономико-математической модели хотя бы один оптимальный план  $(x_1^{(e)}, x_2^{(e)}) \in X$  ?».**

Из свойств действительной линейной функции  $f(x_1, x_2)$ , определяющей целевую функцию (ее непрерывности), и свойств множества  $X$  (если оно не пусто), определяющего ограничения на переменные  $x_1$  и  $x_2$  (замкнутое и ограниченное), следует, что максимальное значение этой функции, т.е. удовлетворяющее условию оптимальности (2.5), достигается на множестве  $X$  если оно непустое. При этом набор  $(x_1^{(e)}, x_2^{(e)}) \in X$ , удовлетворяющий условию (2.5) может быть неединственным (в общем случае).

6. Сформулированная задача 2 **в качестве целевой функции имеет линейную функцию  $f(x_1, x_2)$  и множество  $X$  описывается с помощью системы (2.1) – (2.3) линейных ограничений-неравенств, т.е. она относится к классу задач линейного математического программирования.** В этом классе задач в качестве целевой функции может выбираться действительная линейная функция конечного числа действительных переменных, а ограничения имеют вид системы линейных равенств или неравенств, и требуется найти допустимый набор из  $n$ -переменных состояния системы, который доставляет максимум или минимум целевой функции и удовлетворяет заданным ограничениям.

**Задачи этого класса играют огромную роль при экономико-математическом моделировании различных технико-экономических задач.**

Для задач линейного математического программирования разработаны эффективные методы нахождения решений – оптимальных планов и оптимальных значений целевой функции и наиболее эффективным из них, с позиции численной реализации, является так называемый **симплекс-метод**.

В соответствии с этим, задачу 2 можно решать также симплекс-методом.

Решение задачи 2 при наличии достаточно большого числа переменных (от 10 и более), например, с помощью симплекс-метода, **позволяет достичь большого реального экономического эффекта**.



Таким образом, *в соответствии с описанной выше методологией математического моделирования, для формирования экономико-математической модели рассматриваемой задачи были использованы только некоторые этапы: 1) – 6), позволяющие учесть имеющиеся в данной задаче технико-экономические условия.*

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
2. **Шориков А.Ф.** Минимаксное оценивание и управление в дискретных динамических системах. Екатеринбург: Изд-во УрГУ, 1997.
3. **Канторович Л.В.** Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. М.: Изд-во АН СССР, 1959.
4. **Карлин С.** Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Мир, 1964.
5. **Леонтьев В.В.** Исследование структуры американской экономики. М.: Госстатиздат, 1958.
6. **Месарович М., Мако Д., Такахара И.** Теория иерархических многоуровневых систем. М.: Мир, 1973.
7. **Нейман Дж., Моргенштерн О.** Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1970.

8. **Никайдо Х.** Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир, 1972.
9. **Интрилигатор М.** Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Айрис-пресс, 2003.
10. **Портер У.** Современные основания общей теории систем. М.: Наука, 1971.
11. **Тер-Крикоров А.М.** Оптимальное управление и математическая экономика. М.: Наука, 1977.
12. **Федоренко Н.П.** Оптимизация экономики. М.: Наука, 1977.
13. **Шориков А.Ф.** Методология экономико-математического моделирования многоуровневых иерархических динамических систем, функционирующих в условиях неопределенности // Известия Уральского гос. экон. ун-та. 2005. № 12. С. 123-130.
14. **Шориков А.Ф.** Методология моделирования многоуровневых систем: иерархия и динамика // Прикладная информатика. Научно-практический журнал. Москва. 2006. № 1. С. 136-141.