Математическое и компьютерное моделирование

Шориков Андрей Фёдорович,

профессор, доктор физ.-мат. наук

Институт математики и механики УрО РАН,

Уральский государственный экономический университет

Екатеринбург
2009

1. О линейных алгебраических структурах

Значительная часть истории развития естественных наук ***пред-ставляет собой летопись непрерывного стремления челове-чества к обобщению понятий, которые позволили бы предста-вить действительной мир в математических терминах***. В исто-рии развития социальных наук (особенно экономических) в последнее время также наблюдаются определенные попытки выдвижения коли-чественно обоснованных теорий, использующих математические ме-тоды. Чтобы иллюстрировать математически некоторые законы дейст-вительного мира, необходимо создать соответствующие математи-ческие модели относительно одной или большего числа рассмат-риваемых параметров (переменных).

Целью такой модели может быть, например, наилучшее распределение имеющегося объема финансовых средств банка среди нескольких объектов инвестирования, приносящих разную доходность, с целью получения наибольшей суммарной прибыли, или наилучшая организация грузоперевозок транспортной фирмой внутри города, с целью обеспечения наименьшего пробега машин порожняком и выполнения всех заявок клиентов в срок и в полном объеме.

Следует отметить, что сформированная математическая мо-дель для конкретного рассматриваемого процесса или объекта может быть достаточно сложной для ее математического ана-лиза и тогда необходимы более упрощенные ее модификации. Причем, в некоторых случаях такие упрощенные модели могут с достаточно высокой степенью точности соответствовать опи-сываемому процессу или объекту. В других случаях доступные нам математические модели могут давать значения решений, отличающиеся более чем на 100% от результатов действи-тельных физических измерений.

Таким образом, фактически, мы ожидаем, что ***сформи-рованная математическая модель будет служить для следующих основных целей: количественной оценки вы-бранных параметров для рассматриваемого процесса или объекта; предсказанию изменения их значений в будущем, т.е. для прогнозирования; влиянию на изменение значений выбранных показателей оценки качества рассматрива-емых процессов или объектов, т.е. управления ими. При этом точность, требуемая от такой модели, опреде-ляется конечной целью, для которой она создавалась.***

Линейность для различных математических структур представляет собой весьма общее понятие: существуют линейные алгебраические уравнения, линейные обыкновенные дифференциальные уравнения, т.е. уравнения относительно производных функций от выбранных переменных и т.д.

Все линейные модели обладают свойствами ***аддитивности*** и ***однородности***.

С математической точки зрения, ***линейные*** модели имеют серьезные преимущества перед всеми остальными – ***нелиней-ными*** моделями. При этом, в случае нелинейных систем при применении математических методов почти всегда возникают трудности при их аналитическом (формульном) изучении и часто возникают потребности в применении компьютеров даже при ре-шении простейших задач поставленных в рамках этих моделей, т. е. требуется разработка сложных численных (приближенных) методов и алгоритмов для решения задач, сформулированных в рамках таких моделей.

При этом во многих случаях даже мощные компьютеры оказываются бесполезными для исследования таких систем. С другой стороны, часто значительно легче работать с линейными моделями и получать аналитические и численные решения, представляющие интерес для рассматриваемых практических задач.

Слайд №8

Оба эти фактора – ***доступность для исследования и достаточная точность приближения к действительному миру*** – делают линейные модели наиболее широко приме-нимым математическим аппаратом в естественных и соци-альных науках. Причем существуют математические методы, позволяющие при математическом моделировании рассмат-ривать только наиболее значимые для рассматриваемого про-цесса параметры и использовать только линейные матема-тические структуры, которые являются достаточно адекватными рассматриваемым процессам и позволяют получать прием-лемые для практики результаты решения соответствующих кон-кретных практических задач.

При этом, под ***адекватностью математической модели*** исходному процессу понимают такую ***соответствующую ему математическую модель, что решение чисто математи-ческих задач, сформированных в рамках этой модели, поз-воляет получать приемлемые количественные резуль-таты для конкретных практических задач, связанных с данным процессом***.

Тогда возникает вопрос: ***«Что понимается под линейной операцией и чем она характеризуется?»***.

Можно дать следующее формальное определение понятия линейной операции.

1. Пусть X – заданное множество элементов x произвольной природы, т.е. $x \in X$, в котором определена операция сложения его элементов, а именно:

1.1) для любой пары элементов (x_1, x_2), $x_1 \in X, x_2 \in X$ определен элемент $x \in X$ называемый их суммой, т.е. такой, что $x_1 + x_2 = x \in X$;

1.2) для любого элемента $x \in X$ и любого действительного числа $\lambda \in \mathbf{R}^1$ (где $\mathbf{R}^1$ есть множество всех действительных чисел) определена операция умножения элементов на действительное число, т.е. данному элементу x и числу λ ставится в соответствие элемент $\tilde{x} \in X$, называемый их произведением, т.е. такой, что $\lambda x = x\lambda = \tilde{x} \in X$.

2. Пусть Y – заданное множество элементов y произвольной природы, т.е. $y \in Y$, в котором, аналогично множеству X определена операция сложения его элементов, а именно:

2.1) для любой пары элементов (y_1, y_2), $y_1 \in Y$, $y_2 \in Y$ определен элемент $y \in Y$ называемый их суммой, т.е. такой, что $y_1 + y_2 = y \in Y$;

2.2) для любого элемента $y \in Y$ и любого действительного числа $\lambda \in \mathbf{R}^1$ определена операция умножения элементов на действительное число, т.е. данному элементу y и числу λ ставится в соответствие элемент $\tilde{y} \in Y$, называемый их произведением, т.е. такой, что $\lambda y = y\lambda = \tilde{y} \in Y$.

Слайд №12

Тогда операция φ, определенная на элементах x из множества X_φ $(x \in X_\varphi \subseteq X)$, которое является подмножеством (частью) введенного множества X, со значениями $\varphi(x) = y \in Y_\varphi \subseteq Y$ является ***линейной операцией*** если для нее выполняются следующие два свойства:

1) ***аддитивности***, т.е. для пары элементов (x_1, x_2), $x_1 \in X_\varphi$, $x_2 \in X_\varphi$, таких, что $x_1 \xrightarrow{\varphi} y_1 \in Y_\varphi$ $(y_1 = \varphi(x_1))$, $x_2 \xrightarrow{\varphi} y_2 \in Y_\varphi$ $(y_2 = \varphi(x_2))$, выполняется равенство

$$(x_1 + x_2) \xrightarrow{\varphi} (y_1 + y_2) = y \in Y_\varphi$$

или

$$\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2) = y_1 + y_2 = y,$$

т.е. результат применения операции φ над суммой элементов равен сумме результатов применения этой операции над этими элементами;

2) *однородности*, т.е. для любого элемента $x \in X_\varphi$ такого, что $x \xrightarrow{\varphi} y \in Y_\varphi$ $(y = \varphi(x))$, и любого действительного числа $\lambda \in \mathbf{R}^1$, $\lambda x = x\lambda = \tilde{x} \in X_\varphi$, $\lambda y = y\lambda = \tilde{y} \in Y_\varphi$, справедливо следующее равенство

$$\lambda x = x\lambda \xrightarrow{\varphi} \lambda y = y\lambda = \tilde{y} \in Y_\varphi$$

или

$$\varphi(\lambda x) = \varphi(x\lambda) = \lambda\varphi(x) = \varphi(x)\lambda = \tilde{y} \,,$$

т.е. результат применения операции φ над произведением действительного числа на элемент равен произведению этого числа на результат применения этой операции над элементом.

Отметим, что только операции, которые ***удовлетворяют условиям аддитивности и однородности*** (для множеств произвольной природы) называются ***линейными операциями***, а все остальные операции называются ***нелинейными операциями***.

Можно сказать, что алгебраические структуры, порожденные линейными операциями над множествами элементов, в которых определены операции сложения элементов и умножения их на действительное число, называются ***линейными алгебраи-ческими структурами***.

Предметом для линейных алгебраических структур является изучение таких элементов, как вектора, матрицы, опре-делители, линейные алгебраические уравнения и др., изучение связанных с ними свойств и свойств порожденных ими структур (например, систем линейных алгебраических уравнений, систем линейных алгебраических неравенств, линейных пространств и др.), а также изучение связанных с ними математических задач и методов их решения.

Основными задачами для линейных алгебраических структур являются следующие:

1) *изучения свойств линейных алгебраических структур;*
2) *выяснения существования решений задач, порожден-ных линейными алгебраическими структурами;*
3) *в случае существования решений таких задач, разработка методов нахождения их решений;*
4) *разработка и изучение алгоритмов для реализации нахождения решений таких задач, например, на компьютере и др.*

Следует также отметить, что разработанный аппарат для линейных алгебраических структур, т.е. элементы рассматриваемых в ней структур и порожденные ими объекты и свойства, имеют широкое и важное применение в математическом моделировании, также при разработке и реализации различных алгоритмов для решения задач в различных математических моделях, т.е. в моделировании и решении конкретных прикладных, в том числе и экономических задач, например, на компьютерах.

2. Методология математического и компьютерного моделирования

Существуют различные подходы и принципы экономико-математического и компьютерного моделирования функционирования сложных экономических систем (объектов) и ниже ***предлагается один из таких возможных под-ходов***.

Введем в рассмотрение следующее основное определение.

Под ***общей многоуровневой иерархической динамической экономической системой*** (объектом исследования), управ-ляемой основным субъектом управления, будем понимать совокупность ее внутренних частей (подсистем), состоящих из соответствующих им объектов и элементов, в которых рассматриваются процессы, управляемые соответствующими субъектами управления, имеющими собственные сферы интересов в условиях иерархической подчиненности основному субъекту управления, функционирующую в конкретной среде при наличии неопределенности, которую в целом можно раз-личать среди других систем и в своем составе она имеет:

1) **входные информационные устройства и средства (устройства ввода данных),** сопряженные с ее объектами или элементами;
2) **устройства и средства для хранения данных (запоми-нающие устройства),** сопряженные с ее объектами или элементами;
3) **устройства и средства, позволяющие реализовать математические, логические и иные операции для анализа и обработки данных,** сопряженные с ее объек-тами или элементами;
4) **выходные информационные устройства и средства (устройства вывода данных),** сопряженные с ее объек-тами или элементами;

5) ***устройства и средства для реализации управляющих связей*** между ее объектами или элементами;

6) ***устройства и средства для реализации информа-ционных связей*** между ее объектами или элементами;

7) ***устройства и средства, позволяющие реализовать выбранные системы кодирования и декодирования дан-ных*** (например, в двоичной системе счисления), сопря-женные с ее объектами или элементами.

Тогда ***основные этапы математического и компьютерного моделирования различных задач проектирования и организационного управления в сложных многоуровневых иерархических динами-ческих экономических системах, функционирующих в условиях неопределенности,*** можно представить в виде реализации следующей последовательности основ-ных этапов.

Слайд №22

1. В рассматриваемой системе выделяется ***основной субъект управления*** рассматриваемыми в ней процессами, ***контролирующий основной уровень управления,*** и выделяются ее части (подсистемы) – ***другие (подчиненные) уровни управления,*** которые могут находиться ***в сфере интересов других (подчиненных) управляющих субъек-тов (если таковые присутствуют),*** находящихся ***в условиях иерархической подчиненности основному субъекту управления***.

2. В рассматриваемой системе и ее подсистемах ***выделяются наиболее значимые*** для их исследования соответствующие им ***параметры состояния***, характеризующие исследуемые в системе процессы в фиксированный момент времени (если рассматривается динамический процесс, как наиболее общий) ***и соответствующие им ограничения***.

3. ***Выделяются параметры управления процессами в системе в целом и подсистемах***, которые могут изменяться по ходу реализации конкретного процесса в зависимости (по желанию и возможностям) от выбора соответствующего управляющего субъекта ***и соответствующие им ограничения*** (физической реализуе-мости, технические, экономические и др.).

4. *Выделяются неуправляемые параметры для рассматриваемых в системе в целом и подсистемах процессов* (неконтролируемые конкретным управляющим субъектом, или учитывающие влияние конкрет-ной внешней среды или описывающие погрешности моделирования процессов), которые изменяются вне зависимости от желания и возможностей конкретного управляющего субъекта **и соответствующие им ограничения.**

5. Для каждой из подсистем и для системы в целом ***определяются параметры процессов, характеризую-щие их структуру и внутренние связи*** между объектами или элементами системы.
6. ***Формируются условия информационного обеспечения для каждого из управляющих субъектов,*** которым под-чиняются соответствующие уровни управления, **информаци-онные и управляющие связи между ними и условия иерархической подчиненности** при принятии управлен-ческих решений субъектами управления, а также ***соответ-ствующие им ограничения***.

7. Для каждой из подсистем рассматриваемой системы ***формируются критерии (в частном случае – один критерий), позволяющие оценивать качество функционирования этой подсистемы и формиру-ются также соответствующие критерии (или критерий), которые позволяют оценивать качество функционирования исследуемой системы в целом***.

8. ***Для каждой подсистемы***, на основании выбранных соот-ветствующих критериев качества функционирования соответ-ствующих ей процессов, ***формируются цели***, достижение которых является наилучшим или приемлемым для соответ-ствующего управляющего субъекта, и аналогично ***формиру-ются соответствующие цели и для субъекта, управ-ляющего рассматриваемыми процессами в системе в целом***, которые в совокупности соответствуют сформиро-ванным критериям качества для рассматриваемых процессов.

9. На основании предыдущих этапов ***определяется математический и технический инструментарий моделирова-ния и формируются математические модели*** для каждой из подсистем и рассматриваемой системы в целом, учиты-вающие соответствующие им процессы, которые ***в какой-то мере адекватны реальным процессам и позволяют анализировать и исследовать их имеющимися сред-ствами и в приемлемое время***.

10. Для сформированных задач **разрабатываются математические методы их решения в форме реализации соответствующих последовательнос-тей логических, математических и иных операций**.

11. В математических моделях процессов, исследуемых в подсистемах и рассматриваемой системе в целом, **фор-мируются математические задачи, соответству-ющие набору имеющихся реальных задач и процессов**.

12. Для каждого из математических методов решения задач ***разрабатываются соответствующие им численные алгоритмы*** (также в форме логических, математических и иных операций), позволяющие ***реализовать моделиро-вание решения этих задач (например, на компьютере) с целью получения приемлемых результатов***.

13. С помощью программных и технических средств, на базе разработанных численных алгоритмов, ***осуществляется реализация математического и компьютерного моде-лирования исследуемых процессов в подсистемах и в рассматриваемой системе в целом***.

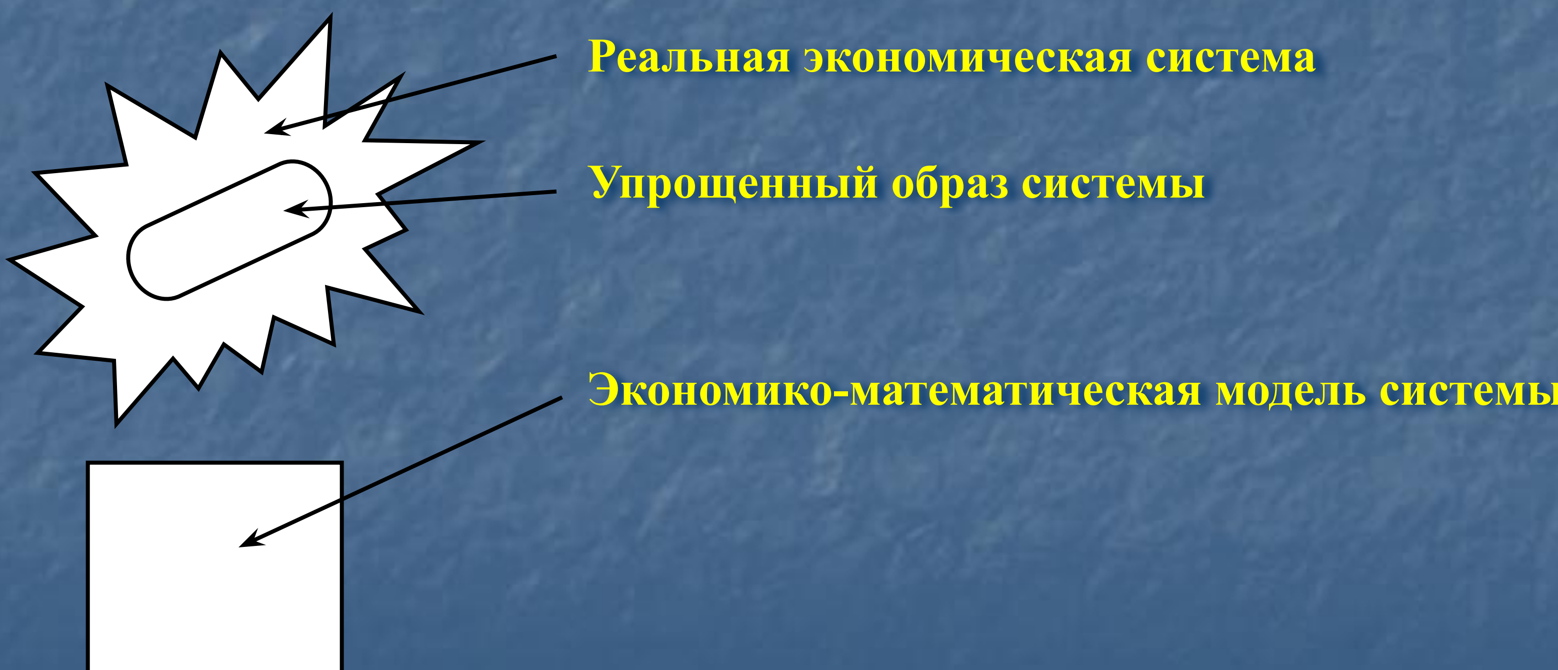
Рассматриваемая методология математического и компьютерного моделирования различных экономических систем и процессов в них может применяться как в целом, состоящая из всех этапов (для достаточно сложных экономических систем и процессов), так и частично – в зависимости от основных целей моделирования и струк-туры конкретного исследуемого экономического процесса.

Сделаем важное замечание – ***с помощью такого подхода можно реализовать математическое и компьютерное мо-делирование различных процессов в технике, экономике, медицине и в др. предметных областях деятельности человека***.

Слайд №33

Отметим, что ***реальная исследуемая экономическая система может иметь достаточно большое количество значимых пара-метров (состояния, управляемых, неуправляемых и др.),*** ха-рактеризующих ее функционирование. Тогда для анализа и исследо-вания соответствующих ей процессов, ***выделяют только наиболее существенные (с точки зрения выбранных критериев качества процессов) параметры, описывающие ее подсистемы и систе-му в целом, т.е. снижают размерность соответствующих ма-тематических моделей, формируя упрощенный образ рас-сматриваемой системы. Затем разрабатывают математичес-кие модели подсистем и системы в целом, которые являются определенной абстракцией, приемлемой для исследования соответствующих им реальных процессов.***

Образно, сформированные математические модели по отношению к реальной экономической системе и ее подсистемам, учитывающие соответствующие им процессы, можно изобразить следующим образом.



При этом математическая модель системы находится ***«вне реальной системы», а не содержится в ней, т.к. она может быть использована и для исследования других реальных систем и соответствующих им процессов***. Так, например, математические модели могут быть такими мате-матическими структурами, которые могут применяться для моде-лирования и исследования реальных систем и соответствующих им практических задач, как в области экономики, так и в области медицины.

3. Реализация методологии математического и компьютерного моделирования

Приведенную выше последовательность основных этапов экономико-математического и компьютерного моделирования на практике можно реализовать в форме следующих основных блоков.

I. Для выделенных значимых параметров состояния системы, структурных параметров, управляемых и неуправляемых параметров, в рамках выбранного математического инструментария, формируется ***математическая модель***, описывающая стационарные или динамические процессы, соответствующие исследуемым процессам для подсистем и системы в целом в форме:

1) алгебраических или операторных соотношений (детерминированных или стохастических, в случае, если объект стационарный);

2) алгебраических рекуррентных соотношений, дифференциальных или операторных динамических соотношений (детерминированных или стохастических, в случае, если процесс динамический) и др.

При этом соотношения будут стохастическими, если присутствуют неопределенные параметры, для которых известны их вероятностные характеристики.

II. Для математических моделей подсистем и системы в целом, формируются имеющиеся ***управляющие связи, условия иерархической подчиненности и информационного обеспе-чения*** для соответствующих субъектов, управляющих подсисте-мами и для субъекта, управляющего системой в целом, в сле-дующем виде:

· информационных сигналов, являющихся ***«выходными данными»*** или значениями функционального (операторного) преобразования (соотношения), определенного на ***«входных данных»*** – параметрах состояния, структурных параметрах, управляемых или неуправляемых параметрах, ***при наличии погрешностей (ошибок) измерений*** (эти преобразования мо-гут иметь вид, например, действительных функций многих переменных, дифференциальных или операторных соотно-шений, описывающих ***уравнение измерений информацион-ных сигналов***).

III. Для каждой из подсистем рассматриваемой системы и для системы в целом формируются ***критерии качества функци-онирования соответствующих им процессов***, которые в случае наличия, например, одного критерия, имеют вид дей-ствительной функции одной или нескольких действительных переменных, а в случае наличия нескольких критериев (наибо-лее общий случай) – критерием качества является набор функций (или векторная функция), состоящий из набора дей-ствительных функций нескольких действительных переменных (в таких случаях говорят, что имеется ***векторный критерий качества*** или векторный показатель функционирования процес-са в конкретной подсистеме или в системе в целом – наиболее сложный показатель).

IV. Для выделенных подсистем и системы в целом, а также для сформированных критериев качества функционирования под-систем и системы в целом, формируются ***цели, которые прес-ледуют соответствующие управляющие субъекты***, имеющие обычно форму достижения максимальных или ми-нимальных значений соответствующих критериев (причем, для векторных критериев необходимо использовать аналогичные им понятия, с учетом специфики задачи).

V. Для параметров состояния, структурных параметров, управляемых и неуправляемых параметров, всех априори неопределенных параметров системы (погрешностей модели-рования подсистем и системы в целом, ошибок измерений информационных сигналов, неопределенностей моделирования критериев качества рассматриваемых процессов и др.) форми-руются ***ограничения на их изменения***, отражающие имеющие-ся реальные ограничения (физические, химические, биологи-ческие, экономические и др.) в форме:

1) алгебраических уравнений или неравенств (детерми-нированных или стохастических);

2) дифференциальных уравнений или неравенств (детерми-нированных или стохастических);

3) операторных уравнений или неравенств (детерминированных или стохастических) или др.

При этом важна достаточная адекватность ограни-чений в математической модели, имеющимся реальным ограничениям.

VI. Для сформированных в блоках I – V математических моделей, образующих в комплексе математическую модель ис-следуемых процессов в рассматриваемой системе, формулиру-ются, например, ***математические задачи оптимизации гарантированного результата*** (позволяющие учитывать наличие неопределенности или конфликта в рассматриваемой системе), соответствующие реальным практическим задачам и для сформулированных задач разрабатываются ***математи-ческие методы их решения*** [см., например, 1,2], а также ***численные алгоритмы*** (например, в форме реализации конеч-ных последовательностей логических, математических и иных операций), позволяющие организовать и реализовать модели-рование решения этих задач, например, на компьютере.

VII. На основе сформированных в блоке VI алгоритмов разрабатывается и формируется ***программное и техническое обеспечение*** или используется стандартное, позволяющее реализовать процесс моделирования исходной системы и решения сформулированных в рамках ее задач, соответствующих исходным реальным задачам.

VIII. С помощью сформированных программных и технических средств реализуется, например, ***компьютерное моделиро-вание исследуемых процессов*** для рассматриваемой системы. При этом в случае получения приемлемых результатов модели-рования, согласующихся с известными практическими резуль-татами, моделирование считается приемлемым для решения практических задач. В случае, если отсутствуют приемлемые результаты при компьютерном моделировании, то процесс формирования математической модели системы корректируется, начиная с блока I до блока VII, и затем повторяется до получения приемлемых результатов компьютерного модели-рования, согласующихся с практическими результатами реали-зации исследуемых процессов в рассматриваемой системе.

Следует отметить, что ***процесс математического и компьютерного моделирования (в общем случае) является циклическим***. При его реализации изменяются как рассматриваемые параметры исследуемой системы, так и используемые математические и технические средства.

Таким образом, на основании вышеизложенного, *можно сделать общий вывод, что для реализации математического и компью-терного моделирования сложных экономических процессов в форме многоуровневых иерархических динамических систем, необходимо изучение методов формирования и анализа таких моделей, методов и алгоритмов решения различных задач, которые могут быть сформулированы в рамках таких моделей (например, задач оптимизации гарантированного результата), а также исследование различных математических операций, которые позволяют организовать реализацию этих алгорит-мов, например, с помощью компьютера и современных инфор-мационных технологий, имеющимися или сформированными техническими и программными средствами.*

Тогда можно сделать вывод (более конкретный), что ***предметом математического и компьютерного модели-рования*** является изучение принципов и методов построения различных математических моделей реальных систем и со-ответствующих им процессов, анализ этих моделей, изучение методов и разработка алгоритмов решения различных задач, которые могут быть сформулированы в рамках таких моделей, а также исследование различных логических, математических и иных операций, которые позволяют организовать реализацию этих алгоритмов, например, с помощью компьютера, имею-щимися или сформированными программными и техническими средствами.

4. Модели математического программирования

Одной из наиболее общих и широко используемых в математическом моделировании, в частности, в эко-номико-математическом моделировании, является модель нелинейного математического программиро-вания, которая может быть описана следующим образом.

Для заданной действительной функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, n-действительных переменных, которая называется целевой функцией, требуется найти ее максимальное (минимальное) значение $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow \max (\min)$ при условии, что каждый фиксированный набор переменных $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ может выбираться из заданного множества $X \subset \mathbf{R}^n$, т.е. подмножества линейного векторного пространства $\mathbf{R}^n$. При этом говорят, что переменная x_i, где $i \in \overline{1,n}$, является параметром состояния. Тогда можно сформулировать следующую оптимизационную задачу (например, для случая максимизации целевой функции).

Задача 1. Для заданной целевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которая является действительной функцией n-действительных переменных (например, дифференцируемой для заданного $x \in \mathbf{R}^n$), и множества $X \subset \mathbf{R}^n$, ограничивающего переменное состояние x и, например, заданного в виде

$$X: \begin{cases} g_i(x_1, x_2, \ldots x_n) \le 0, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0, \\ i \in \overline{1, m}, \end{cases} \qquad (1.1)$$

(т.е. описываемого системой из $(m+n)$ неравенств, где, например, каждая из функций g_i является действительной функцией n действительных переменных и для всех $i \in \overline{1, m}$ является дифференцируемой для заданного $x \in \mathbf{R}^n$), требуется найти допустимый набор $(x_1^{(e)}, x_2^{(e)}, \ldots, x_n^{(e)}) \in X$ (хотя бы один) такой, что выполняется следующее условие экстремальности

$$f^{(e)} = f(x_1^{(e)}, x_2^{(e)}, \ldots, x_n^{(e)}) = \max_{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X} f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \qquad (1.2)$$

Функцию f в этой задаче часто называют также ***критерием качества (или функционалом) для данной задачи.***

Набор $(x_1^{(e)}, x_2^{(e)}, \dots, x_n^{(e)}) \in X$ ***называют экстремальным или оптимальным планом (программой) для задачи 1, а числовое значение*** $f^{(e)}$***, удовлетворяющее соотношению 1.2, которое является наибольшим допустимым значением целевой функции*** f ***на множестве*** X***,*** называют ***экстремальным или оптимальным ее значением для задачи 1.***

Отметим, что ***решение задачи 1 существует, если множество*** $X \neq \varnothing$ ***и функции*** f ***и*** g_i***,*** $i \in \overline{1, m}$***, например, непрерывны по совокупности своих переменных.***

Задача 1 называется задачей нелинейного математического программирования (НМП).

Следует отметить, что *задача 1 является наиболее общей среди так называемых оптимизационных задач на условный экстремум*, т.е. задач, в которых требуется находить максимум или минимум заданной целевой функции на заданном множестве, которые формируются из каких-то классов функций и множеств.

К задаче 1 НМП (как математической модели) сводятся различные и важные практические задачи, например, в области техники, экономики, биологии, медицины и др.

Для решения задачи 1 существуют различные методы ее решения, которые в большей степени зависят (в смысле их эффективности) от того, из каких классов выбираются или какими свойствами обладают целевая функция f и функции $g_i, i \in \overline{1,m}$, определяющие множество X, являющегося ограничением на переменные состояния.

При определенных ограничениях на функцию f и функции $g_i, i \in \overline{1,m}$, определяющие множество X, ***одним из наиболее эффективных методов решения задачи 1 является метод динамического программирования*** (МДП), который был разработан ***выдающимся американским математиком Р. Беллманом*** и применим для различных классов оптимизационных задач и, в частности, для достаточно общих классов задач математического программирования.

В случае, когда функция f является выпуклой на выпуклом множестве $X \subset \mathbf{R}^n$, каждая из функций $g_i, i \in \overline{1,m}$, также является выпуклой на этом же множестве и все эти функции являются, например, дифференцируемыми для всех $x \in X$, то порождаемый ими класс задач 1 ***называется классом задач выпуклого математического программирования*** (ВМП), который является подклассом задач нелинейного математического программирования.

Для решения задач ВМП (при условиях дифференцируемости целевой функции и функций, определяющих ограничения, и существования решения) разработаны так называемые ***градиентные методы*** их решения, которые являются достаточно эффективными.

В случае если функция f в задаче 1.1 и каждая из функций $g_i, i \in \overline{1,m}$, являются линейными функциями на множестве $X \subset R^n$, то задача 1 порождает ***класс задач линейного математического программирования*** (ЛМП), который является под-классом задач выпуклого математического программирования.

Для решения задач ЛМП разработан очень эффективный метод – ***симплекс-метод*** в случае, если система линейных неравенств, порождающая ограничения (1.2), является сов-местной. ***В разработку этого метода и исследование раз-личных свойств задач ЛМП внесли большой вклад выда-ющиеся математики Л.В. Канторович, Дж. Б. Данциг, Т.К. Купманс, Дж. Фон Нейман, Г.У. Кун, А.У. Таккер, а Л.В. Кан-торович и Т.К. Купманс получили за свои работы в этой области Нобелевскую премию по экономике***.

При этом для задач ЛМП разработаны также другие методы решения, которые могут быть использованы для моделирования решения различных практических задач, в том числе, и в экономике.

Если в рассмотренных задачах математического программирования множество X, ограничивающее множество всех допустимых состояний рассматриваемой системы или объекта является целочисленным, то такие задачи называются ***задача-ми целочисленного математического программирования*** (ЦМП). Для решения задач ЦМП также разработаны достаточно эффективные методы (например, направленного перебора, «ветвей и границ» и др.), допускающие численную реализацию на компьютере.

5. Пример экономико-математического моделирования

Пример 1.

Пусть имеется производственное предприятие, которое ***выпускает два вида красок – краски типа I и II***. При этом ***стоимость 1 т краски типа I на рынке 3000 $, а стоимость 1 т краски типа II – 5000 $. Для производства 1 т краски типа I требуется 2 т сырья вида А и 1 т сырья вида В, а для производства 1 т краски типа II требуется 1 т сырья А и 2 т сырья В***. Причем для производства каждой из красок требуется только эти две компоненты сырья. На данном предприятии ***имеются условия для хранения суточного запаса сырья вида А в объеме не превышающем 25 т, а сырья вида В – не более 30 т***.

Тогда эти данные можно свести в следующую таблицу.

Таблица 1

	I	II	Запасы, т
A	2	1	25
B	1	2	30

Из проведенных маркетинговых исследований известно, что ***суточный сбыт краски типа I не превышает 10 т, а возможный суточный сбыт краски типа II может превышать сбыт краски типа I не более чем на 3 т***.

Таким образом, имеются вышеописанные данные для решения рассматриваемой технико-экономической задачи организации производства, которую словесно можно описать следующим образом.

Руководству предприятия требуется так органи-зовать суточное производство красок типа I и II, чтобы получить максимальный суточный доход от реализации обоих типов краски, причем требуется учитывать имеющиеся суточные складские запасы сырья и не зато-вариться готовой продукцией, т.е. учитывать суточный рыночный спрос.

Это – словесное описание задачи производственного и организационного управления.

Слайд №61

В принципе эту ***задачу можно решать перебором возмож-ных вариантов различных суточных объемов производ-ства краски обоих типов при учете имеющегося склад-ского ресурса и спроса на краску***. При достаточно большой номенклатуре производства и используемого сырья, ***такой способ нахождения решения может привести к необозри-мому числу необходимых арифметических операций*** и не исключено, что мы не сможем найти в приемлемое время существующий наилучший вариант суточного производства объемов красок для получения соответствующего максимально возможного суточного дохода. При этом отметим, что ***сущест-вует также трудность организации перебора допусти-мых вариантов производства***.

С другой стороны, *для рассматриваемой задачи сущест-вует возможность формирования экономико-математи-ческой модели, которая достаточно адекватна условиям данного производства, хранения, сбыта и позволяет раз-работать эффективные методы решения рассматрива-емой технико-экономической задачи организации произ-водства*.

Ниже *рассмотрим один из возможных вариантов экономико-математического моделирования*.

1. Пусть параметры $x_1, x_2 \in \mathbf{R}^1$ оценивают суточные объемы производства красок типа ***I*** и ***II*** соответственно, а именно:

x_1 – возможное или допустимое значение суточного объема производства краски ***I*** типа (т);

x_2 – возможное или допустимое значение суточного объема производства краски ***II*** типа (т).

Это параметры состояния процесса, которые являются значимыми для данной задачи.

2. Из имеющихся данных о расходе сырья на производство одной тонны красок типа ***I*** и ***II*** и суточных объемов складских запасов сырья, представленных в таблице 1, которые можно описать в виде соответствующей матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 25 \\ 1 & 2 & 30 \end{pmatrix}$, ***сформируем следующие ограничения на суточный расход сырья:***

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 25, \\ x_1 + 2x_2 \le 30. \end{cases} \qquad (2.1)$$

Принимая во внимание известные данные о суточном спросе на краски типа I и II, необходимо также учитывать следующие ограничения:

$$\begin{cases} x_1 \le 10, \\ x_2 \le x_1 + 3, \end{cases} \qquad (2.2)$$

т.е. объемы их производства не должны превышать известный суточный спрос.

При этом существуют также естественные физические ограничения, которые также необходимо учитывать. А именно, необходимо, чтобы соблюдались неравенства

$$\begin{cases} x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases} \qquad (2.3)$$

Таким образом, ограничения (2.1) – (2.3) позволяют учитывать суточные запасы сырья, необходимого для производства красок типа I и II, учитывать суточный спрос краски на соответствующем сегменте рынка, а также учитывать естественные физические ограничения.

С помощью этих ограничений описывается все множество допустимых и возможных в данной задаче значений набора (x_1, x_2). Тогда обозначим через ***X*** множество всех пар (x_1, x_2), где $x_1 \in \mathbf{R}^1$, $x_2 \in \mathbf{R}^1$, удовлетворяющих всем ограничениям (2.1) – (2.3), т.е. являющихся множеством всех допустимых решений общей системы неравенств, состоящей из сформированных шести неравенств.

Слайд №66

3. Из условий рассматриваемой задачи известно, что цена 1 т краски типа ***I*** составляет 3000 $, а 1 т краски типа ***II*** – 5000 $. ***Тогда в предположении, что цена краски типа I не зависит от цены на краску типа II и наоборот,*** можно вычислить для фиксированных значений x_1 и x_2 величину $f(x_1, x_2)$, равную суточному доходу от продажи красок ***I***-го и ***II***-го типов в объемах x_1 (т.) и x_2 (т.), а именно:

$$f(x_1, x_2) = 3000\,x_1 + 5000\,x_2 . \qquad (2.4)$$

При этом функцию $f(x_1, x_2)$, значения которой вычисляются по формуле (2.4), будем называть ***целевой функцией*** (показателем суточного дохода) или ***критерием качества*** для рассматриваемой задачи.

4. В соответствии с условиями данной задачи необходимо организовать производство красок типа ***I*** и ***II*** в объемах, удовлетворяющих ограничениям (2.1) – (2.3) и таких, что суточный доход от их реализации будет наибольшим из возможного. Тогда ***целью*** в данной технико-экономической задаче является нахождение таких допустимых значений пар $(x_1^{(e)}, x_2^{(e)}) \in X$, что значение функции $f(x_1^{(e)}, x_2^{(e)})$, соответствующее этой паре, является ***наибольшим (максимальным)*** возможным значением.

5. На основании реализации предыдущих этапов, в рамках сформированной экономико-математической модели, исходную технико-экономическую задачу организации производства ***можно представить в виде следующей оптимизационной задачи.***

Задача 2. Среди всех допустимых наборов $(x_1, x_2) \in X$ требуется найти хотя бы один набор $(x_1^{(e)}, x_2^{(e)}) \in X$ такой, что ***выполняется следующее условие оптимальности (экстремальности)***

$$f^{(e)} = f(x_1^{(e)}, x_2^{(e)}) = \max_{(x_1, x_2) \in X} f(x_1, x_2) = 3000\, x_1^{(e)} + 5000\, x_2^{(e)}. \qquad (2.5)$$

В задаче 2 набор $(x_1^{(e)}, x_2^{(e)})$ называют ***оптимальной программой*** или ***оптимальным планом*** суточного производства красок типов ***I*** и ***II***, а числовое значение $f^{(e)}$ называют ***оптимальным*** или ***экстремальным значением целевой функции*** (функции, оценивающей суточный доход от реализации красок типов ***I*** и ***II***).

Возникает вопрос: ***«Существует ли в задаче 2 в рамках сформированной экономико-математической модели хотя бы один оптимальный план*** $(x_1^{(e)}, x_2^{(e)}) \in X$ ***?».***

Из свойств действительной линейной функции $f(x_1, x_2)$, определяющей целевую функцию (ее непрерывности), и свойств множества ***X*** (если оно не пусто), определяющего ограничения на переменные x_1 и x_2 (замкнутое и ограниченное), следует, что максимальное значение этой функции, т.е. удовлетворяющее условию оптимальности (2.5), достигается на множестве ***X*** если оно непустое. При этом набор $(x_1^{(e)}, x_2^{(e)}) \in X$, удовлетворяющий условию (2.5) может быть неединственным (в общем случае).

6. Сформулированная задача 2 ***в качестве целевой функции имеет линейную функцию*** $f(x_1, x_2)$ ***и множество X описывается с помощью системы (2.1) – (2.3) линейных ограничений-неравенств, т.е. она относится к классу задач линейного математического программирования.*** В этом классе задач в качестве целевой функции может выбираться действительная линейная функция конечного числа действительных переменных, а ограничения имеют вид системы линейных равенств или неравенств, и требуется найти допустимый набор из n-переменных состояния системы, который доставляет максимум или минимум целевой функции и удовлетворяет заданным ограничениям.

Задачи этого класса играют огромную роль при экономико-математическом моделировании различных технико-экономических задач.

Для задач линейного математического программирования разработаны эффективные методы нахождения решений – оптимальных планов и оптимальных значений целевой функции и наиболее эффективным из них, с позиции численной реализации, является так называемый ***симплекс-метод***.

В соответствии с этим, задачу 2 можно решать также симплекс-методом.

Решение задачи 2 при наличии достаточно большого числа переменных (от 10 и более), например, с помощью симплекс-метода, ***позволяет достичь большого реального эконо-мического эффекта***.

Таким образом, ***в соответствии с описанной выше методологией математического моделирования, для фор-мирования экономико-математической модели рас-сматриваемой задачи были использованы только неко-торые этапы: 1) – 6), позволяющие учесть имеющиеся в данной задаче технико-экономические условия.***

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красовский Н.Н.*, *Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
2. *Шориков А.Ф.* Минимаксное оценивание и управление в дискретных динамических системах. Екатеринбург: Изд-во УрГУ, 1997.
3. *Канторович Л.В.* Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. М.: Изд-во АН СССР, 1959.
4. *Карлин С.* Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Мир, 1964.
5. *Леонтьев В.В.* Исследование структуры американской экономики. М.: Госстатиздат, 1958.
6. *Месарович М., Мако Д., Такахара И.* Теория иерархических многоуровневых систем. М.: Мир, 1973.
7. *Нейман Дж., Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1970.

8. ***Никайдо Х.*** Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир, 1972.
9. ***Интрилигатор М.*** Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Айрис-пресс, 2003.
10. ***Портер У.*** Современные основания общей теории систем. М.: Наука, 1971.
11. **Тер-Крикоров А.М.** Оптимальное управление и математическая экономика. М.: Наука, 1977.
12. ***Федоренко Н.П.*** Оптимизация экономики. М.: Наука, 1977.
13. ***Шориков А.Ф.*** Методология экономико-математического моделирования многоуровневых иерархических динамических систем, функционирующих в условиях неопределенности //Известия Уральского гос. экон. ун-та. 2005. № 12. С. 123-130.
14. ***Шориков А.Ф.*** Методология моделирования многоуровневых систем: иерархия и динамика // Прикладная информатика. Научно-практический журнал. Москва. 2006. № 1. С. 136-141.