



Задача Коши

Задача с начальными условиями

ВВЕДЕНИЕ

- ▣ *Математическое моделирование* – это технология изучения и прогнозирования проявлений интересующих нас объектов с использованием возможностей математики.



ВВЕДЕНИЕ

- Математическая модель - это приближенное представление закономерности проявления некоторого класса объектов или явлений окружающего мира, выраженное в виде математических конструкций-аналогов и сформулированное в математических терминах и символах.



ВВЕДЕНИЕ

- **Этапы решения задачи математического моделирования:**
- **1) Построение математической модели.**
- **2) Исследование задачи на основе построенной модели.**
- **3) Оценка адекватности модели и внесение корректив.**
- **4) Возможное совершенствование модели.**



ВВЕДЕНИЕ

▣ Моделирование и компьютер:

Процедуру математического моделирования все чаще неразрывно связывают с использованием компьютеров. В современных информационных технологиях математическое моделирование играет роль *«интеллектуального ядра»* - наукоемкого фильтра, преобразующего *«информационное сырье в готовый продукт, т.е. в точное знание»*.



ВВЕДЕНИЕ В ЗАДАЧУ КОШИ

- ▣ **Задача Коши** — одна из основных задач теории дифференциальных уравнений (обыкновенных и с частными производными); состоит в нахождении решения (интеграла) дифференциального уравнения, удовлетворяющего так называемым начальным условиям (начальным данным).



ВВЕДЕНИЕ В ЗАДАЧУ КОШИ

- Основные вопросы, которые связаны с задачей Коши, таковы:
- 1) Существует ли (хотя бы локально) решение задачи Коши?
- 2) Если решение существует, то какова область его существования?
- 3) Является ли решение единственным?
- 4) Если решение единственно, то будет ли оно корректным, то есть непрерывным (в каком-либо смысле) относительно начальных данных?



ВВЕДЕНИЕ В ЗАДАЧУ КОШИ

- **Различные постановки задачи Коши:**
- 1) ДУ первого порядка, разрешённое относительно производной.
- 2) Система n ДУ первого порядка, разрешённая относительно старших производных.
- 3) ДУ n -го порядка, разрешённое относительно старшей производной.



ТЕОРЕМЫ О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДУ

- Пусть в области $D \subset R_x \times R_y^n$ рассматривается задача Коши:

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y(x)), y(x_0) = y_0,$$

- где $(x_0, y_0) \in D$. Пусть правая часть является непрерывной функцией в \bar{D} . В этих предположениях имеет место теорема Пеано, устанавливающая локальную разрешимость задачи Коши.



ТЕОРЕМЫ О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДУ

- Чтобы сформулировать теорему о единственности решения задачи Коши, необходимо наложить дополнительные ограничения на правую часть. Введем константу L , такую что

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \text{ для всех } (x, y_i) \in D, i = 1, 2.$$

- Тогда если L существует, то функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица на D относительно y и следовательно задача Коши не может иметь в D более одного решения.



ТЕОРЕМЫ О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДУ

□ Для существования глобального решения необходимо наложить условия на рост правой части по y : пусть функция f удовлетворяет условию

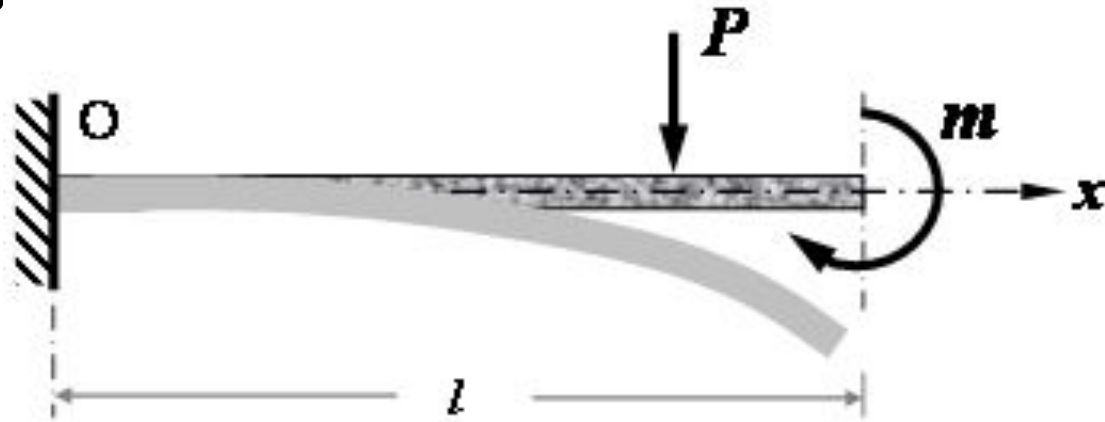
$$|f(x, y)| \leq A(|y| + 1), (x, y) \in D,$$

□ где $A > 0$ - константа не зависящая ни от x , ни от y , тогда задача Коши имеет решение в D .



ЗАДАЧА ОБ ИЗГИБЕ БАЛКИ

По какой линии изогнется балка под действием внешней силовой нагрузки?



Исходные данные:

- длина балки;
- форма и размеры поперечного сечения;
- материал, из которого изготовлена балка;
- в каких местах и какими способами закреплена балка;
- в каких местах приложены к балке внешние силовые воздействия, ее деформирующие, каков характер их действия;



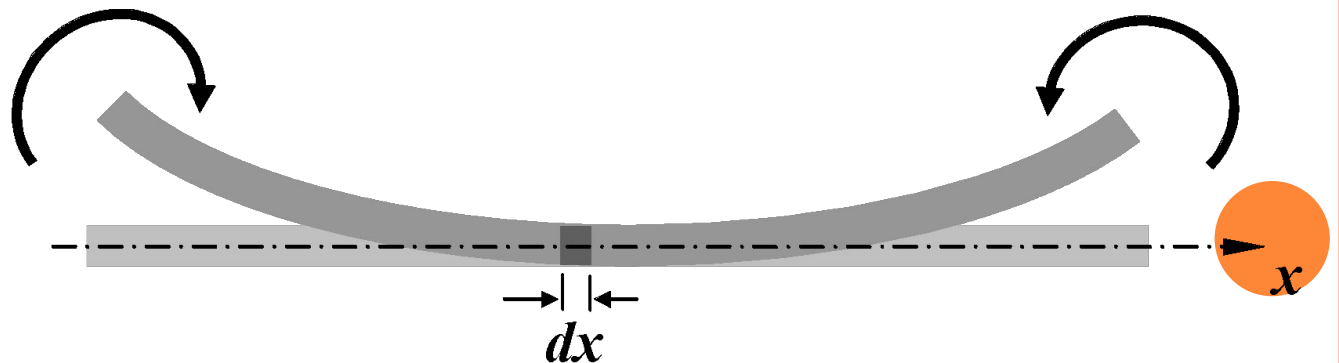
ЗАДАЧА ОБ ИЗГИБЕ БАЛКИ

- **Этап 1:** Формулирование идеи, закладываемой в математическую модель.
- **Если внешняя силовая нагрузка, изогнув закрепленную балку, не меняясь, продолжает на нее действовать, изогнувшаяся балка остается в состоянии равновесия, примет состояние покоя.**



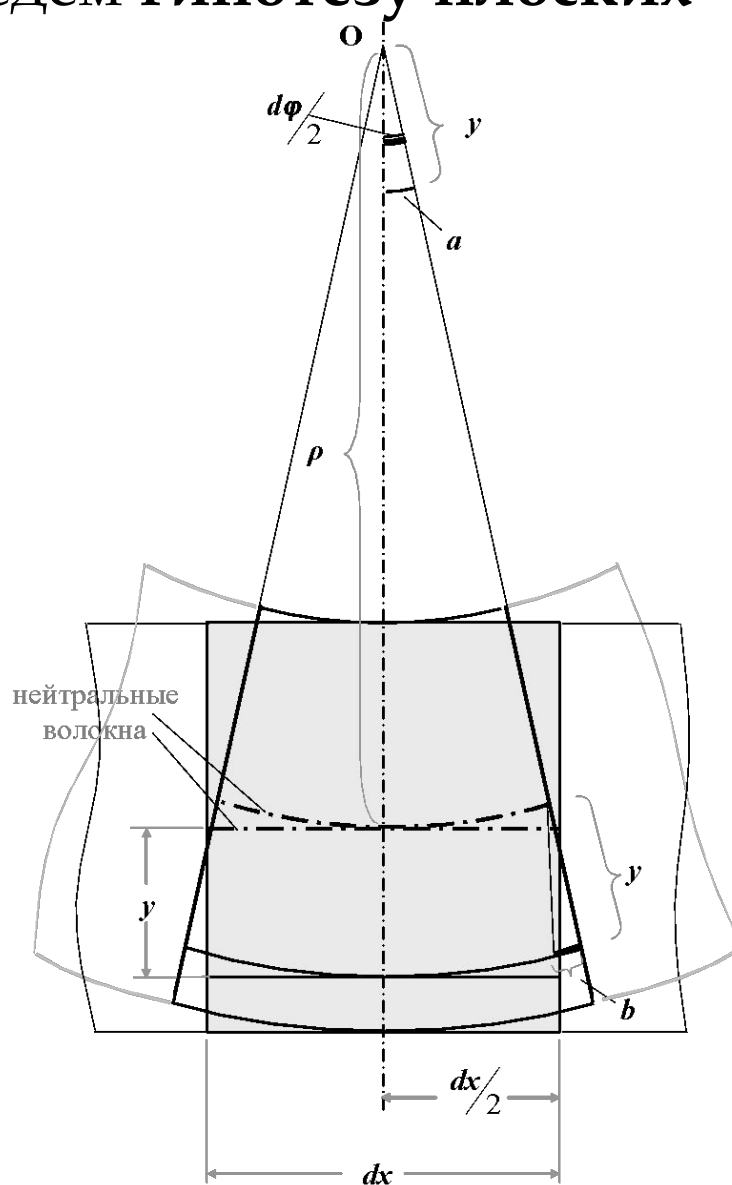
ЗАДАЧА ОБ ИЗГИБЕ БАЛКИ

- Этап 2: Формирование математической модели поставленной задачи.
- Изначально прямолинейная балка изгибается под действием на нее некоторых внешних усилий. При фиксированных значениях внешних воздействий балка принимает конкретную искривленную форму.



ЗАДАЧА ОБ ИЗГИБЕ БАЛКИ

- Для упрощения модели введем гипотезу плоских сечений:
- При малых деформациях
- твердых брусьев, балок,
- стержней их поперечные
- сечения, плоские до
- деформирования остаются
- плоскими и после
- деформирования.



ЗАДАЧА ОБ ИЗГИБЕ БАЛКИ

Если допускать, что длина дуги b равна длине дуги a , то относительную линейную деформацию волокон ε_x , вызванную изгибом балки, можно вычислить по упрощенной формуле:

$$\varepsilon_x = \frac{2b}{dx} \approx \frac{2a}{dx} \approx \frac{2 \frac{d\varphi}{2} y}{\rho d\varphi} = \frac{1}{\rho} y$$

Кривизна k балки на ее предельно коротком фрагменте dx равна:

$$k = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\varphi}{dx}$$

а в условиях гипотезы о деформациях:

$k = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{d\varphi}{dx}$ а так как $dx = d\varphi \cdot \rho$, то $k = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{1}{\rho}$

ЗАДАЧА ОБ ИЗГИБЕ БАЛКИ

□ Таким образом, линейная деформация волокон, расположенных на расстоянии y от нейтрального слоя в некотором ее сечении, может быть вычислена по формуле:

$$\varepsilon_x = ky$$

□ Так как балки при их небольшом изгибе фактически не меняют своей толщины, то каждое продольное волокно предельно малой толщины находится в условиях «одноосного» растяжения-сжатия и для вычисления величины нормального напряжения в продольном волокне можно использовать закон Гука:

$$\sigma_x = kEy$$



ЗАДАЧА ОБ ИЗГИБЕ БАЛКИ

Внутреннее продольное усилие вычисляется как сила, равнодействующая нормальному напряжению, распределенному по поперечному сечению этого волокна:

$$N_{\text{в волокне}} = \sigma_x dF$$

где dF – площадь поперечного сечения волокна.

Так как центр тяжести каждого сечения лежит на нулевой линии, то так как в нашей задаче нет нагрузки, которая растягивала или сжимала бы балку, то суммарное продольное внутреннее усилие

$$N = \int \sigma_x dF = \int kE y dF = kE \int y dF$$

равно 0:

$$kE \int y dF = 0.$$



ЗАПИСЬ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Итак, в любом сечении балки, т.е. при любом x :

$$x (0 \leq x \leq l) \quad M_{\text{внутр}} + M_{\text{внешн}} = 0$$

$$M_{\text{внутр}} = kEJ$$

$$k = \frac{\frac{d^2 f}{dx^2}}{\left(1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2\right)^{3/2}} \quad \Rightarrow$$

$$EJ \frac{\frac{d^2 f}{dx^2}}{\left(1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2\right)^{3/2}} = -M_{\text{внешн}}$$



ЗАПИСЬ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

При *малых деформациях*, когда значения перемещений точек деформируемого элемента существенно малы по сравнению с его размерами, можно принять

$$k \approx \frac{d^2 v}{dx^2}$$

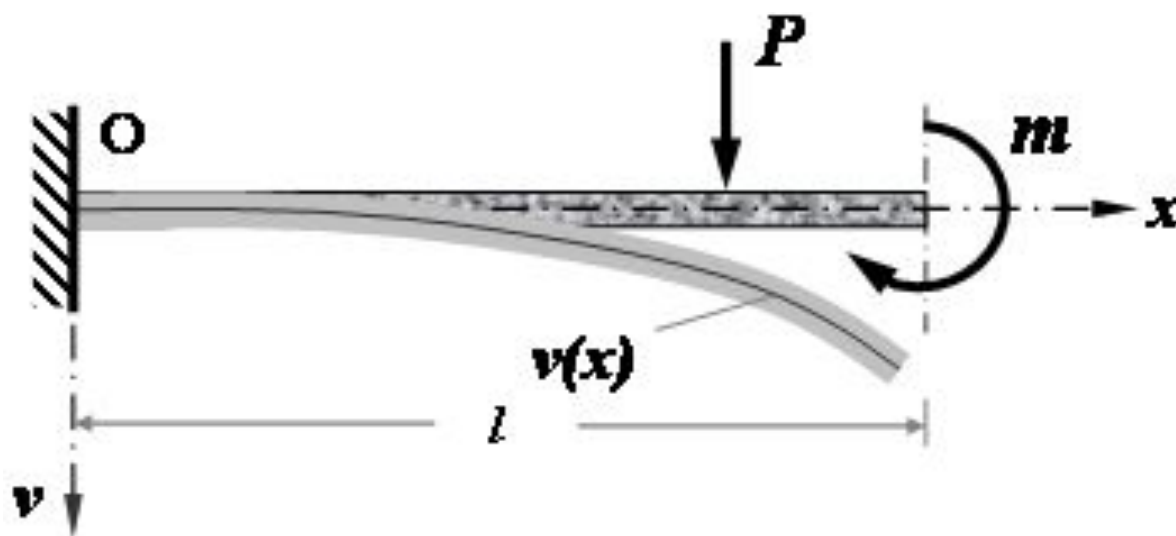
И тогда наше уравнение сводится к приближенному уравнению *оси изогнутого бруса*.

$$EJ \frac{d^2 v}{dx^2} = -M_{\text{внешн}}$$



ЗАПИСЬ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Единственное положение линии прогибов изгибаемой балки можно установить, учтя вместе с представленной выше закономерностью дополнительные сведения о том, как эта балка в пространстве закреплена. Эти сведения формулируются в виде т.н. *краевых условий*.



ЗАПИСЬ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

- Для жестко закрепленной в левом торце консоли запись граничных условий принимает вид:

$$v = 0, \text{ при } x = 0,$$

$$\varphi \approx \operatorname{tg} \varphi = \frac{dv}{dx} = 0, \text{ при } x = 0, \quad (13)$$

- где φ — угол наклона оси изгибаемой балки.



ПРОСТЕЙШАЯ ЗАДАЧА ОБ ИЗГИБЕ КОНСОЛИ

Далее рассмотрим задачу об изгибе консоли под действием одной сосредоточенной поперечной внешней силы P .

Изгибающий момент, создаваемый внешней силой P в произвольном сечении K , может быть вычислен по формуле:

Эту формулу можно записать в виде Хевисайда:

$$M_{\text{внешн}} = -Pb, \text{ где } b = \begin{cases} a - x, & \text{если } 0 \leq x \leq a, \\ 0, & \text{если } x > a. \end{cases}$$

где

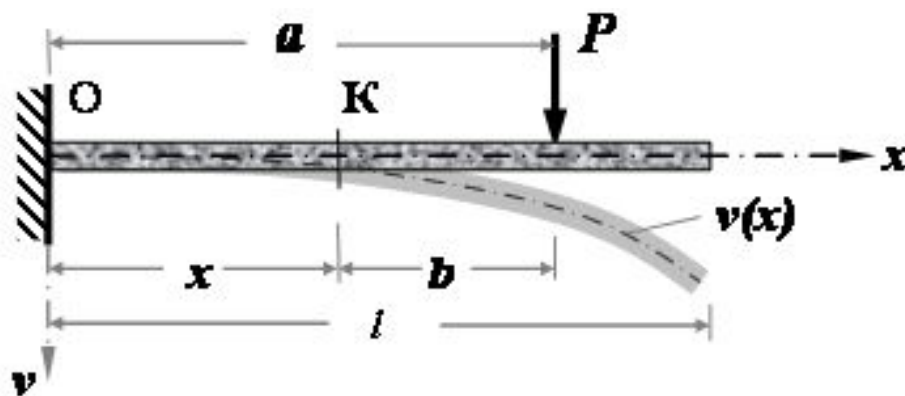
$$M_{\text{внешн}} = -P(1 - \theta(x - a))(a - x),$$

$$\theta(x - \xi) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq \xi, \\ 1, & \text{при } x > \xi. \end{cases}$$



ПРОСТЕЙШАЯ ЗАДАЧА ОБ ИЗГИБЕ КОНСОЛИ

- Простейшей задачей об изгибе консоли является задача изгиба консоли под действием одной сосредоточенной поперечной внешней силы.
- Математическая модель
- для нее будет следующей:



$$\left\{ \begin{array}{l} EJ \frac{d^2 v}{dx^2} = P(1 - \theta(x - a))(a - x), \text{ при } 0 \leq x \leq l, \\ v = 0, \text{ при } x = 0, \\ \frac{dv}{dx} = 0, \text{ при } x = 0. \end{array} \right.$$



ПРОСТЕЙШАЯ ЗАДАЧА ОБ ИЗГИБЕ КОНСОЛИ

- Предложенную выше задачу можно решить аналитически, а можно при помощи метода конечных разностей. При решении методом конечных разностей мы заменим v на f ,
- $\frac{df}{dx}$ заменим на z , $\frac{d^2f}{dx^2}$ на z' , после чего выразим z' и задача
- преобразуется в следующую:

$$\begin{cases} z'(x) = \frac{M_{\text{внешн}}(x)}{EJ(x)} (1 + z^2(x))^{3/2}, \\ y'(x) = z(x), \\ \left. \begin{array}{l} z(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{array} \right\} - \text{начальные условия.} \end{cases}$$



ПРОСТЕЙШАЯ ЗАДАЧА ОБ ИЗГИБЕ КОНСОЛИ

Зададим шаг разбиения h и, заменив производную на ее конечно-разностный аналог, будем рассматривать решение в точках с координатами

$$: \quad x_i: x_i = ih, i = 0, 1, 2, \dots$$

$$\frac{z_{i+1} - z_i}{h} = \frac{M_i}{EJ_i} \sqrt{(1 + z_i^2)^3}$$

Этим уравнениям соответствуют рекуррентные формулы пересчета по методу Эйлера:

$$\begin{cases} y_0 = z_0 = 0, \\ z_{i+1} = z_i + h \frac{M_i}{EJ_i} \sqrt{(1 + z_i^2)^3}, i = 0, 1, 2, \dots, \\ y_{i+1} = y_i + h z_i. \end{cases}$$



ПОНЯТИЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ

- Рассмотрим простейшую задачу Коши вида:

$$\begin{cases} y' = -\lambda y, x > 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases},$$

где $\lambda > 0$

В этом случае известно аналитическое решение

$y = y_0 e^{-\lambda x}$, из которого видно, что $y(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$.

Разностная формула метода Эйлера имеет вид:

$$y_{i+1} = y_i - h\lambda y_i = (1 - h\lambda)y_i.$$

Из нее следует, что

$$y_i = (1 - h\lambda)^i y_0.$$



ПОНЯТИЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ

- Обозначим $q = 1 - h\lambda$, тогда $y_i = q^i y_0$. При этом очевидно, что $y_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$ при $|q| < 1$, что соответствует

$$-1 < 1 - h\lambda < 1 \text{ или } 0 < h\lambda < 2. \rightarrow 0 < h < \frac{2}{\lambda}.$$

Последнее неравенство называется условием **устойчивости** счета.



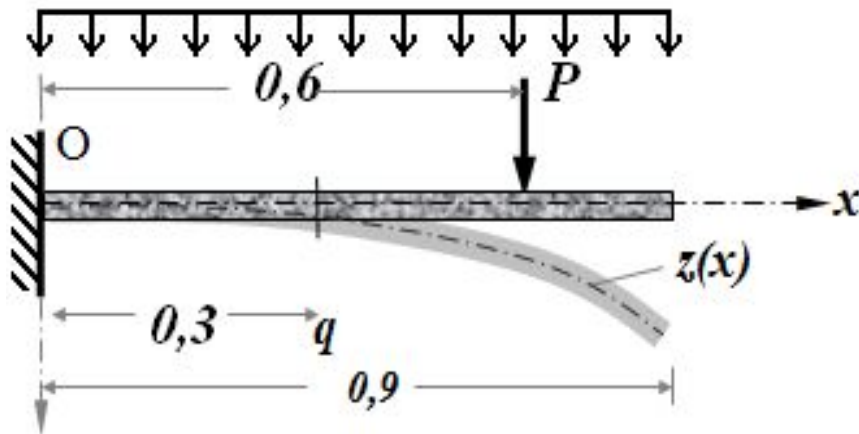
ПРИМЕР

- В качестве примера решим следующую задачу:

$$l = 0,9 \text{ м}; m = 8 \text{ Н} * \text{ м}; P = 16 \text{ Н}; q = 3 \frac{\text{Н}}{\text{м}}. \quad h = 0,1 \text{ м}$$

$$EI(x) = 5 + 10x;$$

$$M(x) = \begin{cases} -m - P(0,6 - x) - q \frac{(0,9 - x)^2}{2} & \text{при } x \in [0; 0,3], \\ -P(0,6 - x) - q \frac{(0,9 - x)^2}{2} & \text{при } x \in (0,3; 0,6), \\ -q \frac{(0,9 - x)^2}{2} & \text{при } x \in [0,6; 0,9]. \end{cases}$$



ПРИМЕР

- Решив эту задачу, мы получим следующий график деформации данной консоли:



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- Задача Коши охватывает достаточно широкий спектр задач, связанных с временными процессами, таких как например распределение температуры или колебание конструкции, и разработка разнообразных приемов для ее решения играет определенную роль в решении строительных проблем.

