Задача Коши

Задача с начальными условиями

Введение

- ***Математическое моделирование*** – это технология изучения и прогнозирования проявлений интересующих нас объектов с использованием возможностей математики.

Введение

- Математическая модель - это приближенное представление закономерности проявления некоторого класса объектов или явлений окружающего мира, выраженное в виде математических конструкций–аналогов и сформулированное в математических терминах и символах.

Введение

- Этапы решения задачи математического моделирования:
- 1) Построение математической модели.
- 2) Исследование задачи на основе построенной модели.
- 3) Оценка адекватности модели и внесение корректив.
- 4) Возможное совершенствование модели.

Введение

- **Моделирование и компьютер:**

Процедуру математического моделирования все чаще неразрывно связывают с использованием компьютеров. В современных информационных технологиях математическое моделирование играет роль «*интеллектуального ядра*» - наукоемкого фильтра, преобразующего «*информационное сырье в готовый продукт, т.е. в точное знание*».

Введение в задачу Коши

- **Задача Коши** — одна из основных задач теории дифференциальных уравнений (обыкновенных и с частными производными); состоит в нахождении решения (интеграла) дифференциального уравнения, удовлетворяющего так называемым начальным условиям (начальным данным).

Введение в задачу Коши

- Основные вопросы, которые связаны с задачей Коши, таковы:
- 1)Существует ли (хотя бы локально) решение задачи Коши?
- 2)Если решение существует, то какова область его существования?
- 3)Является ли решение единственным?
- 4)Если решение единственно, то будет ли оно корректным, то есть непрерывным (в каком-либо смысле) относительно начальных данных?

Введение в задачу Коши

- **Различные постановки задачи Коши:**
- **1)** ДУ первого порядка, разрешённое относительно производной.
- 2) Система n ДУ первого порядка, разрешённая относительно старших производных.
- 3) ДУ n-го порядка, разрешённое относительно старшей производной.

Теоремы о разрешимости задачи Коши для ДУ

- Пусть в области $D \subset R_x \times R_y^n$ рассматривается задача Коши:

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y(x)), y(x_0) = y_0,$$

- где $(x_0, y_0) \in D$. Пусть правая часть является непрерывной функцией в $\overline{D}$. В этих предположениях имеет место теорема Пеано, устанавливающая локальную разрешимость задачи Коши.

Теоремы о разрешимости задачи Коши для ДУ

- Чтобы сформулировать теорему о единственности решения задачи Коши, необходимо наложить дополнительные ограничения на правую часть. Введем константу L, такую что

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \text{ для всех } (x,y_i) \in D, i = 1,2.$$

- Тогда если L существует, то функция f(x,y) удовлетворяет условию Липшица на D относительно y и следовательно задача Коши не может иметь в D более одного решения.

Теоремы о разрешимости задачи Коши для ДУ

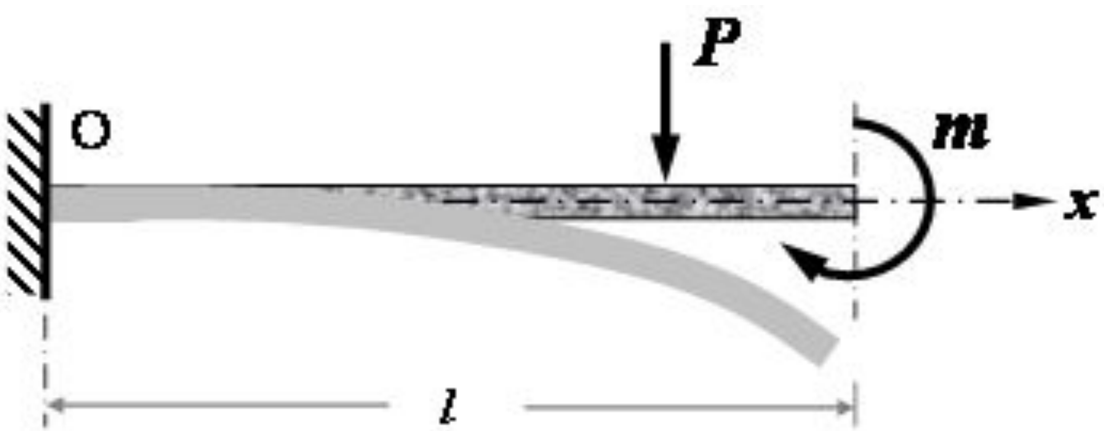
- Для существования глобального решения необходимо наложить условия на рост правой части по y: пусть функция f удовлетворяет условию

$$|f(x,y)| \leq A(|y|+1), (x,y) \in D,$$

- где A>0 - константа не зависящая ни от x, ни от y, тогда задача Коши имеет решение в D.

Задача об изгибе балки

- *По какой линии изогнется балка под действием внешней силовой нагрузки?*



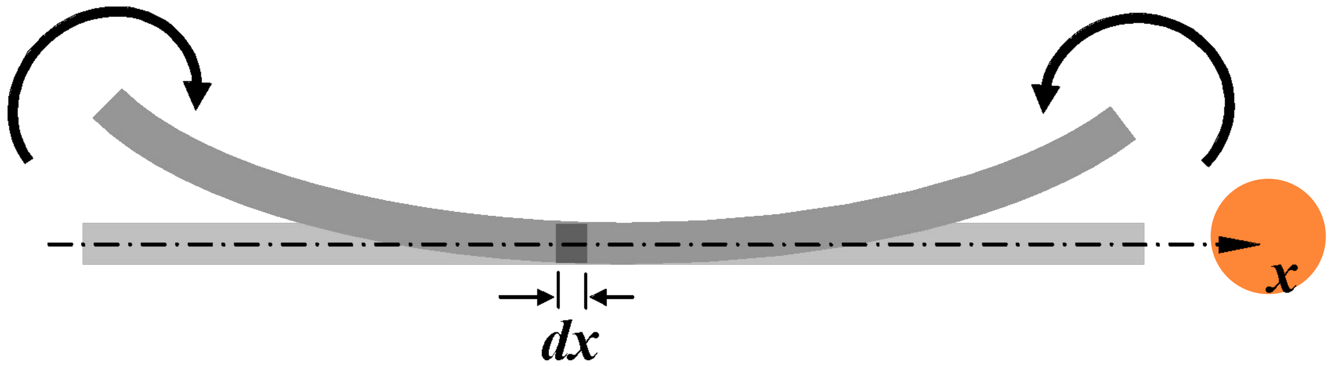
- *Исходные данные:*
- длина балки;
- форма и размеры поперечного сечения;
- материал, из которого изготовлена балка;
- в каких местах и какими способами закреплена балка;
- в каких местах приложены к балке внешние силовые воздействия, ее деформирующие, каков характер их действия;

Задача об изгибе балки

- **Этап 1:** Формулирование идеи, закладываемой в математическую модель.
- **Если внешняя силовая нагрузка, изогнув закрепленную балку, не меняясь, продолжает на нее действовать, изогнувшаяся балка остается в состоянии равновесия, примет состояние покоя.**

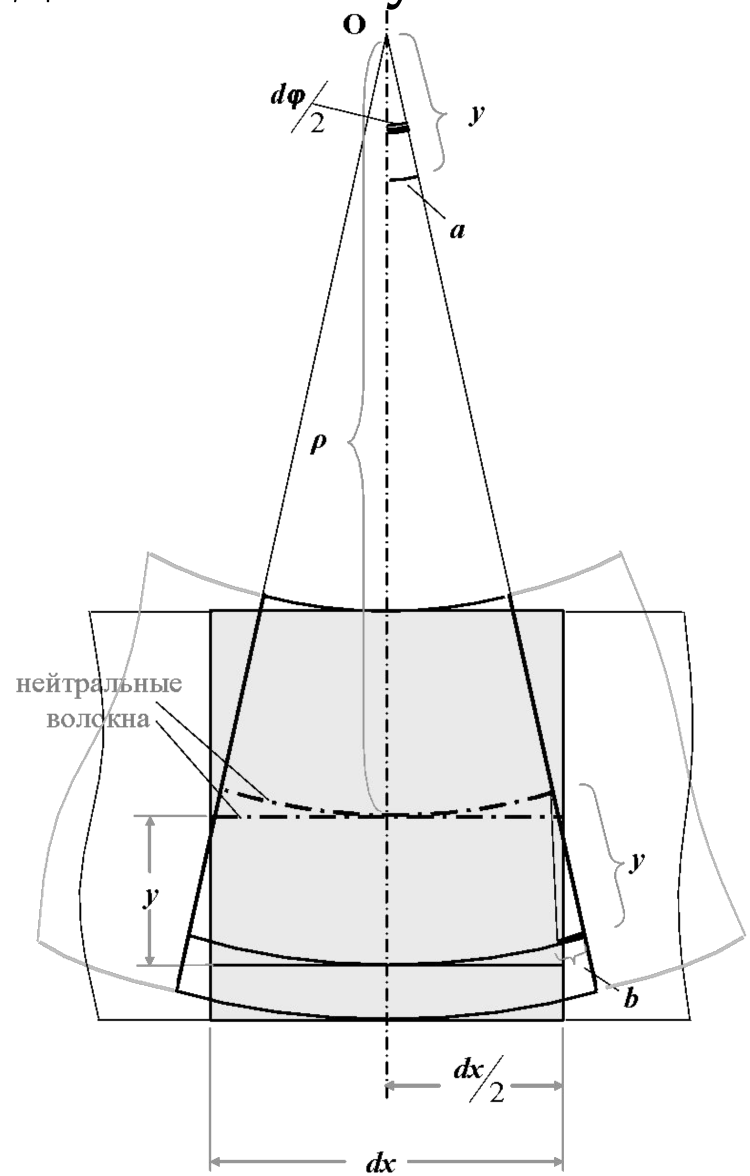
Задача об изгибе балки

- **Этап 2:** Формирование математической модели поставленной задачи.
- Изначально прямолинейная балка изгибается под действием на нее некоторых внешних усилий. При фиксированных значениях внешних воздействий балка принимает конкретную искривленную форму.



Задача об изгибе балки

- Для упрощения модели введем **гипотезу плоских сечений**:
- При *малых деформациях*
- твердых брусьев, балок,
- стержней их поперечные
- сечения, плоские до
- деформирования остаются
- плоскими и после
- деформирования.



Задача об изгибе балки

- Если допускать, что длина дуги b равна длине дуги a, то относительную линейную деформацию волокон ε_x, вызванную изгибом балки, можно вычислить по упрощенной формуле:

$$\varepsilon_x = \frac{2b}{dx} \approx \frac{2a}{dx} \approx \frac{2\frac{d\varphi}{2}y}{\rho d\varphi} = \frac{1}{\rho}y$$

- Кривизна не[illegible]й балки на ее предельно коротком фрагменте dx равна:

$$k = \lim_{dx\to 0}\frac{\varphi}{dx}$$

- а в условиях *гипотезы малости деформаций*:

$$k = \lim_{dx\to 0}\frac{d\varphi}{dx}$$

- а так как $dx = d\varphi \cdot \rho$, то

$$k = \lim_{dx\to 0}\frac{d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{1}{\rho}$$

Задача об изгибе балки

- Таким образом, линейная деформация ε_x волокон, расположенных на расстоянии y от нейтрального слоя в некотором ее сечении, может быть вычислена по формуле:
.
$$\varepsilon_x = ky$$
- Так как балки при их небольшом изгибе фактически не меняют своей толщины, то каждое продольное волокно предельно малой толщины находится в условиях «одноосного» растяжения-сжатия и для вычисления величины нормального напряжения в продольном волокне можно использовать закон Гука:

$$\sigma_x = kEy$$

Задача об изгибе балки

- Внутреннее продольное усилие вычисляется как сила, равнодействующая нормальному напряжению , распределенному по поперечному сечению этого волокна:

$$N_{в\ волокне} = \sigma_x dF$$

- где dF – площадь поперечного сечения волокна.

- Так как центр тяжести каждого сечения лежит на нулевой линии, то так как в нашей задаче нет нагрузки, которая растягивала или сжимала бы балку, то суммарное продольное внутреннее усилие

$$N = \int_{F} \sigma_x dF = \int_F kEydF = kE\int_F ydF$$

- равно 0:

$$kE\int_F ydF = 0.$$

Запись математической модели

- Итак, в любом сечении балки, т.е. при любом :

$$x\ (0 \le x \le l) \quad M_{внутр} + M_{внешн} = 0$$

$$M_{внутр} = kEJ$$

$$k = \frac{\frac{d^2 f}{dx^2}}{\left(1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2\right)^{3/2}} \Longrightarrow$$

$$EJ \frac{\frac{d^2 f}{dx^2}}{\left(1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2\right)^{3/2}} = -M_{\text{внешн}}$$

Запись математической модели

- При *малых деформациях*, когда значения перемещений точек деформируемого элемента существенно малы по сравнению с его размерами, можно принять

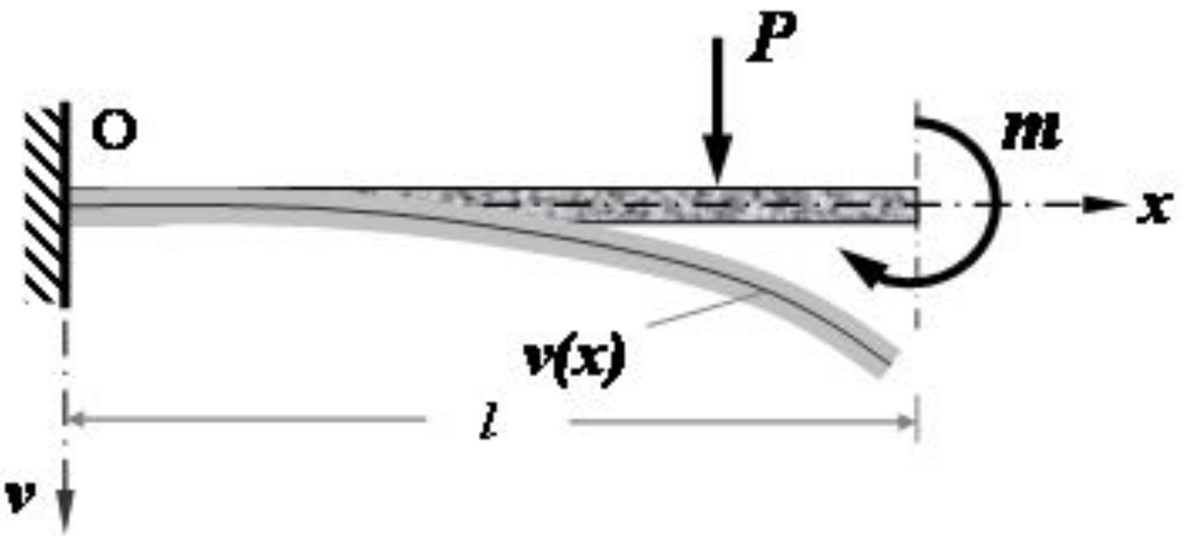
$$k \approx \frac{d^2 v}{dx^2}$$

- И тогда наше уравнение сводится к приближенному *уравнению оси изогнутого бруса*.

$$EJ\frac{d^2 v}{dx^2} = -M_{внешн}$$

Запись математической модели

- Единственное положение линии прогибов изгибаемой балки можно установить, учтя вместе с представленной выше закономерностью дополнительные сведения о том, как эта балка в пространстве закреплена. Эти сведения формулируются в виде т.н. *краевых условий*.



Запись математической модели

- Для жестко закрепленной в левом торце консоли запись граничных условий принимает вид:

$$v = 0, при\ x = 0,$$

$$\varphi \approx tg\varphi = \frac{dv}{dx} = 0, при\ x = 0, (13)$$

- где φ– угол наклона оси изгибаемой балки.

Простейшая задача об изгибе консоли

- Далее рассмотрим ***задачу об изгибе консоли*** под действием одной сосредоточенной поперечной внешней силы Р.
- Изгибающий момент, создаваемый внешней силой Р в произвольном сечении К, может быть вычислен по формуле:

$$M_{внешн} = -Pb, где\ b = \begin{cases} a - x, если\ 0 \le x \le a, \\ 0, если\ x > a. \end{cases}$$

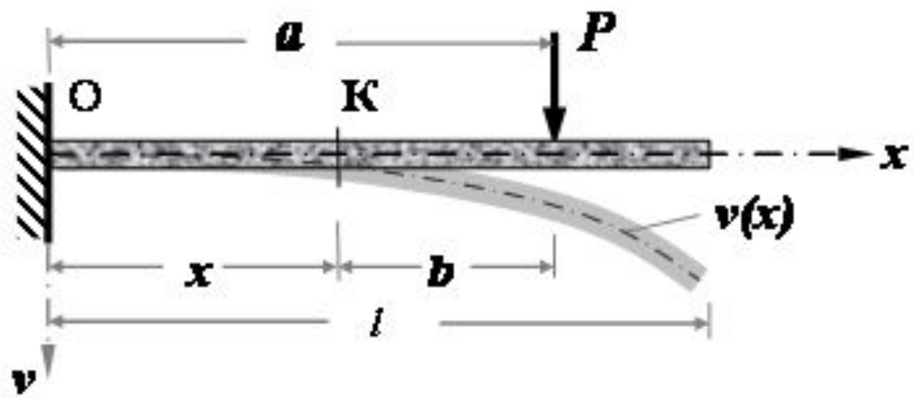
- Эту формулу у … Хевисайда:
- где

$$M_{внешн} = -P\big(1 - \theta(x - a)\big)(a - x),$$

$$\theta(x - \xi) = \begin{cases} 0, при\ x \le \xi, \\ 1, при\ x > \xi. \end{cases}$$

Простейшая задача об изгибе консоли

- ***Простейшей задачей об изгибе консоли*** является задача изгиба консоли под действием одной сосредоточенной поперечной внешней силы.
- Математическая модель
- для нее будет следующей:



$$\begin{cases} EJ\dfrac{d^2v}{dx^2} = P\big(1-\theta(x-a)\big)(a-x), \text{при } 0 \le x \le l, \\ v = 0, \text{при } x = 0, \\ \dfrac{dv}{dx} = 0, \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Простейшая задача об изгибе консоли

- Предложенную выше задачу можно решить аналитически, а можно при помощи метода конечных разностей. При решении методом конечных разностей мы заменим v на f,
- $\frac{df}{dx}$ заменим на z , $\frac{d^2f}{dx^2}$ на z', после чего выразим z' и задача
- преобразуется в следующую:

$$\begin{cases} z'(x) = \dfrac{M_{\text{внешн}}(x)}{EJ(x)}\left(1 + z^2(x)\right)^{3/2}, \\ \qquad\qquad y'(x) = z(x), \\ \left.\begin{aligned} z(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{aligned}\right\} - \text{ начальные условия.} \end{cases}$$

Простейшая задача об изгибе консоли

- Зададим шаг разбиения h и, заменив производную на ее конечно-разностный аналог, будем рассматривать решение в точках с координатами : $x_i : x_i = ih, i = 0,1,2,\ldots$

$$\frac{z_{i+1} - z_i}{h} = \frac{M_i}{EJ_i}\sqrt{(1 + z_i^2)^3}$$

- Этим уравнениям соответствуют рекуррентные формулы пересчета по методу Эйлера:

$$\begin{cases} y_0 = z_0 = 0, \\ z_{i+1} = z_i + h\dfrac{M_i}{EJ_i}\sqrt{(1 + z_i^2)^3}, i = 0,1,2,\ldots, \\ y_{i+1} = y_i + hz_i. \end{cases}$$

Понятие об устойчивости разностной схемы

- Рассмотрим простейшую задачу Коши вида:

$$\begin{cases} y' = -\lambda y, x > 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases},$$

где $\lambda > 0$

В этом случае известно аналитическое решение

$y = y_0 e^{-\lambda x}$, из которого видно, что $y(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} 0.$

Разностная формула метода Эйлера имеет вид:

$$y_{i+1} = y_i - h\lambda y_i = (1 - h\lambda)y_i.$$

Из нее следует, что

$$y_i = (1 - h\lambda)^i y_0.$$

Понятие об устойчивости разностной схемы

- Обозначим $q = 1 - h\lambda$, тогда $y_i = q^i y_0$. При этом очевидно, что $y_i \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$ при $|q| < 1$,

 что соответствует

$$-1 < 1 - h\lambda < 1 \text{ или } 0 < h\lambda < 2. \rightarrow 0 < h < \frac{2}{\lambda}.$$

Последнее неравенство называется условием **устойчивости** счета.

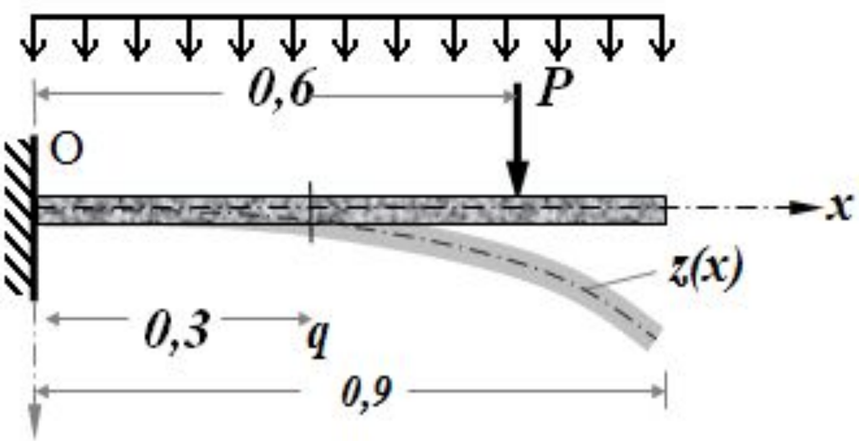
Пример

- В качестве примера решим следующую задачу:

$$l = 0{,}9 \text{ м}; m = 8 \text{ Н} * \text{м}; P = 16 \text{ Н}; q = 3\frac{\text{Н}}{\text{м}}. \; h = 0{,}1 \text{ м}$$

$$EI(x) = 5 + 10x;$$

$$M(x) = \begin{cases} -m - P(0{,}6 - x) - q\dfrac{(0{,}9 - x)^2}{2} \text{ при } x \in [0; 0{,}3], \\ -P(0{,}6 - x) - q\dfrac{(0{,}9 - x)^2}{2} \text{ при } x \in (0{,}3; 0{,}6), \\ -q\dfrac{(0{,}9 - x)^2}{2} \text{ при } x \in [0{,}6; 0{,}9]. \end{cases}$$



Пример

- Решив эту задачу, мы получим следующий график деформации данной консоли:

Заключение

- Задача Коши охватывает достаточно широкий спектр задач, связанных с временными процессами, таких как например распределение температуры или колебание конструкции, и разработка разнообразных приемов для ее решения играет определенную роль в решении строительных проблем.