

Решение систем линейных уравнений методом Гауса

Задача 11.27

Наиболее распространенным методом решения систем линейных уравнений является метод Гаусса, или метод последовательного исключения неизвестных. Сущность этого метода состоит в том, что посредством последовательных исключений неизвестных данная система превращается в ступенчатую (в частности, треугольную) систему, равносильную данной. При практическом решении системы линейных уравнений методом Гаусса удобнее приводить к ступенчатому виду не саму систему уравнений, а расширенную матрицу этой системы, выполняя элементарные преобразования над ее строками. Последовательно получающиеся в ходе преобразования матрицы обычно соединяют знаком эквивалентности

Система уравнений:

$$2x_2 + 4x_3 - x_4 = 12$$

$$-x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = -15$$

$$4x_1 - 8x_3 - x_4 = 12$$

$$2x_1 - x_2 - 4x_3 - 2x_4 = -3$$

Приведем данные уравнения к виду расширенной матрицы 5×4 этой системы

$$\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -2 & -1 & -15 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 12 \\ 4 & 0 & -8 & -1 & 12 \\ 2 & -1 & -4 & -2 & -3 \end{array}$$

Произведем следующие элементарные преобразования над ее строками:

а) перемножая все элементы первой строки на 4 и 2 и прибавляя соответственно к 3 и 4 строкам, получаем требуемые нули в первом столбце матрицы

-1	1	-2	-1		-15	(*4)	(*2)
0	2	4	-1		12	↓	↓
4	0	-8	-1		12	+	+
2	-1	-4	-2		-3	+	←

б) в полученной матрице все элементы второй строки умножаем на (-2) и прибавляем к третьей строке, затем делим все элементы второй строки на (-2) и прибавляем к четвертой, для получения необходимых нулей во втором столбце.

-1	1	-2	-1	-15		
0	2	4	-1	12	$\cdot(-2)$	$/(-2)$
0	4	-16	-5	-48	+	
0	1	-8	-4	-33	+	

в) В полученной матрице все элементы четвертой строки делим на (-10) и перемножаем на 24

$$\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -2 & -1 & -15 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 12 \\ 0 & 0 & -24 & -3 & -72 \\ 0 & 0 & -10 & -7/2 & -39 & /(-10) & *24 \end{array}$$

г) для получения необходимого нуля в третьем столбце в полученной матрице ко всем элементам четвертой строки прибавляем соответствующие элементы третьей строки

$$\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -2 & -1 & -15 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 12 \\ 0 & 0 & -24 & -3 & -72 \\ 0 & 0 & 24 & 42/5 & 468/5 \end{array} \quad +$$

В полученной матрице для упрощения разделим третью строку на (-3),
а четвертую умножим на 5
и разделим на (-27)

$$\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -2 & -1 & -15 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 12 \\ 0 & 0 & -24 & -3 & -72 & /(-3) \\ 0 & 0 & 0 & 27/5 & 108/5 & *5; /(-27) \end{array}$$

В результате всех этих преобразований данная матрица приводится к треугольному виду:

$$\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -2 & -1 & -15 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 12 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}$$

Подставляя элементы преобразованной диагональной матрицы, получаем систему уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 &= -15 \\ 2x_2 + 4x_3 - x_4 &= 12 \\ 8x_3 + x_4 &= 24 \\ x_4 &= 4 \end{aligned}$$

Из последнего уравнения $x_4 = 4$.
Подставляя это значение в третье уравнение, получаем $x_3 = 2,5$. Далее из второго уравнения получим $x_2 = 3$.
Подставляя в первое уравнение найденные x_2, x_3, x_4 : получаем $x_1 = 9$