B12. Текстовая задача

Всего предлагается 82 вида задач.

№1. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 75 км, одновременно выехали автомобилист и велосипедист. Известно, что за час автомобилист проезжает на 40 км больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста, если известно, что он прибыл в пункт B на 6 часов позже автомобилиста.

Решение:

Для решения данных задач удобно заполнять таблицу:

		Вел.	Авт.
1	v	x	$x+40$
2	t	$\frac{75}{x}$	$\frac{75}{x+40}$
3	S	75	75

Первыми заполняем строки 1 и 3. $t=\frac{S}{v}$

Строка 2 заполняется по смыслу:

Эта строка будет давать уравнение.

Для его составления перечитать задачу.

$$\frac{75}{x}-\frac{75}{x+40}=6 \quad \left(\text{Или } \frac{75}{x}-6=\frac{75}{x+40};\ \frac{75}{x}=\frac{75}{x+40}+6\right)$$

№1. Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 75 км, одновременно выехали автомобилист и велосипедист. Известно, что за час автомобилист проезжает на 40 км больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста, если известно, что он прибыл в пункт В на 6 часов позже автомобилиста.

Решим уравнение:

$$\frac{75}{x}-\frac{75}{x+40}=6$$

$$\frac{75x+3000-75x-6x^2-240x}{x(x+40)}=0$$

$$\begin{cases}-6x^2-240x+3000=0\\ x(x+40)\neq 0\end{cases}$$

$$x^2+40x-500=0$$

$$D=1600+2000=3600$$

$$x_1=\frac{-40+60}{2}=10 \qquad x_2=\frac{-40-60}{2}=-50<0$$

Ответ: 10

№2. Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми 70 км. На следующий день он отправился обратно из В в А со скоростью на 3 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 3 часа. В результате велосипедист затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость велосипедиста из А в В.

Решение:

		А→В	В→А
1	v	x	$x+3$
2	t	$\frac{70}{x}$	$\frac{70}{x+3}$
3	S	70	70

Для составления уравнения используем строку 2 и перечитываем условие задачи

$$\frac{70}{x}=\frac{75}{x+3}+3$$

$$\frac{70x+210-70x-3x^2-9x}{x(x+3)}=0$$

$$\begin{cases} -3x^2-9x+210=0 \\ x(x+3)\neq 0 \end{cases}$$

$$x^2+3x-70=0$$

$$D=9+280=289$$

$$x_1=\frac{-3+17}{2}=7 \qquad x_2=\frac{-3-17}{2}=-10<0$$

Ответ: 7

№3. Моторная лодка прошла против течения реки 112 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 6 часов меньше. Найдите скорость течения, если скорость лодки в неподвижной воде равна 11 км/ч.

Решение: Пусть х км/ч – скорость течения реки.

		По течен.	Против течен.
1	v	$11+x$	$11-x$
2	t	$\frac{112}{11+x}$	$\frac{112}{11-x}$
3	S	112	112

$$\frac{112}{11+x}+6=\frac{112}{11-x}$$

$$\frac{112}{11+x}-\frac{112}{11-x}+6=0$$

$$\frac{112\cdot 11-112\cdot x-112\cdot 11-112\cdot x+6\cdot(11^2-x^2)}{(11+x)(11-x)}=0$$

$$\begin{cases} -224x+726-6x^2=0 \\ x\neq \pm 11 \end{cases}$$

$$3x^2+112x-363=0$$

$$D=12544+4356=16900$$

$$x_1=\frac{-112+130}{6}=3 \qquad x_2=\frac{-112-130}{6}<0$$

Ответ: 3

Даша и Маша пропалывают грядку за 12 минут, а одна Маша за 20 минут. За сколько минут пропалывает грядку одна Даша.

Решение:

	Даша	**Маша**	**Даша и Маша**
Произв.	*1/12-1/20=1/30*	*1/20*	*1/12*
Время	*1:1/30=30*	*20*	*12*
Работа	*1*	*1*	*1*

1.Вся выполняемая работа – это 1.
2.Начинаем заполнять последний столбец таблицы. Время выполнения работы12 минут, чтобы найти производительность, работу делим на время. Совместная производительность – 1/12. 3. Заполняем третий столбец аналогично, получаем 1/20.
4.Заполняем второй столбец. Находим производительность 1/30.
5.Чтобы найти время, работу делим на производительность.

Ответ: 30

В помощь садовому насосу, перекачивающему 5 литров воды за 2 минуты, подключили второй насос, перекачивающий тот же объем воды за 3 минуты. Сколько минут эти два насоса должны работать совместно, чтобы перекачать 25 литров воды.

Решение:

	1-й насос	**2-й насос**	**1 и 2 насосы**
Произв.	*5/2*	*5/3*	*5/2+5/3=25/6*
Время	*2*	*3*	*25:25/6=6*
Работа	*5*	*5*	*25*

1.Заполняем второй столбец. Дана работа-5, время -2. Находим производительность – 5/2.
2.Заполняем третий столбец аналогично.
3. Заполняем четвертый столбец. Работа дана -25. Находим совместную производительность – 25/6.
4.Находим время – 6. Ответ:6.

С1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - Cos\,x = 0 \\ \left(1 - 5\sqrt{Cos\,x}\right)\left(3y - 8\right) = 0 \end{cases}$$

1. ОДЗ: $Cos\,x \geq 0$

2. Помним, что $-1 \leq Cos\,x \leq 1$

3. Из второго уравнения получаем:

$$1 - 5\sqrt{Cos\,x} = 0 \qquad \text{или} \qquad 3y - 8 = 0$$

$$5\sqrt{Cos\,x} = 1 \qquad\qquad 3y = 8$$

$$\sqrt{Cos\,x} = \frac{1}{5} \qquad\qquad y = \frac{8}{3}$$

$$Cos\,x = \frac{1}{25}$$

4. Подставим найденные величины в первое уравнение системы:

$$y - \frac{1}{25} = 0 \qquad\qquad \frac{8}{3} - Cos\,x = 0$$

$$y = \frac{1}{25} \qquad\qquad Cos\,x = \frac{8}{3}$$

Это уравнение не имеет корней, так как

$$-1 \leq Cos\,x \leq 1$$

5. Если $Cos\,x = \frac{1}{25}$ (удовлетворяет ОДЗ), то $x = \pm \arccos\frac{1}{25} + 2\pi k; k \in Z$

Ответ: $\left(\pm \arccos\frac{1}{25} + 2\pi k; \frac{1}{25}\right)$

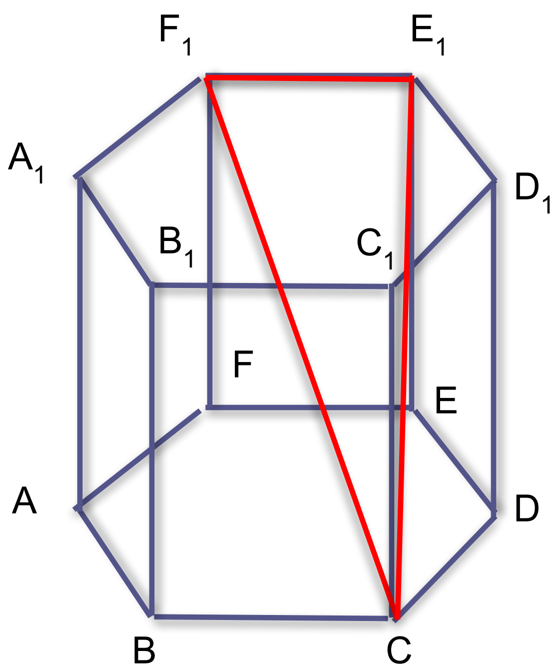
В задачах С1 особое внимание уделить области допустимых значений.

Т.е. это задание предполагает «отсев» посторонних корней

Помним!

Функция	ОДЗ	
$y=\sqrt{A}$	$A\ge 0$	
$y=\dfrac{A}{B}$	$B\ne 0$	
$y=tg\,x$	$Cos\,x\ne 0$	$-1\le Cos\,x\le 1$ $-1\le Sin\,x\le 1$
$y=\log_A B$	$A>0$ $A\ne 1$ $B>0$	

C2. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1, найдите расстояние от точки C до прямой F_1E_1.



Алгоритм нахождения расстояния от точки до отрезка:

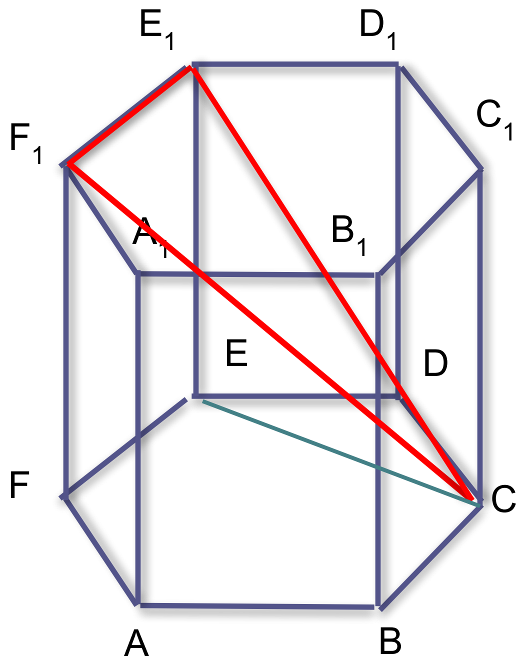
1) Построить треугольник, вершинами которого будут концы данного отрезка и данная точка (в нашем случае CF_1E_1)

2) Провести в данном треугольнике высоту к данному отрезку (он является стороной треугольника) и найти эту высоту (в нашем случае нужно провести высоту из точку C к F_1E_1)

Рисунок удобнее развернуть!

C2. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1, найдите расстояние от точки C до прямой F_1E_1.

Решение: **1 способ**: (для более подготовленных учащихся)



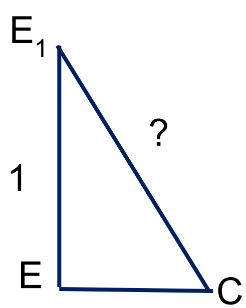
1) В правильном шестиугольнике ABCDEF $EC \perp FE$.

E_1C - наклонная, EC – проекция, по теореме о трех перпендикулярах

$E_1C \perp FE$. Но т.к. $F_1E_1 \parallel FE \Rightarrow CE_1 \perp F_1E_1$

(Можно иначе. Отрезок $CE_1 \subset (E_1EC)$,

$F_1E_1 \perp (E_1EC) \Rightarrow CE_1 \perp F_1E_1$)



2) Рассмотрим Δ CEE1.

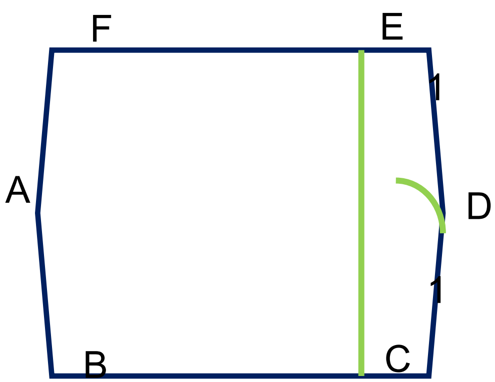
CE_1 – искомое расстояние.

Для нахождения данного отрезка найдем длину отрезка EC.

С2. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1, найдите расстояние от точки С до прямой F_1E_1.

Решение:

$$\angle D = 120°$$



По теореме косинусов

$$EC^2 = ED^2 + DC^2 - 2 \cdot ED \cdot DC \cdot Cos\angle D$$

$$EC^2 = 1 + 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot Cos120°$$

$$EC^2 = 2 + 2 \cdot \frac{1}{2}$$

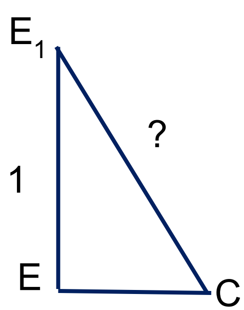
$$EC = \sqrt{3}$$

В Δ EE1C по т. Пифагора

$$E_1C^2 = EC^2 + EE_1{}^2$$

$$E_1C^2 = 1^2 + \sqrt{3}^2$$

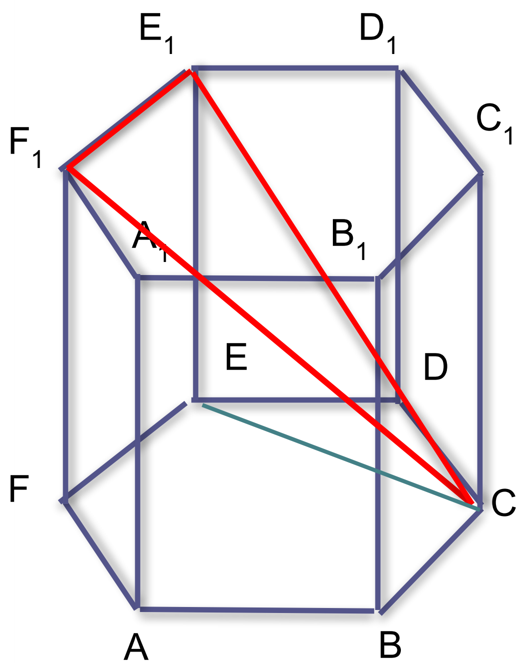
$$E_1C = 2$$



Ответ: 2

С2. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1, найдите расстояние от точки С до прямой F_1E_1.

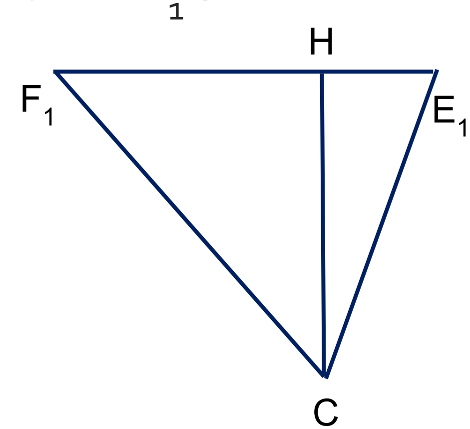
Решение: **<u>2 способ</u>:** Менее подготовленный ученик может не заметить, что искомое расстояние CE_1. Тогда решение может выглядеть так.

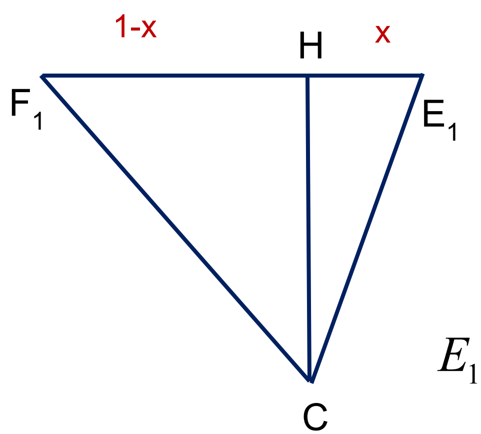


В каком-то треугольнике $\Delta E_1F_1C_1$ проведем высоту **CH** и будем её искать.

План:

1. Найти **CE** (из шестиугольника ABCDEF)
2. ΔFF_1C, найти по т. Пифагора CF_1
3. Как в 1 способе найти E_1C
4. Найти высоту.





Для этого $HE_1 = x$, $F_1H = 1-x$, тогда

Из $\Delta\, E_1HC$: $CH^2 = E_1C^2 - x^2$

Из $\Delta\, F_1HC$: $CH^2 = F_1C^2 - (1-x)^2$

$$E_1C^2 - (1-x)^2 = F_1C^2 - x^2$$

Найдем x, решив линейное уравнение.

Мы получим $x = 0$. Это говорит о том, что CH совпадает с CE_1.

Ответ: 2

С3. Решить неравенство. (Из сборника «Математика. Подготовка к ЕГЭ» под редакцией Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова)

$$\log_3\left(\left(5^{-x^2}-7\right)\cdot\left(5^{-x^2+9}-1\right)\right)+\log_3\frac{5^{-x^2}-7}{5^{-x^2+9}-1}-\log_3\left(5^{2-x^2}-1\right)^2>0$$

Решение:

Пусть $5^{-x^2}=t,\quad 0<t\le 1$

Тогда неравенство запишем так:

$$\log_3\left((t-7)\cdot\left(5^9\cdot t-1\right)\right)+\log_3\frac{t-7}{5^9\cdot t-1}-\log_3(25t-1)^2>0$$

$T.\,к.\;\; 0<t\le 1,\;\; t-7<0,\;\; то\;\; 5^9\cdot t-1<0\;\Rightarrow\; 5^9\cdot t<1\Rightarrow t<\dfrac{1}{5^9},\; т.е.\; 0<t<\dfrac{1}{5^9},\; тогда$

$$\log_3|t-7|+\log_3\left|5^9\cdot t-1\right|+\log_3|t-7|-\log_3\left|5^9\cdot t-1\right|-\log_3(25t-1)^2>0$$

$$2\log_3|t-7|>\log_3(25t-1)^2$$

$$\log_3(t-7)^2>\log_3(25t-1)^2$$

$$\begin{cases}\log_3(t-7)^2>\log_3(25t-1)^2\\ 0<t<\dfrac{1}{5^9}\end{cases}$$

С3. Решить неравенство. (Из сборника «Математика подготовки к ЕГЭ» под редакцией Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова)

$$\log_3\left(\left(5^{-x}-7\right)\cdot\left(5^{-x+9}-1\right)\right)+\log_3\frac{5^{-x^2}-7}{5^{-x^2-9}-1}-\log_3\left(5^{2-x^2}-1\right)^2>0$$

Решение:

$$\begin{cases}(t-7)^2>(25t-1)^2\\ 0<t<\dfrac{1}{5^9}\end{cases}\qquad \begin{cases}7-t>1-25t\\ 0<t<\dfrac{1}{5^9}\end{cases}\qquad \begin{cases}t>\dfrac{1}{4}\\ 0<t<\dfrac{1}{5^9}\end{cases}\Leftrightarrow 0<t<5^{-9}$$

Обратная замена:

$$0<5^{-x^2}<5^{-9}$$

$$-x^2<-9$$

$$x^2>9\Leftrightarrow x\in(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$$

Ответ: $x\in(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$

Задание С4 требует очень прочных знаний планиметрии.

Обратить внимание на то, что задача обязательно имеет два возможных случая.

Их оба необходимо рассмотреть при решении задачи.

Задание С5 - с параметром.

Задание С6 - олимпиадного характера.

Данные задания требуют хорошей математической подготовки.

Для подготовки можно использовать сборник «Математика подготовки к ЕГЭ» под редакцией Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова.