

МГГУ – 2008

КАФЕДРА «Теоретическая и прикладная механика»

# ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

Кинематический анализ шарнирно-  
рычажных механизмов

Доктор технических наук, профессор  
АЛЮШИН Юрий Алексеевич

# ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

- Механизмами называют изолированную часть некоторой механической системы (без источников и потребителей энергии), *предназначенную для преобразования движения одного тела в требуемое движение одного или нескольких других тел.*

**МЕХАНИЗМ** – система тел, предназначенная для преобразования заданного движения одного или нескольких тел в требуемое движение других твердых тел

**ПЛОСКИЕ МЕХАНИЗМЫ** – механизмы, траектории всех частиц подвижных звеньев которых расположены в плоскостях, параллельных одной и той же неподвижной плоскости.

**Шарнирно-рычажными** называют механизмы из абсолютно твердых тел (АТТ), соединенных между собой цилиндрическими шарнирами, допускающими их относительное вращение.

# Лихтенхельдт В. Синтез

**МЕХАНИЗМОВ.** – М.: Наука, 1978. – 228 с.

- «Вопрос о том, какие механизмы – кулачковые, зубчатые или шарнирные – целесообразнее применять для осуществления рабочего процесса, чаще всего решается в пользу кулачковых или зубчатых механизмов, хотя во многих случаях шарнирные механизмы представляют собой гораздо более удобную и совершенную конструкцию... Причиной этого является то обстоятельство, что методы расчета звеньев шарнирных механизмов сложны и мало доступны многим конструкторам. Им кажется, что в каждом отдельном случае проще и удобнее для заданного закона движения звена механизма рассчитать кулачковый механизм, чем шарнирный»

# Звенья шарнирно-рычажных механизмов

• **ЗВЕНО** = твердое тело (часть механизма), состоящее из одной или нескольких жестко связанных деталей, участвующих в движении как одно целое.

*Виды звеньев:*

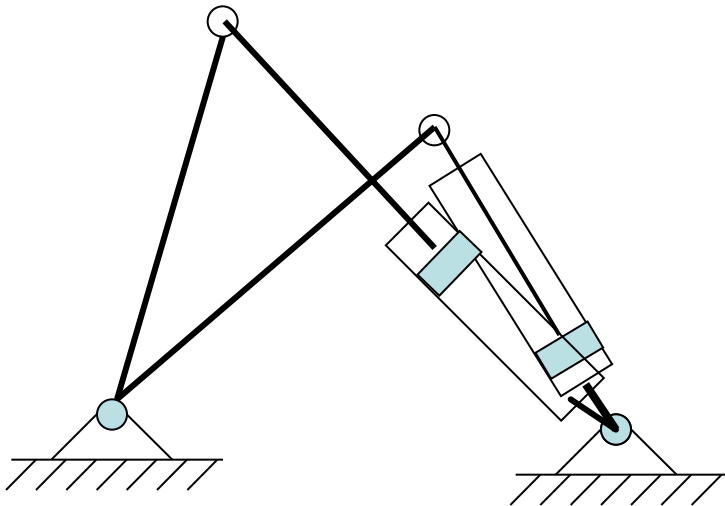
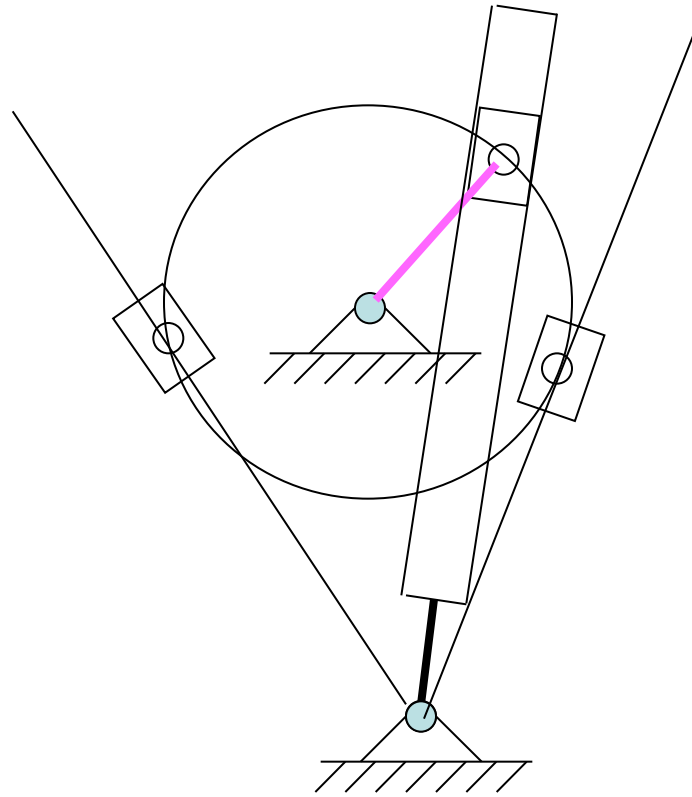
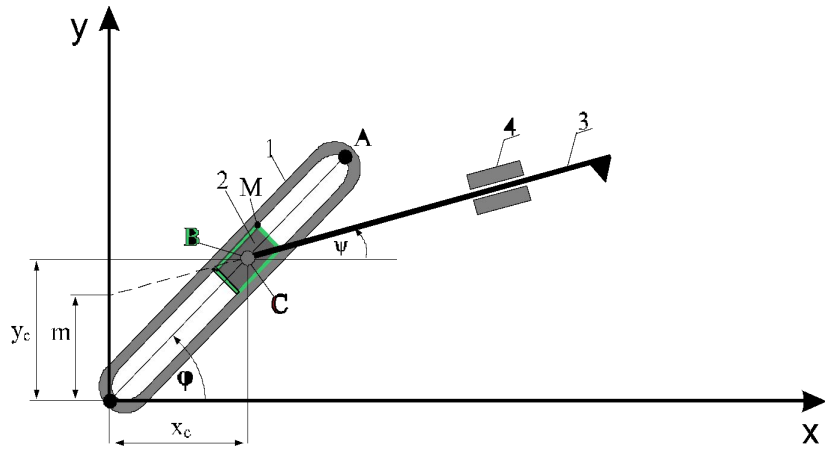
**СТОЙКА, КРИВОШИП, КОРОМЫСЛО, ШАТУН, ПОЛЗУН,**

- **Стойка** – неподвижное звено механизма, на котором закреплены все другие его звенья.
- **Кривошип** – звено, совершающее полный оборот вокруг неподвижной оси.
- **Коромысло** – звено, совершающее колебательное движение (неполный оборот) вокруг неподвижной оси.
- **Шатун** – звено, шарнирно соединённое с двумя (или более) другими подвижными звеньями и совершающее плоскопараллельное движение в виде вращения вокруг подвижного полюса (ППД).
- **Ползун** – звено, совершающее прямолинейное поступательное движение по фиксированному направляющему.
- **Кулисная пара** – два подвижных смежных звена с относительным поступательным движением друг относительно друга.

# Различные варианты определения «кулисы»

- **Кулиса** – звено, вращающееся относительно подвижной оси (с направляющими для ползуна - камня) и образующее с другим подвижным звеном скользящую пару.
- **КУЛИСА** = подвижная направляющая для ползуна (в т.ч. и коромысло, если по нему скользит ползушка) = звено, которое несет подвижные направляющие для ползуна.
- **КУЛИСА (СЭС)** –звено кулисного механизма, вращающееся вокруг НЕПОДВИЖНОЙ оси и образующее с другим подвижным звеном (**ползуном**) поступательную пару.
- **КУЛИСА** (*Политехнический Словарь, фр. – паз, желобок, выемка, скользить*) = подвижное звено кулисного механизма, образующее с другим подвижным звеном поступательную пару. *Ползун, перемещающийся по направляющим, иногда называют камнем. Кулисы бывают вращающиеся, качающиеся, прямолинейно движущиеся и пр.*
- **КУЛИСА** = подвижное звено кулисной пары, которое несет подвижные направляющие для ползуна, в т.ч. и коромысло, если по нему скользит ползун (-шка), совершающий поступательное или составное (сложное) движение.
- Фролов К.В.: «Кулисой обычно называют звено с пазом, по которому перемещается ползун (кулисный камень)»
- *В гидроприводах широко применяется разновидность кулисного механизма (рис. 2.4г, стр. 25, ТММ-87), в котором кулису с камнем заменяет цилиндр с поршнем*

# Варианты кулисных механизмов



# Переход от плоскопараллельного движения к вращательному и поступательному движениям

$$x = x_p + (\alpha - \alpha_p) \cos(\Delta\varphi) - (\beta - \beta_p) \sin(\Delta\varphi)$$

$$y = y_p + (\alpha - \alpha_p) \sin(\Delta\varphi) + (\beta - \beta_p) \cos(\Delta\varphi)$$

Вращательное движение относительно неподвижной оси  $P(a,b)$ :

$$x_P = \alpha_P = a$$

$$y_P = \beta_P = b$$

$$x = a + (\alpha - a) \cos(\Delta\varphi) - (\beta - b) \sin(\Delta\varphi)$$

$$y = b + (\alpha - a) \sin(\Delta\varphi) + (\beta - b) \cos(\Delta\varphi)$$

$$\sin(0) = 0$$

$$\cos(0) = 1$$

Поступательное движение

$$x_P - \alpha_P = u_x(t)$$

$$y_P - \beta_P = u_y(t)$$

$$\Delta\varphi = 0$$

$$x = \alpha + u_x(t),$$

$$y = \beta + u_y(t),$$

$$z = \gamma$$

# Координаты, компоненты скорости и ускорения для *кривошипа*

$$x = \alpha \cos(\Delta\varphi) - \beta \sin(\Delta\varphi) \quad y = \alpha \sin(\Delta\varphi) + \beta \cos(\Delta\varphi)$$

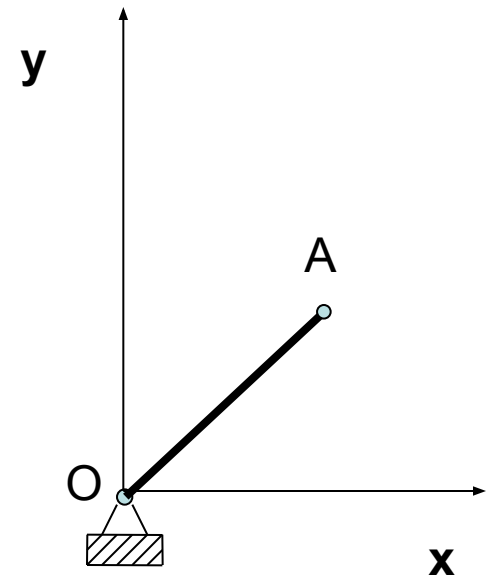
Компоненты вектора скорости

$$x_t = -\varphi_t [\alpha \sin(\Delta\varphi) + \beta \cos(\Delta\varphi)] = -\varphi_t y$$

$$y_t = \varphi_t [\alpha \cos(\Delta\varphi) - \beta \sin(\Delta\varphi)] = \varphi_t x$$

Компоненты вектора ускорения

$$x_{tt} = -\varphi_{tt} y - \varphi_t y_t \quad y_{tt} = \varphi_{tt} x + \varphi_t x_t$$





# Координаты, компоненты скорости и ускорения для **КОРОМЫСЛА**

## Координаты

$$x = a + (\alpha - a) \cos(\Delta\xi) - (\beta - b) \sin(\Delta\xi)$$

$$y = b + (\alpha - a) \sin(\Delta\xi) + (\beta - b) \cos(\Delta\xi)$$

## Компоненты вектора скорости

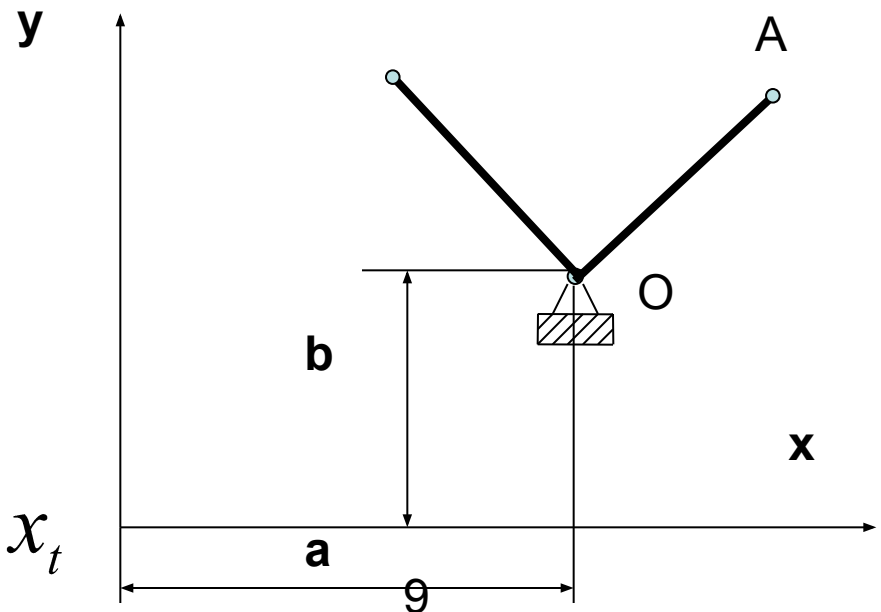
$$x_t = -\xi_t (y - b)$$

$$y_t = \xi_t (x - a)$$

## Компоненты вектора ускорения

$$x_{tt} = -\xi_{tt} (y - b) - \xi_t y_t$$

$$y_{tt} = -\xi_{tt} (x - a) - \xi_t x_t$$



# Координаты, компоненты скорости и ускорения для *шатуна*

Уравнения движения  
в форме Лагранжа

$$x = x_P + (\alpha - \alpha_P) \cos \Delta\psi - (\beta - \beta_P) \sin \Delta\psi$$

Компоненты  
скорости:

$$y = y_P + (\alpha - \alpha_P) \sin \Delta\psi + (\beta - \beta_P) \cos \Delta\psi$$

в форме  
Лагранжа

$$\dot{x}_t = (\dot{x}_t)_P - \dot{\psi}_t [(\alpha - \alpha_P) \sin \Delta\psi + (\beta - \beta_P) \cos \Delta\psi]$$

$$\dot{y}_t = (\dot{y}_t)_P + \dot{\psi}_t [(\alpha - \alpha_P) \cos \Delta\psi - (\beta - \beta_P) \sin \Delta\psi]$$

в форме  
Эйлера

$$\dot{x}_t = (\dot{x}_t)_P - \dot{\psi}_t (y - y_P)$$

$$\dot{y}_t = (\dot{y}_t)_P + \dot{\psi}_t (x - x_P)$$

Компоненты ускорения  
в форме Эйлера

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{tt} &= (\ddot{x}_{tt})_P - \ddot{\psi}_{tt} (y - y_P) - \dot{\psi}_t [y_t - (\dot{y}_t)_P] = \\ &= (\ddot{x}_{tt})_P - \ddot{\psi}_{tt} (y - y_P) - \dot{\psi}_t^2 (x - x_P) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_{tt} &= (\ddot{y}_{tt})_P + \ddot{\psi}_{tt} (x - x_P) - \dot{\psi}_t [x_t - (\dot{x}_t)_P] = \\ &= (\ddot{y}_{tt})_P - \ddot{\psi}_{tt} (x - x_P) - \dot{\psi}_t^2 (y - \overset{10}{y}_P) \end{aligned}$$

# Координаты, компоненты скорости и ускорения для ползуна

- Уравнения движения

$$x - \alpha = x_P - \alpha_P = u_x(t), \quad x = \alpha + (x_P - \alpha_P)$$
$$y - \beta = y_P - \beta_P = u_y(t), \quad y = \beta + (y_P - \beta_P)$$

Компоненты вектора перемещения  $u_i(t) = x_i - \alpha_i = [u_i(t)]_P$

Компоненты вектора скорости  $u_{i,t}(t) = x_{i,t} \equiv v_i = (x_{i,t})_P$

$$x_t = (x_t)_P$$

$$y_t = (y_t)_P$$

Компоненты вектора ускорения  $u_{i,tt}(t) = x_{i,tt} \equiv w_i = (x_{i,tt})_P$

$$x_{tt} = (x_{tt})_P$$

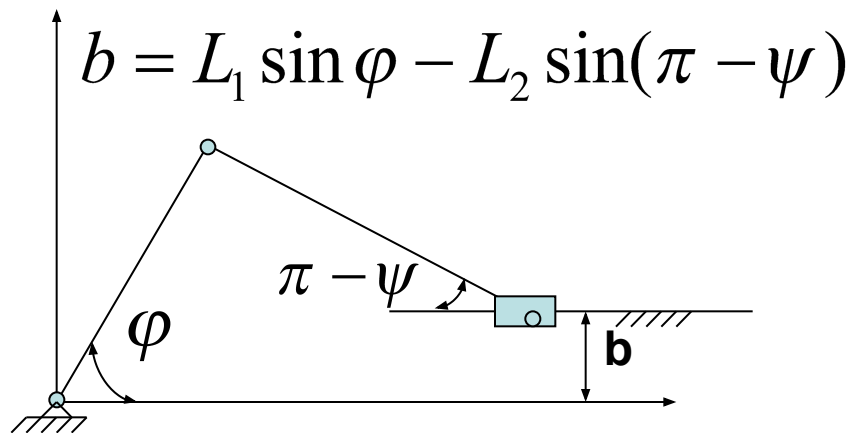
$$y_{tt} = (y_{tt})_P$$

# *Кинематические связи в шарнирно - рычажных механизмах*

- Кинематическими связями называют соотношения между постоянными (расстояния между осями шарниров) и переменными (углы наклона линий, соединяющих оси шарниров) параметрами механической системы в ***произвольный*** момент времени.

Кинематические связи – это граничные условия, записанные в виде математических уравнений для произвольного момента времени

# Кривошипно-ползунный механизм



$$\sin(\pi - \psi) = (L_1 \sin \varphi - b) / L_2$$

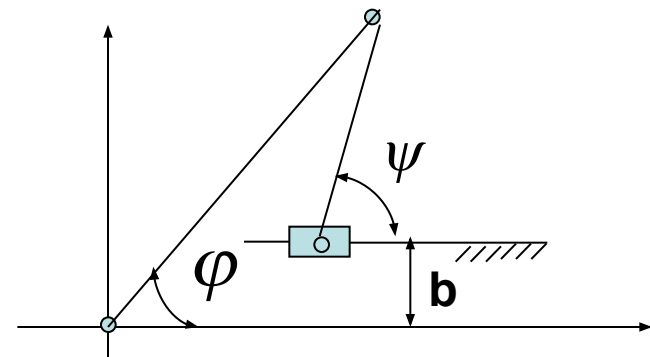
$$\psi = \pi - \arcsin\left(\frac{L_1 \sin \varphi - b}{L_2}\right)$$

$$\psi_t = -\varphi_t \frac{L_1 \cos \varphi}{L_2 \cos(\pi - \psi)}$$

$$\psi_{tt} = -\varphi_{tt} \frac{L_1 \cos \varphi}{L_2 \cos \psi} + \varphi_t^2 \frac{L_1}{L_2} \left( \frac{\sin \varphi}{\cos \psi} + \frac{L_1 \cos^2 \varphi}{L_2 \cos^2 \psi} \operatorname{tg} \psi \right)$$

$$x_{tt} = (x_{tt})_A - \psi_{tt} (y - y_A) - \psi_t [y_t - (y_t)_A] \quad y_{tt} = (y_{tt})_A + \psi_{tt} (x - x_A) + \psi_t [x_t - (x_t)_A]$$

$$b = L_1 \sin \varphi - L_2 \sin \psi$$

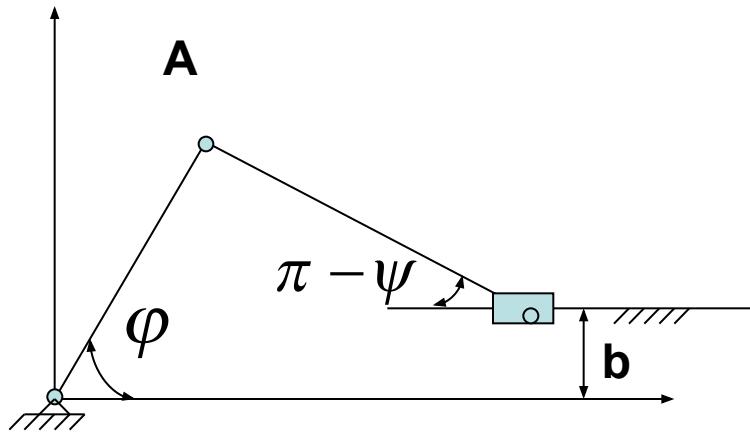


$$\sin \psi = (L_1 \sin \varphi - b) / L_2$$

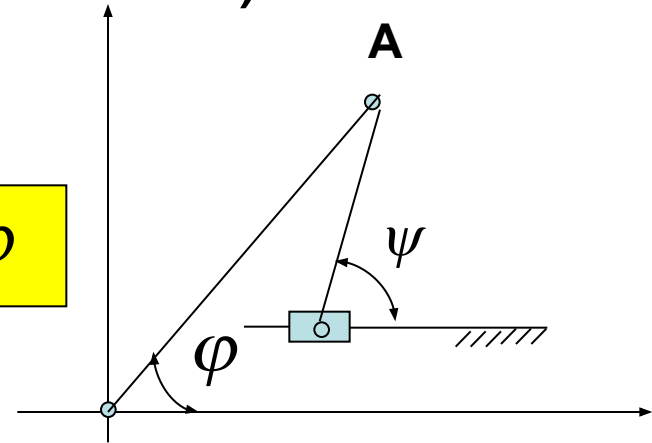
$$\psi = \arcsin\left(\frac{L_1 \sin \varphi - b}{L_2}\right)$$

$$\psi_t = \varphi_t \frac{L_1 \cos \varphi}{L_2 \cos \psi}$$

# Кривошипно-ползунный механизм (расчет через координаты точки А)



$$y_A = L_1 \sin \varphi$$



$$\sin(\pi - \psi) = (L_1 \sin \varphi - b) / L_2$$

$$\psi = \pi - \arcsin\left(\frac{y_A - b}{L_2}\right)$$

$$\psi_t = -\frac{(y_t)_A}{L_2 \cos(\pi - \psi)}$$

$$\sin \psi = (L_1 \sin \varphi - b) / L_2$$

$$\psi = \arcsin\left(\frac{y_A - b}{L_2}\right)$$

$$\psi_t = \frac{(y_t)_A}{L_2 \cos \psi}$$

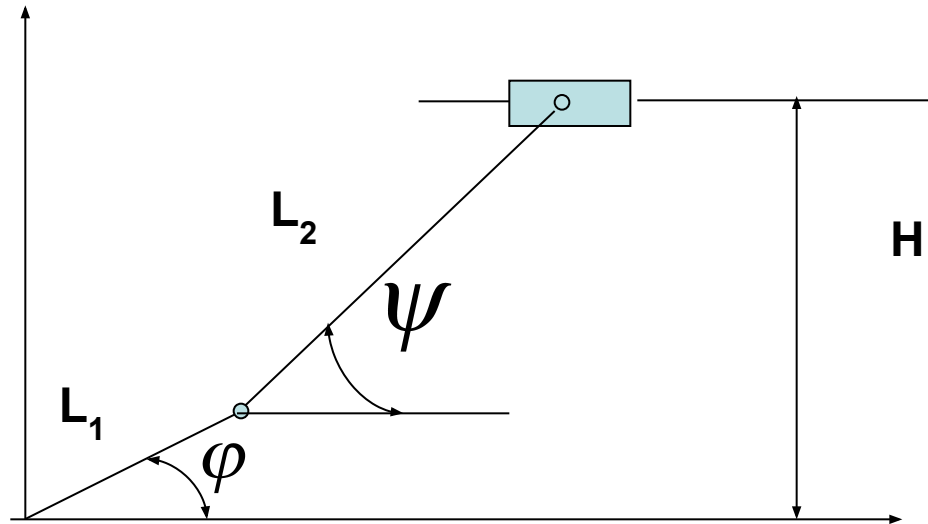
$$\psi_{tt} = \frac{(y_{tt})_A}{L_2 \cos \psi} + \psi_t (y_t)_A \frac{L_1}{L_2} \left( \frac{\sin \psi}{\cos^2 \psi} \right)$$

$$x_{tt} = (x_{tt})_A - \psi_{tt} (y - y_A) - \psi_t [y_t - (y_t)_A]$$

14  
 $y_{tt} = (y_{tt})_A + \psi_{tt} (x - x_A) + \psi_t [x_t - (x_t)_A]$

# Кривошипно-ползунный механизм.

Другой вариант записи кинематических связей



$$L_1 \sin \varphi + L_2 \sin \psi = H = \text{const}$$

# Кривошипно-коромысловый механизм

$$L_1 \cos \varphi + L_2 \cos \psi - L_3 \cos \xi = a$$

$$L_1 \sin \varphi + L_2 \sin \psi - L_3 \sin \xi = b$$

$$a - L_1 \cos \varphi = L_2 \cos \psi - L_3 \cos \xi;$$

$$b - L_1 \sin \varphi = L_2 \sin \psi - L_3 \sin \xi.$$

(a)

$$a - L_1 \cos \varphi = P \quad b - L_1 \sin \varphi = Q$$

$$P - L_2 \cos \psi = -L_3 \cos \xi;$$

$$Q - L_2 \sin \psi = -L_3 \sin \xi,$$

$$(P - L_2 \cos \psi)^2 + (Q - L_2 \sin \psi)^2 = L_3^2$$

$$P \cos \psi + Q \sin \psi = \frac{(P^2 + Q^2 + L_2^2 - L_3^2)}{2L_2} = F.$$

$$\sin \psi = \frac{2 \operatorname{tg}(\psi / 2)}{1 + \operatorname{tg}^2(\psi / 2)}$$

$$\cos \psi = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(\psi / 2)}{1 + \operatorname{tg}^2(\psi / 2)}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\psi}{2}\right) = \frac{Q \pm \sqrt{Q^2 + P^2 - F^2}}{P + F},$$

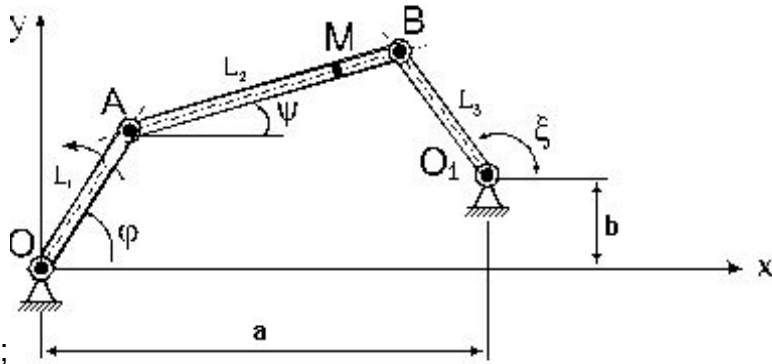
$$P[1 - \operatorname{tg}^2(\psi / 2)] + 2Q \operatorname{tg}(\psi / 2) = F[1 + \operatorname{tg}^2(\psi / 2)]$$



# Кривошипно-коромысловый механизм

$$L_1 \cos \varphi + L_2 \cos \psi - L_3 \cos \xi = a$$

$$L_1 \sin \varphi + L_2 \sin \psi - L_3 \sin \xi = b$$



$$\begin{aligned} a - L_1 \cos \varphi &= L_2 \cos \psi - L_3 \cos \xi; \\ b - L_1 \sin \varphi &= L_2 \sin \psi - L_3 \sin \xi. \end{aligned} \quad (a)$$

$$a - L_1 \cos \varphi = P \quad b - L_1 \sin \varphi = Q$$

$$P - L_2 \cos \psi = -L_3 \cos \xi;$$

$$Q - L_2 \sin \psi = -L_3 \sin \xi,$$

$$(P - L_2 \cos \psi)^2 + (Q - L_2 \sin \psi)^2 = L_3^2$$

$$P \cos \psi + Q \sin \psi = \frac{(P^2 + Q^2 + L_2^2 - L_3^2)}{2L_2} = F.$$

$$\sin \psi = \frac{2 \operatorname{tg}(\psi / 2)}{1 + \operatorname{tg}^2(\psi / 2)}$$

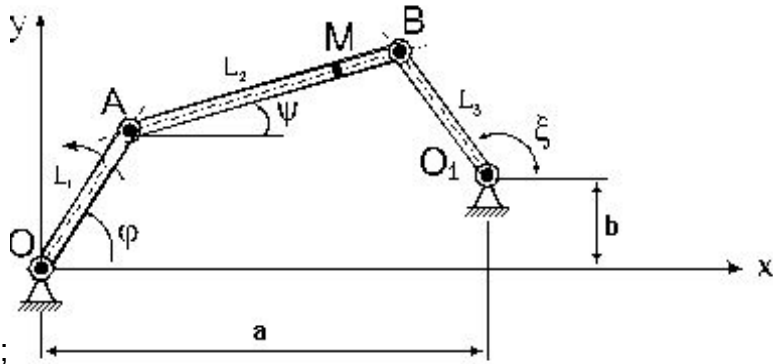
$$\cos \psi = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(\psi / 2)}{1 + \operatorname{tg}^2(\psi / 2)}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\psi}{2}\right) = \frac{Q \pm \sqrt{Q^2 + P^2 - F^2}}{P + F},$$

$$P[1 - \operatorname{tg}^2(\psi / 2)] + 2Q \operatorname{tg}(\psi / 2) = F[1 + \operatorname{tg}^2(\psi / 2)]$$

# Кривошипно-коромысловый механизм.

Уравнения для углов наклона шатуна и коромысла



$$\begin{aligned} a - L_1 \cos \varphi &= L_2 \cos \psi - L_3 \cos \xi; \\ b - L_1 \sin \varphi &= L_2 \sin \psi - L_3 \sin \xi. \end{aligned} \quad (a)$$

$$a - L_1 \cos \varphi = P \quad b - L_1 \sin \varphi = Q$$

$$P - L_2 \cos \psi = -L_3 \cos \xi;$$

$$Q - L_2 \sin \psi = -L_3 \sin \xi,$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\psi}{2}\right) = \frac{Q \pm \sqrt{Q^2 + P^2 - F^2}}{P + F},$$

$$\psi_{1,2} = 2 \operatorname{arctg} \frac{Q \pm \sqrt{Q^2 + P^2 - F^2}}{P + F},$$

Из системы (a) получаем 4 варианта значений угла «кси»:

$$\cos \xi = (L_1 \cos \varphi + L_2 \cos \psi - a) / L_3$$

$$\sin \xi = (L_1 \sin \varphi + L_2 \sin \psi - b) / L_3$$

$$\xi = \arccos \frac{L_2 \cos \psi - P}{L_3},$$

$$\xi = \arcsin \frac{L_2 \sin \psi - Q}{L_3}$$

# Соотношения между угловыми скоростями для кривошипно-коромыслового механизма

Дифференцируем систему уравнений (а) (см. сл. 16-18) по времени

$$\begin{aligned} -\psi_t L_2 \sin \psi + \xi_t L_3 \sin \xi &= \varphi_t L_1 \sin \varphi; \\ \psi_t L_2 \cos \psi - \xi_t L_3 \cos \xi &= -\varphi_t L_1 \cos \varphi, \end{aligned} \quad (\text{b})$$

Решаем полученную систему по методу определителей

$$\Delta = \begin{vmatrix} -L_2 \sin \psi & L_3 \sin \xi \\ L_2 \cos \psi & -L_3 \cos \xi \end{vmatrix} = L_2 L_3 \sin(\psi - \xi)$$

$$\Delta_{\psi_t} = \begin{vmatrix} \varphi_t L_1 \sin \varphi & L_3 \sin \xi \\ -\varphi_t L_1 \cos \varphi & -L_3 \cos \xi \end{vmatrix} = -\varphi_t L_1 L_3 \sin(\xi - \varphi)$$

$$\Delta_{\xi_t} = \begin{vmatrix} -L_2 \sin \psi & \varphi_t L_1 \sin \varphi \\ L_2 \cos \psi & -\varphi_t L_1 \cos \varphi \end{vmatrix} = \varphi_t L_1 L_2 \sin(\psi - \varphi)$$

$$\psi_t = \varphi_t \frac{L_1 \sin(\varphi - \xi)}{L_2 \sin(\psi - \xi)}$$

$$\xi_t = \varphi_t \frac{L_1 \sin(\psi - \varphi)}{L_3 \sin(\psi - \xi)}$$

# Решение системы линейных уравнений по методу Крамера

$$\begin{aligned}\psi_t L_2 \cos \psi - \xi_t L_3 \cos \xi &= -\varphi_t L_1 \cos \varphi \\ -\psi_t L_2 \sin \psi + \xi_t L_3 \sin \xi &= \varphi_t L_1 \sin \varphi\end{aligned}\tag{b}$$

**Исходная система и ее основной определитель**

$$\begin{aligned}a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2\end{aligned}\quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

**«Дополнительные определители»**

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - b_2 a_{12} \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11} b_2 - a_{21} b_1$$

**Решение системы**

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

# Соотношения между угловыми ускорениями для кривошипно-коромыслового механизма

Дифференцируем систему уравнений (b) (см. сл. 19) по времени

$$-\psi_{tt} L_2 \sin \psi + \xi_{tt} L_3 \sin \xi = \varphi_{tt} L_1 \cos \varphi + \varphi_t^2 L_1 \sin \varphi + \psi_t^2 L_2 \cos \psi - \xi_t^2 L_3 \cos \xi;$$

$$\psi_{tt} L_2 \cos \psi - \xi_{tt} L_3 \cos \xi = -\varphi_{tt} L_1 \cos \varphi + \varphi_t^2 L_1 \sin \varphi + \psi_t^2 L_2 \sin \psi - \xi_t^2 L_3 \sin \xi$$

**Решаем полученную систему по методу определителей**

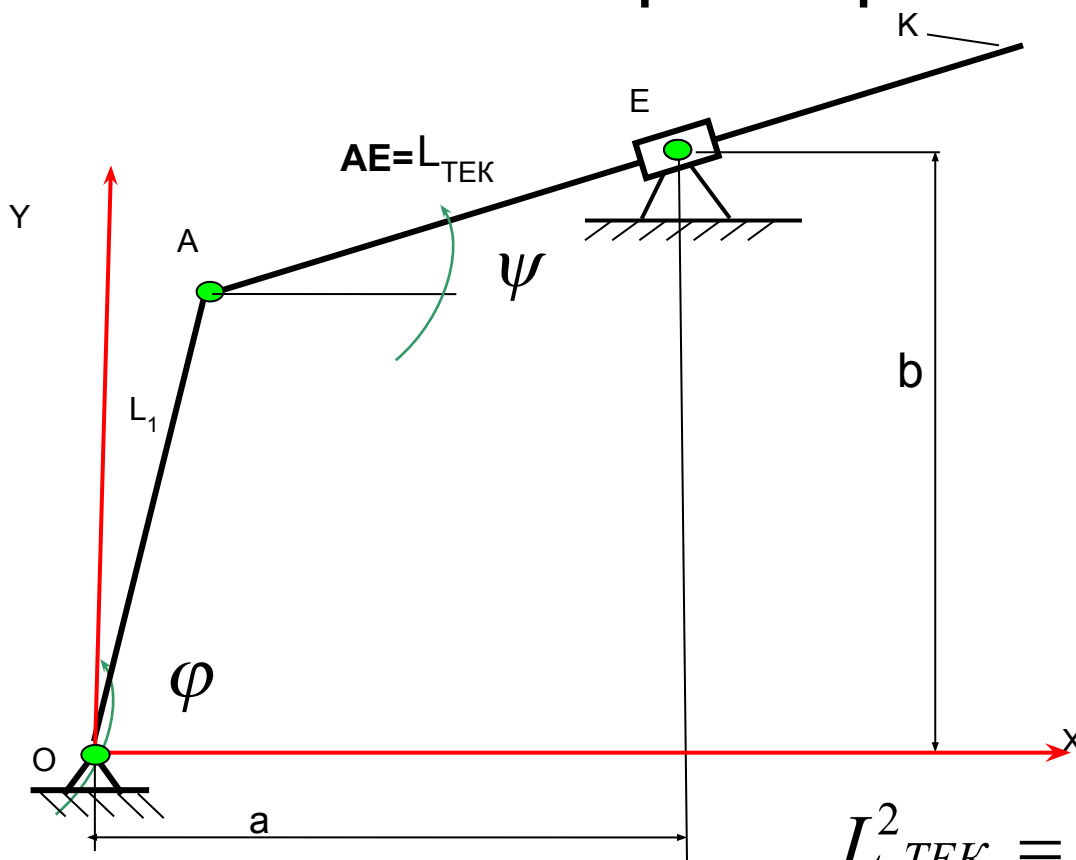
$$\Delta = \begin{vmatrix} -L_2 \sin \psi & L_3 \sin \xi \\ L_2 \cos \psi & -L_3 \cos \xi \end{vmatrix} = L_2 L_3 \sin(\psi - \xi)$$

$$f_1 = \varphi_{tt} L_1 \sin \varphi + \varphi_t^2 L_1 \cos \varphi + \psi_t^2 L_2 \cos \psi - \xi_t^2 L_3 \cos \xi$$

$$f_2 = -\varphi_{tt} L_1 \cos \varphi + \varphi_t^2 L_1 \sin \varphi + \psi_t^2 L_2 \sin \psi - \xi_t^2 L_3 \sin \xi$$

$$\psi_{tt} = \frac{f_1 \cos \xi + f_2 \sin \xi}{L_2 \sin(\xi - \psi)} \quad \xi_{tt} = \frac{f_1 \cos \psi + f_2 \sin \psi}{L_3 \sin(\xi - \psi)}$$

# Кулисный механизм. Угловые характеристики



$$\sin \psi = \frac{b - y_A}{L_{TEK}}$$

$$\cos \psi = \frac{a - x_A}{L_{TEK}}$$

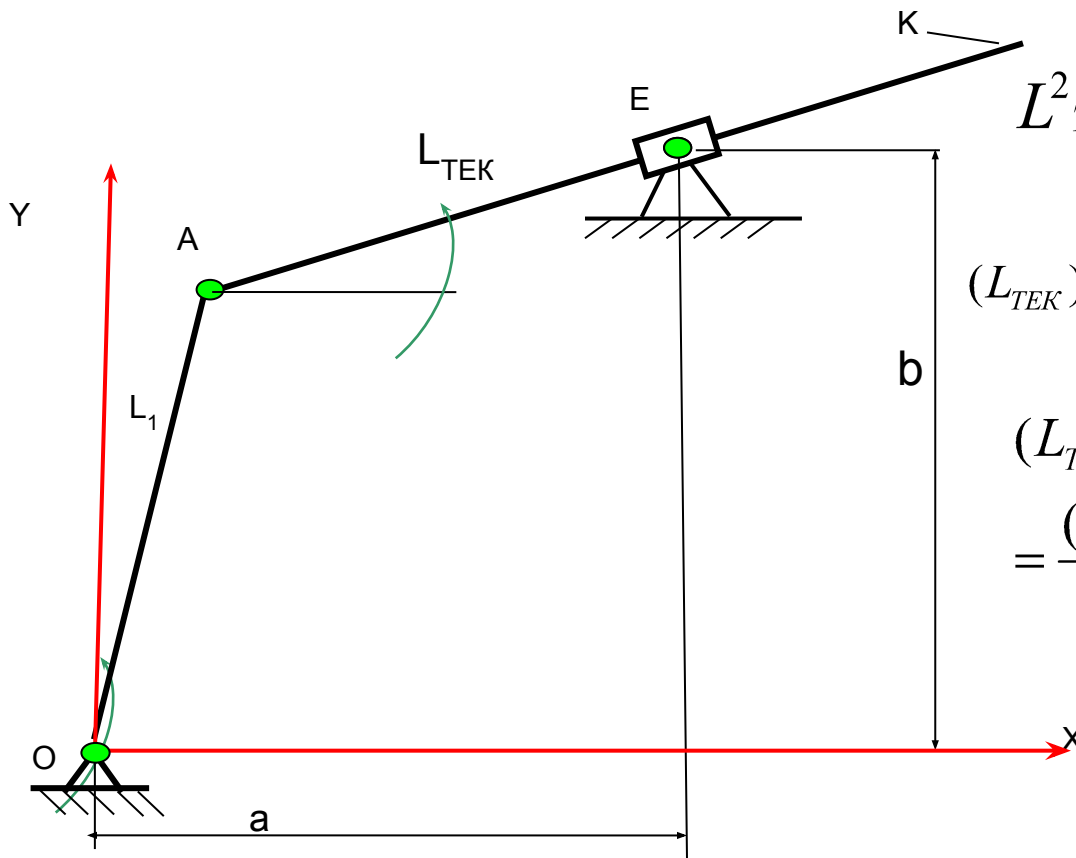
$$\operatorname{tg} \psi = \frac{b - y_A}{a - x_A}$$

$$L_{TEK}^2 = (a - x_A)^2 + (b - y_A)^2$$

$$\psi_t = \cos^2 \psi \frac{(y_t)_A (x_A - a) - (x_t)_A (y_A - b)}{(a - x_A)^2}$$

# Кулисные механизмы.

Направляющая с неподвижной осью



$$L_{TEK}^2 = (a - x_A)^2 + (b - y_A)^2$$

$$(L_{TEK})_t = -\frac{(x_t)_A(a - x_A) + (y_t)_A(b - y_A)}{L_{TEK}}$$

$$\begin{aligned} (L_{TEK})_t &= \\ &= \frac{(x_t)_A(x_A - a) + (y_t)_A(y_A - b)}{L_{TEK}} \end{aligned}$$

$$(L_{TEK})_{tt} = \frac{(x_{tt})_A(x_A - a) + (y_{tt})_A(y_A - b) + (x_{tt})_A + (y_{tt})_A}{L_{TEK}}$$

$$- \frac{(x_t)_A(x_A - a) + (y_t)_A(y_A - b)}{(L_{TEK})^2} (L_{TEK})_t$$

# Кулисные механизмы.

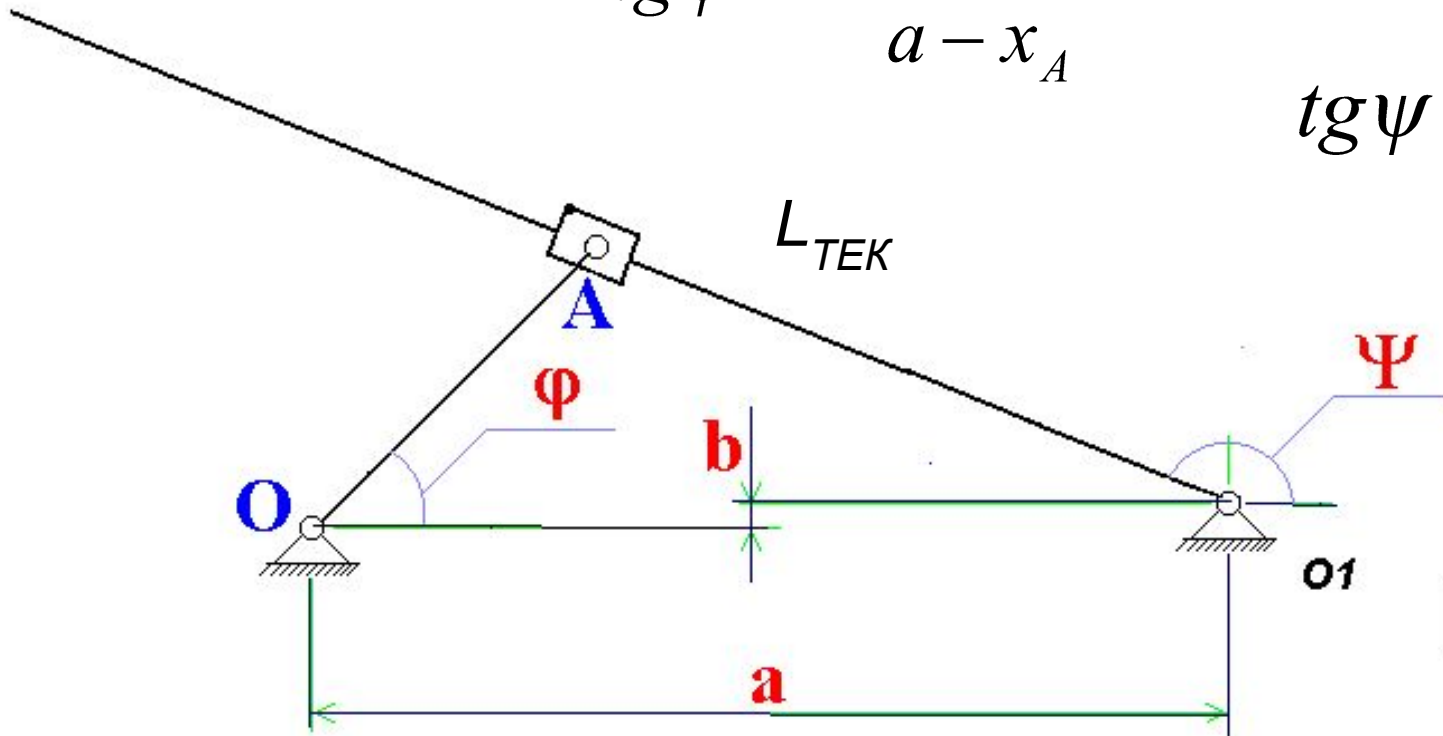
Направляющая с подвижной осью

$$L_{ТЕК}^2 = (a - x_A)^2 + (b - y_A)^2$$

$$\operatorname{tg}(\pi - \psi) = \frac{y_A - b}{a - x_A}$$

$$\operatorname{tg} \psi = -\frac{y_A - b}{a - x_A}$$

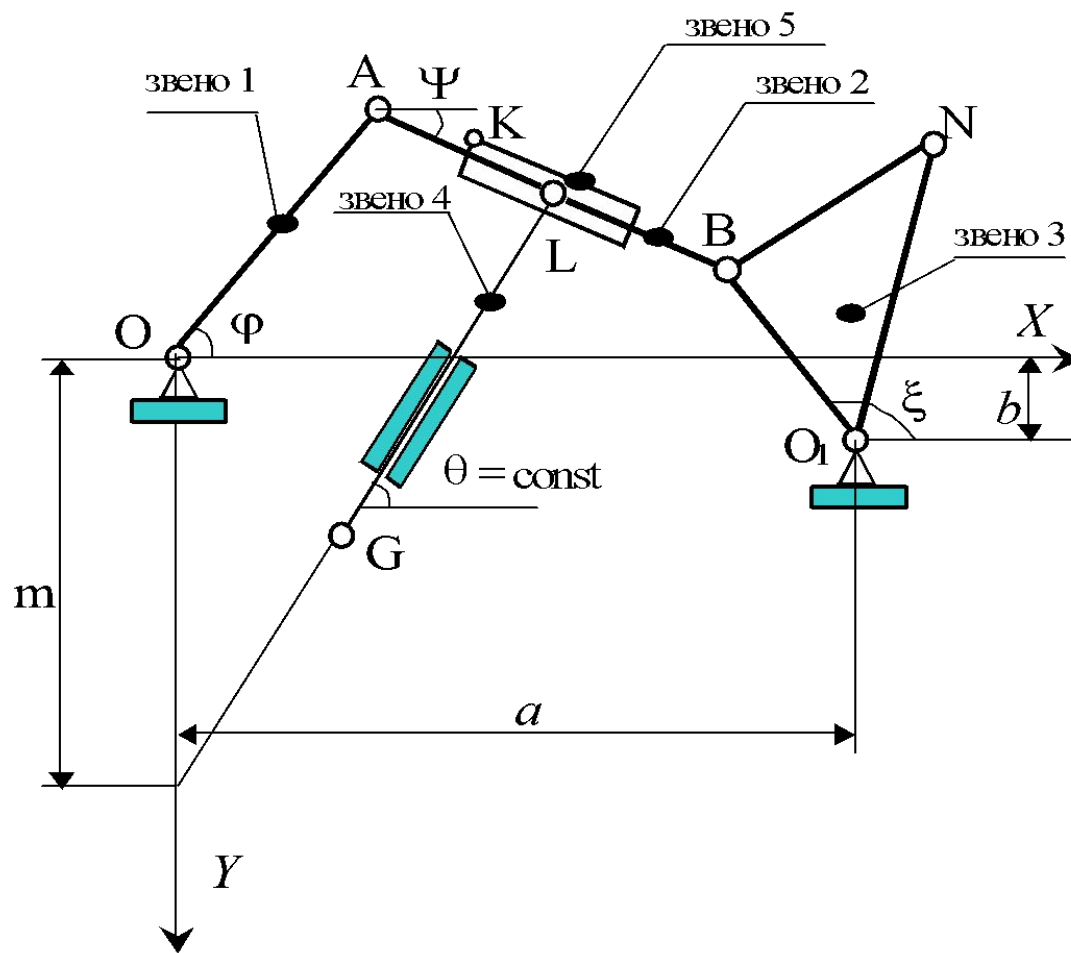
$$\operatorname{tg} \psi = \frac{b - y_A}{a - x_A}$$





- Все механизмы отличаются кинематическими связями.
- *Число возможных вариантов механизмов и кинематических связей бесконечно.*

# КУЛИСНАЯ ПАРА С ПОЛЗУШКОЙ НА ШАТУНЕ И ФИКСИРОВАННОЙ НАПРАВЛЯЮЩЕЙ



# КУЛИСНАЯ ПАРА С ПОЛЗУШКОЙ НА ШАТУНЕ И ФИКСИРОВАННОЙ НАПРАВЛЯЮЩЕЙ

- Пусть уравнение фиксированной направляющей имеет вид

$$(1) y = m + x \operatorname{tg} \theta$$

- где  $m$  - отрезок, отсекаемый прямой с углом наклона  $\theta$  на оси «у». Положение шатуна определяют оси шарниров А и В. Коэффициенты уравнения

$$(2) y = n + x \operatorname{tg} \eta$$

- соединяющей их прямой находим из системы уравнений

$$n + x_A \operatorname{tg} \eta = y_A \quad (3a) \quad n + x_B \operatorname{tg} \eta = y_B \quad (3b)$$

- откуда

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad (4)$$

- ;

- Величину “ $n$ ” удобно найти из уравнения (3a) или (3b).

- Точка пересечения L должна одновременно принадлежать обеим прямым (1) и (2), тогда ее координаты должна определять система уравнений

$$y_L - x_L \operatorname{tg} \eta = n \quad (5a) \quad y_L - x_L \operatorname{tg} \theta = m \quad (5b)$$

- Отсюда находим

$$x_L = \frac{n - m}{\operatorname{tg} \theta - \operatorname{tg} \eta} \quad (7) \quad y_L = \frac{n \operatorname{tg} \theta - m \operatorname{tg} \eta}{\operatorname{tg} \theta - \operatorname{tg} \eta}$$

- При программировании на ЭВМ для расчета ординаты точки пересечения удобнее пользоваться одним из уравнений (5).

# УГОЛ МЕЖДУ ШАТУНОМ И ФИКСИРОВАННЫМ НАПРАВЛЕНИЕМ ДВИЖЕНИЯ ПОЛЗУНА

- Уравнение прямой, вдоль которой движется ползун

$$(1) \quad y = m + x \operatorname{tg} \theta$$

- где  $m$  - отрезок, отсекаемый прямой с углом наклона «Тета» на оси «у». Положение шатуна определяют оси шарниров А и В. Уравнение прямой, ортогональной (1)

$$(2) \quad y = n + x \operatorname{tg} \eta$$

- из условия ортогональности должно иметь угловой коэффициент

$$(3) \quad y = n - x / \operatorname{tg} \theta$$

- Слагаемое “n” находим из условия прохождения прямой (2) через точку D с координатами  $x_D, y_D$ , т.е.

$$(4) \quad n = y_D + \frac{x_D}{\operatorname{tg} \theta} \quad y = y_D - \frac{x - x_D}{\operatorname{tg} \theta}$$

- Координаты точки пересечения прямых (1) и (2) определяются системой уравнений

$$-x_N \operatorname{tg} \theta + y_N = m \quad \frac{x_N}{\operatorname{tg} \theta} + y_N = y_D + \frac{x_D}{\operatorname{tg} \theta}$$

- и составляют (по любому методу решения системы)

$$(6) \quad x_N = \frac{x_D + (y_D - m) \operatorname{tg} \theta}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta} \quad y_N = \frac{m + x_D \operatorname{tg} \theta + y_D \operatorname{tg}^2 \theta}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}$$

- Затем находим расстояние между точками D и N

$$(7) \quad h = \sqrt{(x_N - x_D)^2 + (y_N - y_D)^2}$$

- и искомый угол

$$\sin(\mu - \theta) = \frac{h}{L} \quad \mu = \theta + \arcsin\left(\frac{h}{L}\right)$$

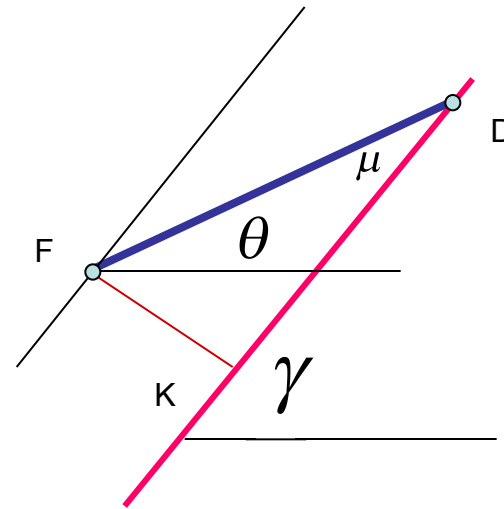
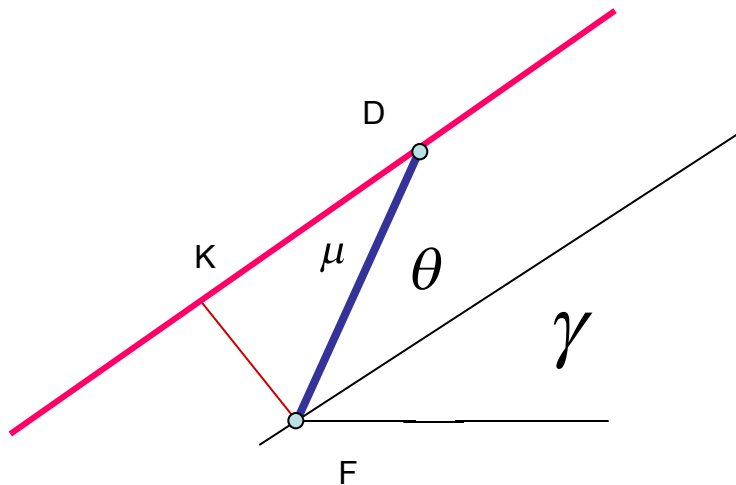
## FD - шатун

F, D – оси шарниров, соединяющих шатун с смежными звеньями.  
K- точка пересечения перпендикуляра, опущенного из оси шарнира F на направление движения ползуна.

$\gamma$  - угол наклона направляющей DK движения ползуна

$\theta$  - угол наклона шатуна FD

$\mu$  - угол между направлением DK и шатуном FD



- Расстояние от точки  $P(x_P, y_P)$  до прямой  $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$  определяет уравнение

$$h = (-\text{sign}(C)) \frac{Ax_P + By_P + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Знак "-" соответствует случаю, когда точка P и начало координат находятся по одну сторону от прямой

Знак "+" соответствует случаю, когда точка P и начало координат находятся по разные стороны прямой

Этот вариант удобен тем, что легко определить производные  $h_t$  и  $h_{tt}$ , а именно:

$$h_t = \frac{A(x_t)_P + B(y_t)_P + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$h_{tt} = \frac{A(x_{tt})_P + B(y_{tt})_P + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\sin \mu = \frac{h}{L_5}$$

$$y_F < y_K$$

$$\theta = \gamma + \mu$$

$$y_F > y_K$$

$$\theta = \gamma - \mu$$

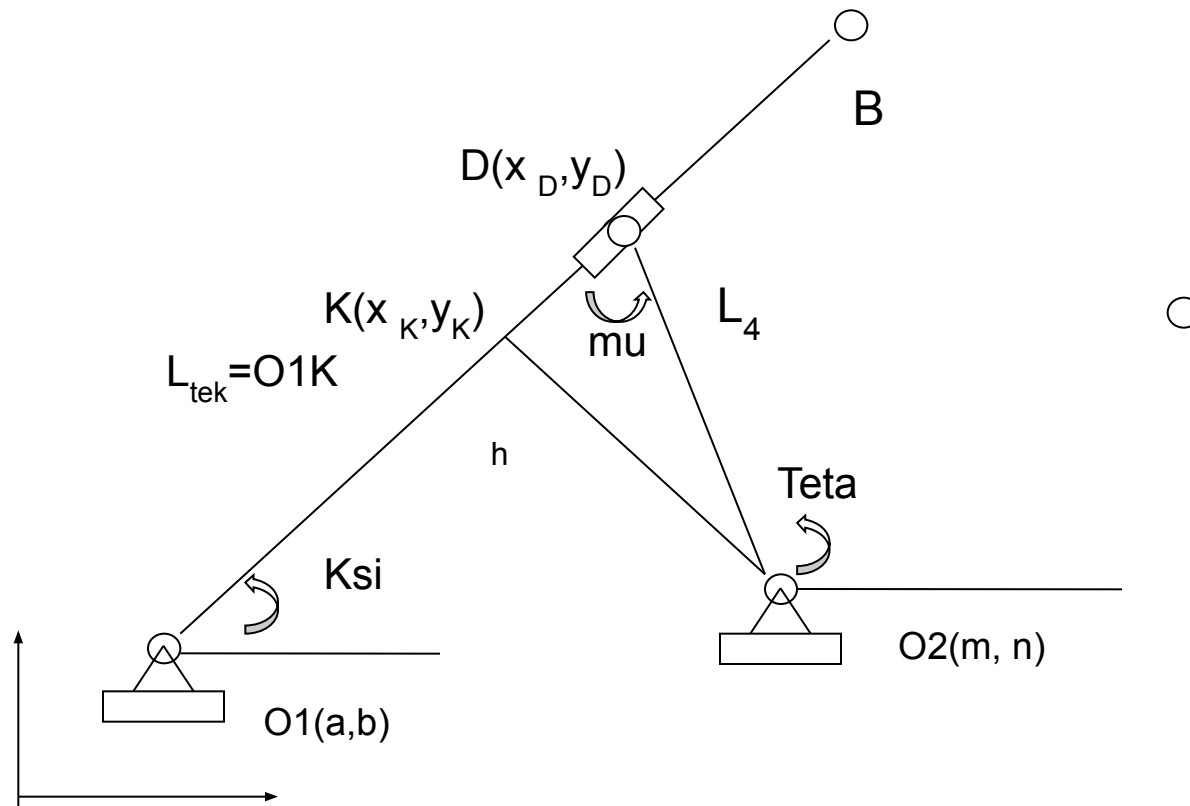
$$\theta_t = \pm \mu_t + 0$$

$$\theta_{tt} = \pm \mu_{tt}$$

$$\mu_t = \frac{h_t}{L_5 \cos \mu}$$

$$\mu_{tt} = \frac{h_{tt}}{L_5 \cos \mu} + \mu_t \sin \mu \frac{h_t}{L_5 \cos^2 \mu}$$

# Два коромысла с кулисной парой



## Два коромысла с кулисной парой - 2

Уравнение прямой O1B

$$y = b + \operatorname{tg} \xi (x - a)$$

Уравнение прямой O2K

$$y = n + (m - x) / \operatorname{tg} \xi$$

Координаты точки пересечения «К»

$$x_K = 0.5(n - b) \sin(2\xi) + m \cos^2 \xi + a \sin^2 \xi$$

$$y_K = b + \operatorname{tg} \xi (x_K - a)$$

Компоненты скорости

$$(x_t)_K = \xi_t [(n - b) \cos(2\xi) + (a - m) \sin(2\xi)]$$

$$(y_t)_K = \xi_t (x_K - a) / \cos^2 \xi + \operatorname{tg} \xi (x_t)_K$$

Компоненты ускорения

$$(x_{tt})_K = \xi_{tt} [(n - b) \cos(2\xi) + (a - m) \sin(2\xi)] + 2\xi_t^2 [(a - m) \cos(2\xi) + (b - n) \sin(2\xi)]$$

$$(y_{tt})_K = \xi_{tt} (x_K - a) / \cos^2 \xi + 2(x_K - a) \sin \xi * \xi_t^2 / \cos^3 \xi + 2\xi_t (x_t)_K / \cos^2 \xi + \operatorname{tg} \xi (x_{tt})_K$$

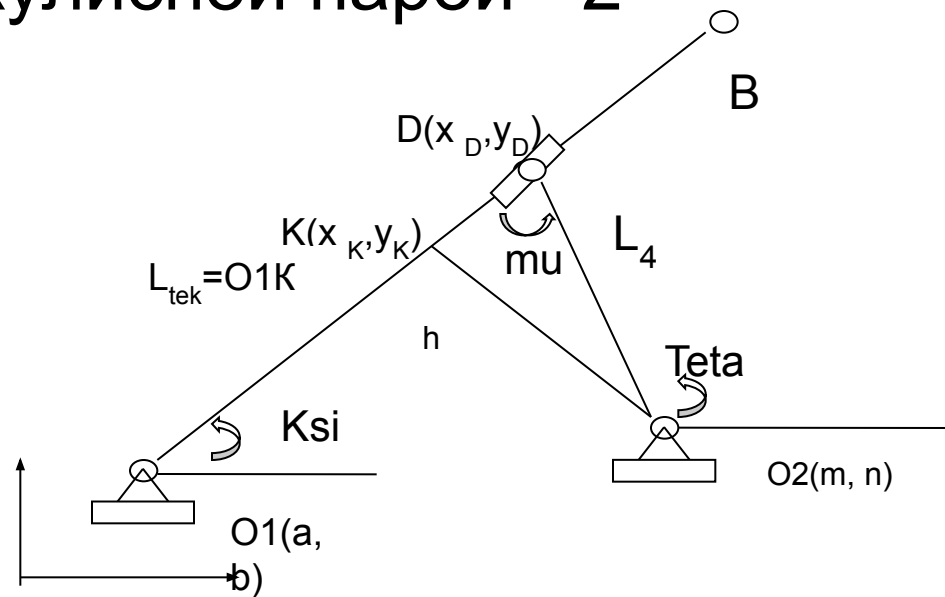
Расстояние  $h$  между осью O2 и прямой O1B

$$h^2 = (x_K - m)^2 + (y_K - n)^2$$

Производные по времени

$$h_t = [(x_K - m)(x_t)_K + (y_K - n)(y_t)_K] / h$$

$$h_{tt} = -h_t [(x_K - m)(x_t)_K + (y_K - n)(y_t)_K] / h^2 + [(x_K - m)(x_{tt})_K + (y_K - n)(y_{tt})_K] / h + [(x_t)_K^2 + (y_t)_K^2] / h$$





## Два коромысла с кулисной парой - 3

Для расчета текущей длины О1Д находим точку пересечения Д прямых О1ДВ (уравнение приведено выше) и О2Д

Уравнение прямой О2Д

$$y = n + tg\theta(x - m)$$

Получаем систему

$$x_D tg\theta - y_D = mtg\theta - n$$

$$x_D tg\xi - y_D = atg\xi - b$$

$$x_D = \frac{mtg\theta - atg\xi + b - n}{tg\theta - tg\xi} \quad y_D = b + tg\xi(x_D - a)$$

Производные по времени

$$(x_t)_D = \frac{(m\theta_t / \cos^2 \theta - a\xi_t / \cos^2 \xi)(tg\theta - tg\xi) - x_D(\theta_t / \cos^2 \theta - \xi_t / \cos^2 \xi)(tg\theta - tg\xi)}{(tg\theta - tg\xi)^2}$$

$$(y_t)_D = \xi_t(x_D - a) / \cos^2 \xi + tg\xi(x_t)_D$$

Текущая длина

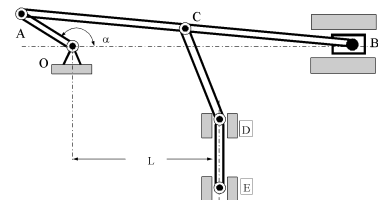
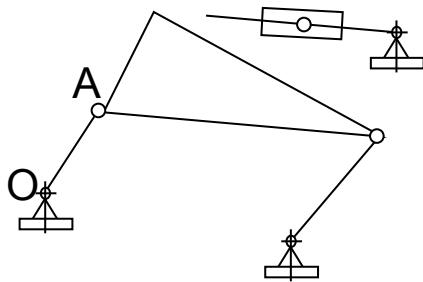
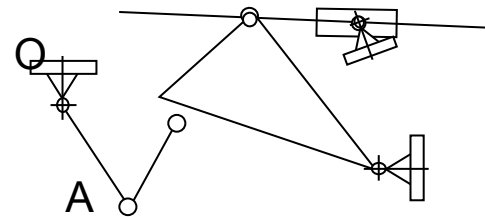
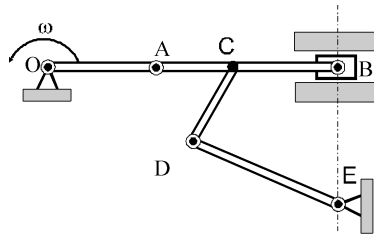
$$L_{tek}^2 = (x_D - a)^2 + (y_D - b)^2$$

$$(L_{tek})_t = [(x_D - a)(x_t)_D + (y_D - b)(y_t)_D] / L_{tek}$$

$$(L_{tek})_{tt} = -(L_{tek})_t [(x_D - a)(x_t)_D + (y_D - b)(y_t)_D] / (L_{tek})^2 + [(x_D - a)(x_{tt})_D + (y_D - b)(y_{tt})_D] / (L_{tek}) + [(x_t)_D^2 + (y_t)_D^2] / (L_{tek})$$

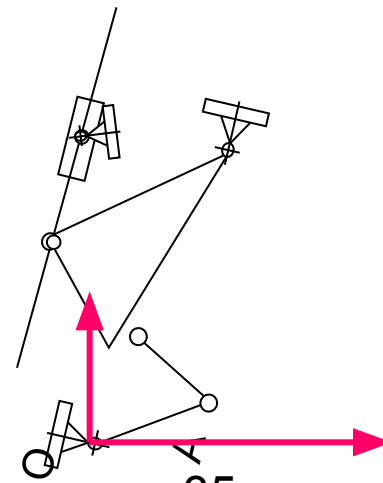
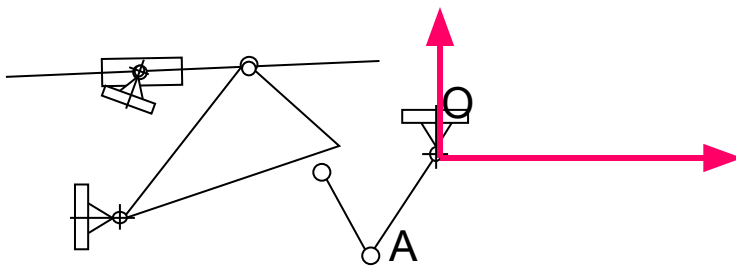
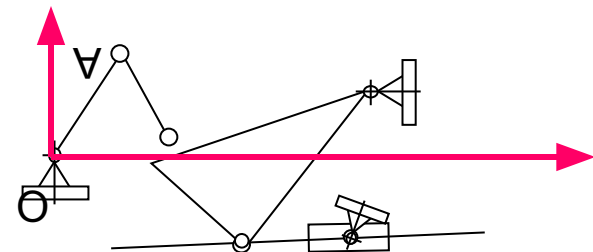
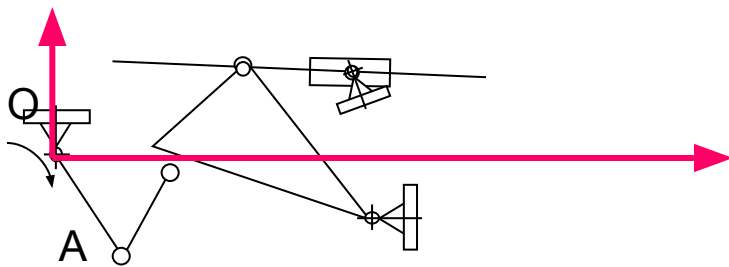
# Рекомендуемая последовательность кинематического анализа механизма -1

- 1. Выбрать (получить) кинематическую схему механизма. Преобразовать ее к общему виду, включающему все возможные расположения осей шарниров. Выделить ведущее звено – кривошип. Провести структурный анализ. Найти число степеней свободы механизма.



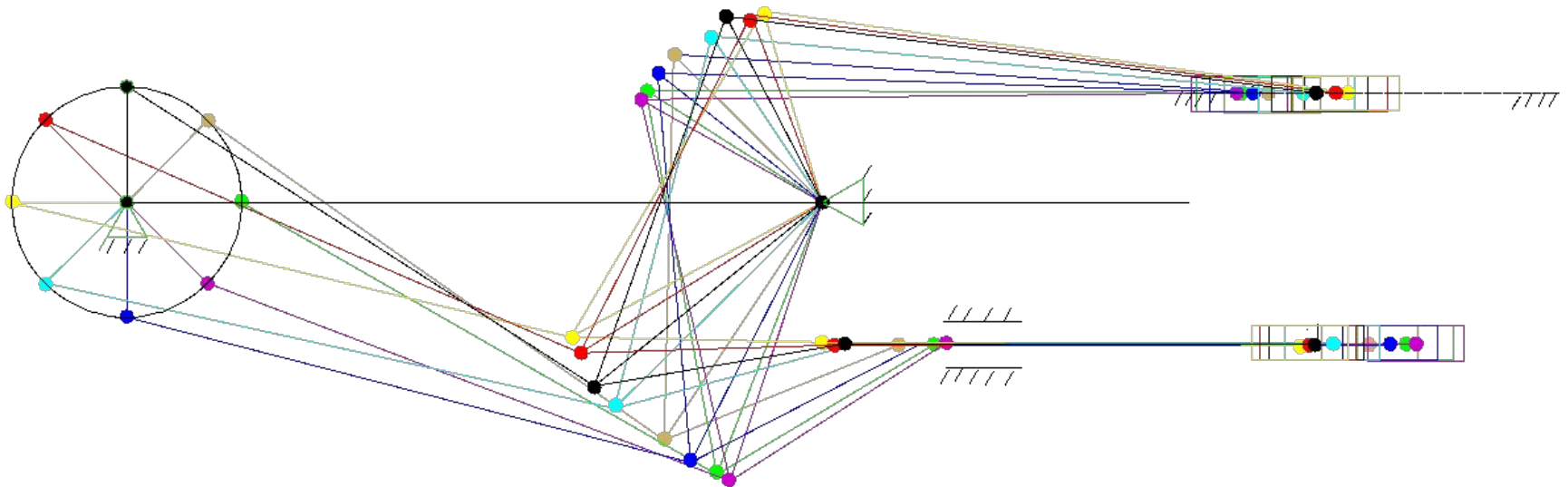
# Рекомендуемая последовательность кинематического анализа механизма - 2

- 2. Выбрать предпочтительную систему координат, наиболее удобную для математического описания работы механизма. Ввести обозначения для расстояний, углов, координат характерных точек, уравнений фиксированных направляющих и пр.



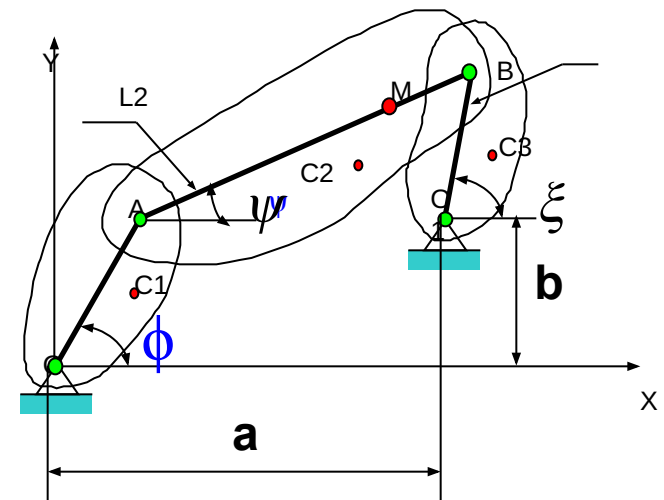
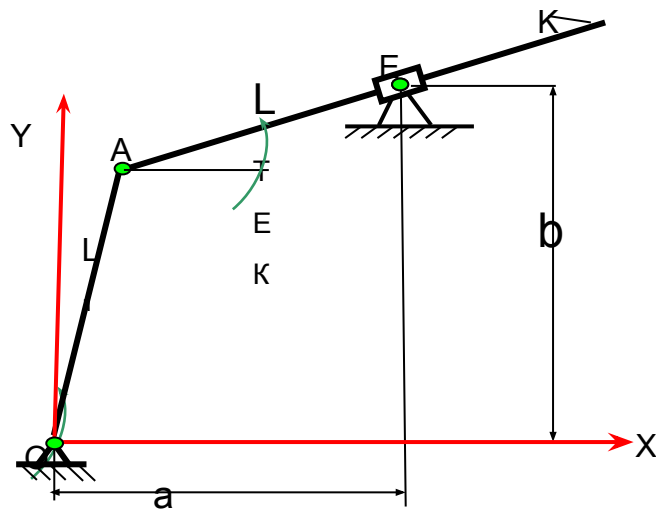
## Рекомендуемая последовательность кинематического анализа механизма-3

3. Для выбора допустимых соотношений расстояний между осями шарниров, обеспечивающих работоспособность механизма при полном обороте кривошипа, начертить механизм при 8 его положениях (схема глубинного насоса, Кретов И.И. ГМО-2-03)



# Рекомендуемая последовательность кинематического анализа механизма - 4

- 4. Выбрать основной («базовый») четырехзвенник механизма, включающий стойку и кривошип (возможны несколько вариантов).



## Рекомендуемая последовательность кинематического анализа механизма - 5

5. Выписываем (из лекций или учебного пособия) уравнения для координат, скоростей и ускорений каждого из звеньев четырехзвенника. Все они могут быть получены из общих соотношений для шатуна (см. слайд 7).

$$x = x_p + (\alpha - \alpha_p) \cos(\Delta\varphi) - (\beta - \beta_p) \sin(\Delta\varphi)$$

$$y = y_p + (\alpha - \alpha_p) \sin(\Delta\varphi) + (\beta - \beta_p) \cos(\Delta\varphi)$$

$$x_t = (x_t)_P - \varphi_t (y - y_P) \qquad y_t = (y_t)_P + \varphi_t (x - x_P)$$

$$x_{tt} = (x_{tt})_P - \varphi_{tt} (y - y_P) - \varphi_t^2 (x - x_P)$$

$$y_{tt} = (y_{tt})_P + \varphi_{tt} (x - x_P) - \varphi_t^2 (y - y_P)$$

# Рекомендуемая последовательность кинематического анализа механизма - 6

6. Записываем уравнения кинематических связей для рассматриваемого четырехзвенника, находим соотношения для углов, угловых скоростей и ускорений.

**Кривошипно-коромысловый механизм (см. слайды 16-21)**

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\psi}{2}\right) = \frac{Q \pm \sqrt{Q^2 + P^2 - F^2}}{P + F},$$

$$\psi_t = \varphi_t \frac{L_1 \sin(\varphi - \xi)}{L_2 \sin(\psi - \xi)}$$

$$\xi_t = \varphi_t \frac{L_1 \sin(\psi - \varphi)}{L_3 \sin(\psi - \xi)}$$

**Кривошипно-кулисный механизм (см. слайды 22-24)**

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{b - y_A}{a - x_A}$$

$$\psi_t = \cos^2 \psi \frac{(y_t)_A (x_A - a) - (x_t)_A (y_A - b)}{(a - x_A)^2}$$

# Рекомендуемая последовательность кинематического анализа механизма - 7

- 7. Переходим к программированию задачи, например в электронных таблицах Excel.

**7.1. Указываем автора работы, группу, схему (строки 1-2)**

**7.2. Выделяем блок исходных данных (строки 3-19)**

**7.3. Вводим стандартный блок «Угловые характеристики работы кривошипа» (строки 20-30)**

**7.4. Рассчитываем координаты, компоненты скорости и ускорения шарнира А, принадлежащего кривошипу (строки 32-38). Расчет кинематических характеристик центра массы кривошипа С1 можно перенести в раздел «Энергетический анализ механизма»**

4	L1
5	L2
6	L3
7	Alfa_A
8	Betta_A
9	Fi0
10	(Fi_t)0=
11	(Fi_tt)0=
12	+Fi_tt
13	Delta_Fi (градусы)
14	Delta_Fi (радианы)



# Рекомендуемая последовательность кинематического анализа механизма - 8

## Переходим к программированию блока «Кинематические связи»

8.1. Вводим промежуточные переменные, чтобы длина программируемых выражений не превышала 1 строки

8.2. После вычисления искомых угловых функций и их производных по времени проводим обязательную проверку исходных уравнений

8.3. Определяем все возможные решения системы уравнений, описывающей кинематические связи в механизме.

8.4. Вводим обязательные строки «Принятые значения» и переносим в них адреса результатов, используемых в последующих расчетах.

## Рекомендуемая последовательность кинематического анализа механизма - 9

### **Переходим к программированию кинематических характеристик ведомых звеньев четырехзвенника**

**9.1. Используя координаты, скорости и ускорения оси шарнира, связывающего исследуемое звено с ведущим, определяем координаты, скорости и ускорения других частиц звена, включая ось шарнира, связывающего его с последующим ведомым звеном.**

**9.2. Повторяем п. 9.1 для всех остальных звеньев механизма**

## Рекомендуемая последовательность кинематического анализа механизма - 10

Через каждые 5-8 строк программы проводим проверку результатов кинематических расчетов:

- для координат – по виду траектории,
- для скоростей и ускорений – по выполнению свойств производных от рассчитываемых функций (координат, углов и пр.),
- по сохранению расстояний между осями шарниров,
- по сравнения результатов с численным дифференцированием.

## **ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМА**

После завершения кинематического анализа переходим к расчету кинематических характеристик центров масс звеньев, их кинетической и потенциальной энергии, ньютоновых сил инерции и скорости изменения (мощности) кинетической и потенциальной энергии.

## **ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМА**

Используя результаты кинематического и энергетического анализов, определяем обобщенные силы, приведенные к осям шарниров, с обязательной проверкой энергетического баланса при выборе различных комбинаций обобщенных сил.