МГГУ – 2008
КАФЕДРА «Теоретическая и прикладная механика»

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

Кинематический анализ шарнирно-рычажных механизмов

Доктор технических наук, профессор
АЛЮШИН Юрий Алексеевич

Основные понятия

- ***Механизмами*** называют изолированную часть некоторой механической системы (без источников и потребителей энергии), *предназначенную для преобразования движения одного тела в требуемое движение одного или нескольких других тел*.

МЕХАНИЗМ – система тел, предназначенная для преобразования заданного движения одного или нескольких тел в требуемое движение других твердых тел

ПЛОСКИЕ МЕХАНИЗМЫ – механизмы, траектории всех частиц подвижных звеньев которых расположены в плоскостях, параллельных одной и той же неподвижной плоскости.

Шарнирно- рычажными называют механизмы из абсолютно твердых тел (АТТ), соединенных между собой цилиндрическими шарнирами, допускающими их относительное вращение.

Лихтенхельдт В. Синтез механизмов. – М.: Наука, 1978. – 228 с.

- «Вопрос о том, какие механизмы – кулачковые, зубчатые или шарнирные – целесообразнее применять для осуществления рабочего процесса, чаще всего решается в пользу кулачковых или зубчатых механизмов, хотя во многих случаях шарнирные механизмы представляют собой гораздо более удобную и совершенную конструкцию… Причиной этого является то обстоятельство, что методы расчета звеньев шарнирных механизмов сложны и мало доступны многим конструкторам. Им кажется, что в каждом отдельном случае проще и удобнее для заданного закона движения звена механизма рассчитать кулачковый механизм, чем шарнирный»

Звенья шарнирно-рычажных механизмов

•***ЗВЕНО*** = твердое тело (часть механизма), состоящее из одной или нескольких жестко связанных деталей, участвующих в движении как одно целое.

Виды звеньев:

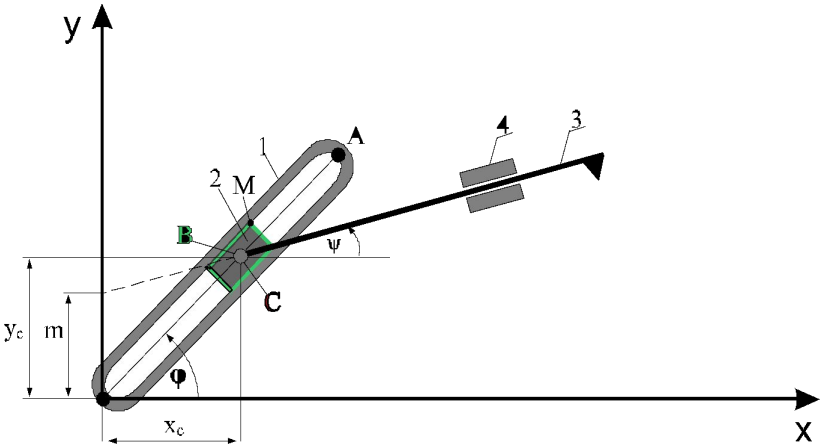
СТОЙКА, КРИВОШИП, КОРОМЫСЛО, ШАТУН, ПОЛЗУН,

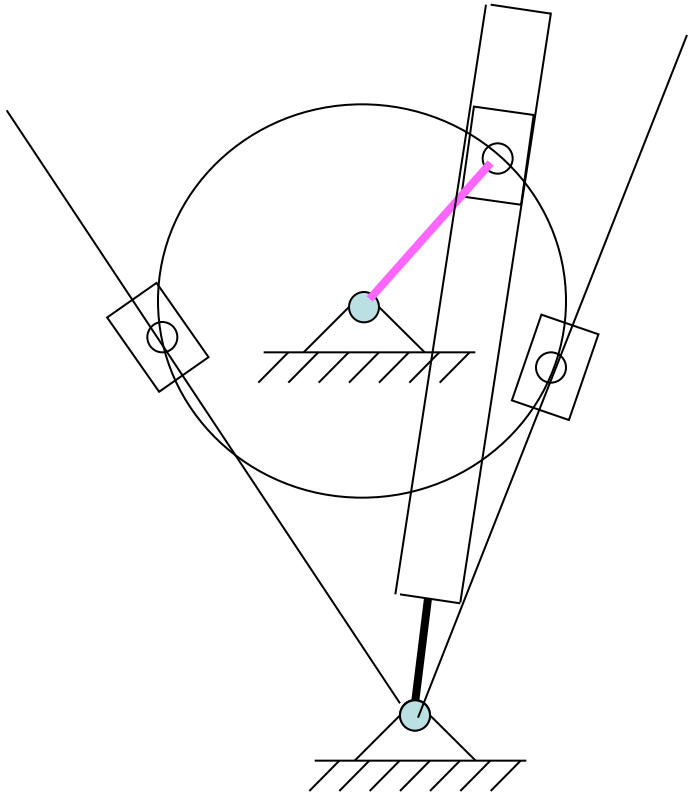
- **Стойка –** неподвижное звено механизма, на котором закреплены все другие его звенья.
- **Кривошип** – звено, совершающее полный оборот вокруг неподвижной оси.
- **Коромысло** – звено, совершающее колебательное движение (неполный оборот) вокруг неподвижной оси.
- **Шатун** – звено, шарнирно соединённое с двумя (или более) другими подвижными звеньями и совершающее плоскопараллельное движение в виде вращения вокруг подвижного полюса (ППД).
- **Ползун** – звено, совершающее прямолинейное поступательное движение по фиксированным направляющим.
- **Кулисная пара** – два подвижных смежных звена с относительным поступательным движением друг относительно друга.

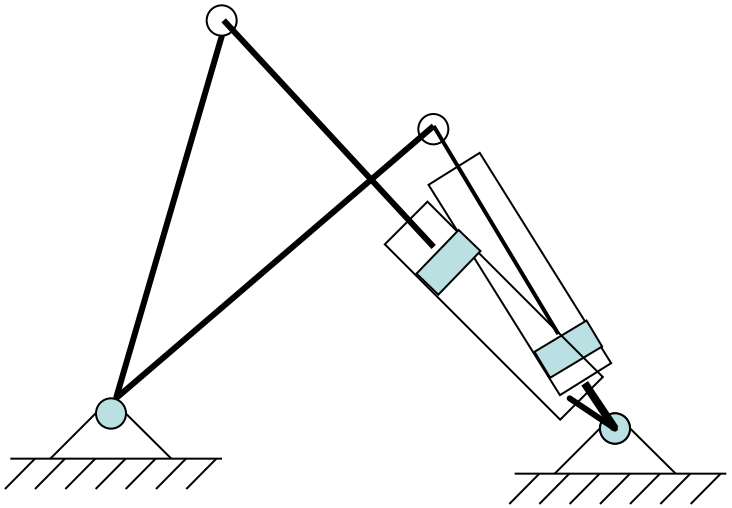
Различные варианты определения «кулисы»

- **Кулиса** – звено, вращающееся относительно подвижной оси (с направляющими для ползуна - камня) и образующее с другим подвижным звеном скользящую пару.
- ***КУЛИСА*** = подвижная направляющая для ползуна (в т.ч. и коромысло, если по нему скользит ползушка) = звено, которое несет подвижные направляющие для ползуна.
- ***КУЛИСА (СЭС)*** –звено кулисного механизма, вращающееся вокруг ***НЕПОДВИЖНОЙ*** оси и образующее с другим подвижным звеном (**ползуном**) **поступательную пару.**
- ***КУЛИСА*** *(Политехнический Словарь, фр. – паз, желобок, выемка, скользить) = подвижное звено кулисного механизма, образующее с другим подвижным звеном* ***поступательную пару****.* ***Ползун****, перемещающийся по направляющим, иногда называют* ***камнем****. Кулисы бывают вращающиеся, качающиеся, прямолинейно движущиеся и пр.*
- ***КУЛИСА*** = подвижное звено кулисной пары, которое несет подвижные направляющие для ползуна, в т.ч. и коромысло, если по нему скользит ползун (-шка), совершающий поступательное или составное (сложное) движение.
- Фролов К.В.: **«Кулисой обычно называют звено с пазом, по которому перемещается ползун (кулисный камень)»**
- *В гидроприводах широко применяется разновидность кулисного механизма (рис. 2.4г, стр. 25, ТММ-87), в котором кулису с камнем заменяет цилиндр с поршнем*

Варианты кулисных механизмов







Переход от плоскопараллельного движения к вращательному и поступательному движениям

$$x = x_p + (\alpha - \alpha_p)\cos(\Delta\varphi) - (\beta - \beta_p)\sin(\Delta\varphi)$$

$$y = y_p + (\alpha - \alpha_p)\sin(\Delta\varphi) + (\beta - \beta_p)\cos(\Delta\varphi)$$

Вращательное движение относительно неподвижной оси *P(a,b):*

$$x_P = \alpha_P = a \qquad y_P = \beta_P = b$$

$$x = a + (\alpha - a)\cos(\Delta\varphi) - (\beta - b)\sin(\Delta\varphi)$$

$$y = b + (\alpha - a)\sin(\Delta\varphi) + (\beta - b)\cos(\Delta\varphi)$$

Sin(0)=0

Cos(0)=1

$$\Delta\varphi = 0$$

Поступательное движение

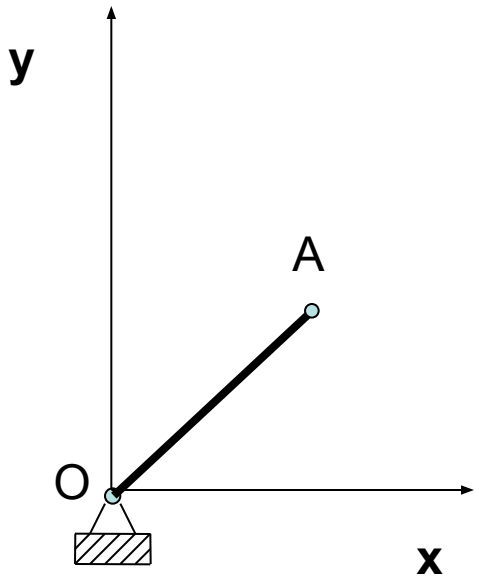
$$x_P - \alpha_P = u_x(t)$$

$$y_P - \beta_P = u_y(t)$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \alpha + u_x(t), \\ y &= \beta + u_y(t), \\ z &= \gamma \end{aligned}}$$

Координаты, компоненты скорости и ускорения для кривошипа

$$x = \alpha\cos(\Delta\varphi) - \beta\sin(\Delta\varphi) \qquad y = \alpha\sin(\Delta\varphi) + \beta\cos(\Delta\varphi)$$



Компоненты вектора скорости

$$x_t = -\varphi_t[\alpha\sin(\Delta\varphi) + \beta\cos(\Delta\varphi)] = -\varphi_t y$$

$$y_t = \varphi_t[\alpha\cos(\Delta\varphi) - \beta\sin(\Delta\varphi)] = \varphi_t x$$

Компоненты вектора ускорения

$$x_{tt} = -\varphi_{tt} y - \varphi_t y_t \qquad y_{tt} = \varphi_{tt} x + \varphi_t x_t$$

Координаты, компоненты скорости и ускорения для коромысла

Координаты

$$x = a + (\alpha - a)\cos(\Delta\xi) - (\beta - b)\sin(\Delta\xi)$$

$$y = b + (\alpha - a)\sin(\Delta\xi) + (\beta - b)\cos(\Delta\xi)$$

Компоненты вектора скорости

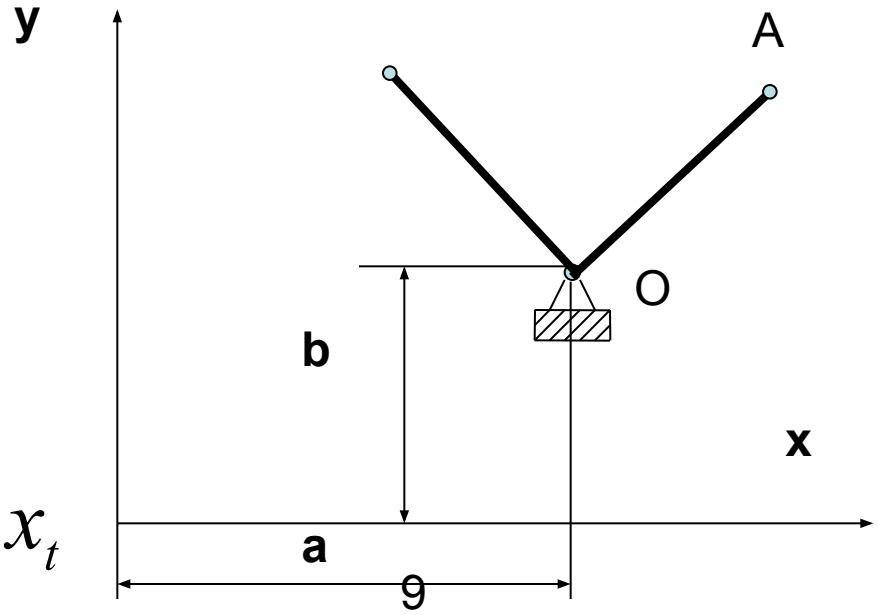
$$x_t = -\xi_t (y - b)$$

$$y_t = \xi_t (x - a)$$

Компоненты вектора ускорения

$$x_{tt} = -\xi_{tt}(y - b) - \xi_t \; y_t$$

$$y_{tt} = -\xi_{tt}(x - a) - \xi_t \; x_t$$



Координаты, компоненты скорости и ускорения для шатуна

Уравнения движения в форме Лагранжа

$$x = x_P + (\alpha - \alpha_P)\cos\Delta\psi - (\beta - \beta_P)\sin\Delta\psi$$

$$y = y_P + (\alpha - \alpha_P)\sin\Delta\psi + (\beta - \beta_P)\cos\Delta\psi$$

Компоненты скорости:

в форме Лагранжа

$$x_t = (x_t)_P - \psi_t[(\alpha - \alpha_P)\sin\Delta\psi + (\beta - \beta_P)\cos\Delta\psi]$$

$$y_t = (y_t)_P + \psi_t[(\alpha - \alpha_P)\cos\Delta\psi - (\beta - \beta_P)\sin\Delta\psi]$$

в форме Эйлера

$$x_t = (x_t)_P - \psi_t(y - y_P)$$

$$y_t = (y_t)_P + \psi_t(x - x_P)$$

Компоненты ускорения в форме Эйлера

$$x_{tt} = (x_{tt})_P - \psi_{tt}(y - y_P) - \psi_t[y_t - (y_t)_P] =$$
$$= (x_{tt})_P - \psi_{tt}(y - y_P) - \psi_t^2(x - x_P)$$

$$y_{tt} = (y_{tt})_P + \psi_{tt}(x - x_P) - \psi_t[x_t - (x_t)_P] =$$
$$= (y_{tt})_P - \psi_{tt}(x - x_P) - \psi_t^2(y - y_P)$$

Координаты, компоненты скорости и ускорения для ползуна

- Уравнения движения

$$x-\alpha = x_P - \alpha_P = u_x(t), \quad x = \alpha + (x_P - \alpha_P)$$
$$y-\beta = y_P - \beta_P = u_y(t), \quad y = \beta + (y_P - \beta_P)$$

Компоненты вектора перемещения $u_i(t) = x_i - \alpha_i = [u_i(t)]_P$

Компоненты вектора скорости $u_{i,t}(t) = x_{i,t} \equiv v_i = (x_{i,t})_P$

$$x_t = (x_t)_P \qquad y_t = (y_t)_P$$

Компоненты вектора ускорения $u_{i,tt}(t) = x_{i,tt} \equiv w_i = (x_{i,tt})_P$

$$x_{tt} = (x_{tt})_P \qquad y_{tt} = (y_{tt})_P$$

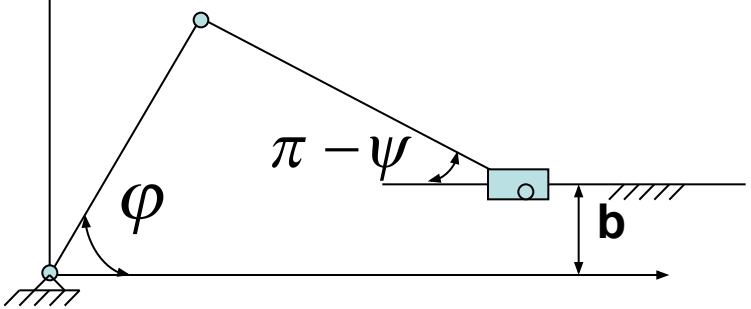
Кинематические связи в шарнирно - рычажных механизмах

- Кинематическими связями называют соотношения между постоянными (расстояния между осями шарниров) и переменными (углы наклона линий, соединяющих оси шарниров) параметрами механической системы в ***произвольный*** момент времени.

Кинематические связи – это граничные условия, записанные в виде математических уравнений для произвольного момента времени

Кривошипно-ползунный механизм

$$b = L_1 \sin\varphi - L_2 \sin(\pi - \psi)$$

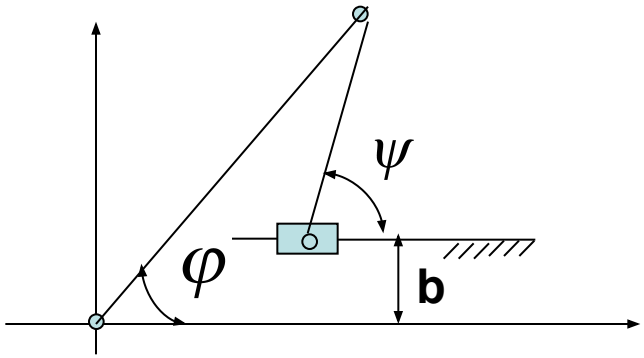


$$\sin(\pi - \psi) = (L_1 \sin\varphi - b)/L_2$$

$$\psi = \pi - \arcsin\left(\frac{L_1 \sin\varphi - b}{L_2}\right)$$

$$\psi_t = -\varphi_t \frac{L_1 \cos\varphi}{L_2 \cos(\pi - \psi)}$$

$$b = L_1 \sin\varphi - L_2 \sin\psi$$



$$\sin\psi = (L_1 \sin\varphi - b)/L_2$$

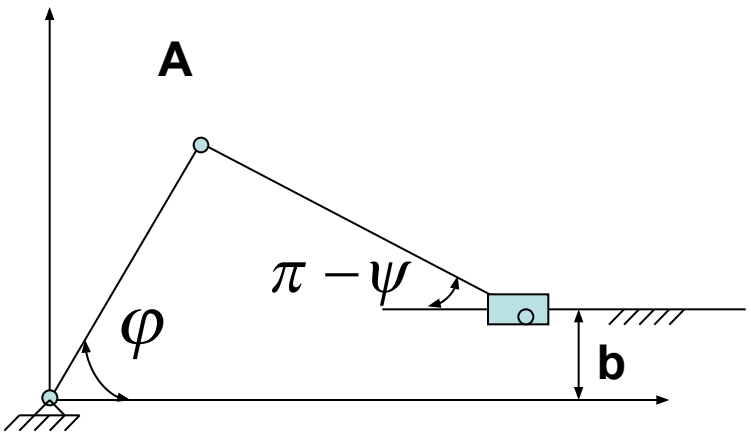
$$\psi = \arcsin\left(\frac{L_1 \sin\varphi - b}{L_2}\right)$$

$$\psi_t = \varphi_t \frac{L_1 \cos\varphi}{L_2 \cos\psi}$$

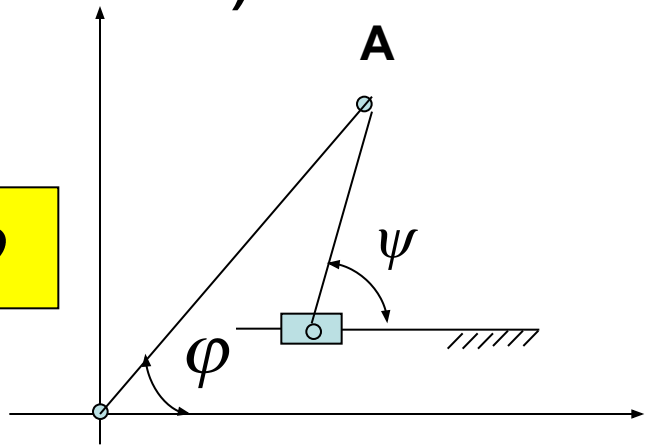
$$\psi_{tt} = -\varphi_{tt} \frac{L_1 \cos\varphi}{L_2 \cos\psi} + \varphi_t^2 \frac{L_1}{L_2}\left(\frac{\sin\varphi}{\cos\psi} + \frac{L_1 \cos^2\varphi}{L_2 \cos^2\psi} tg\psi\right)$$

$$x_{tt} = (x_{tt})_A - \psi_{tt}(y - y_A) - \psi_t[y_t - (y_t)_A] \quad y_{tt} = (y_{tt})_A + \psi_{tt}(x - x_A) + \psi_t[x_t - (x_t)_A]$$

Кривошипно-ползунный механизм (расчет через координаты точки А)



$$y_A = L_1 \sin\varphi$$



$$\sin(\pi - \psi) = (L_1 \sin\varphi - b)/L_2$$

$$\psi = \pi - \arcsin\left(\frac{y_A - b}{L_2}\right)$$

$$\psi_t = -\frac{(y_t)_A}{L_2 \cos(\pi - \psi)}$$

$$\sin\psi = (L_1 \sin\varphi - b)/L_2$$

$$\psi = \arcsin\left(\frac{y_A - b}{L_2}\right)$$

$$\psi_t = \frac{(y_t)_A}{L_2 \cos\psi}$$

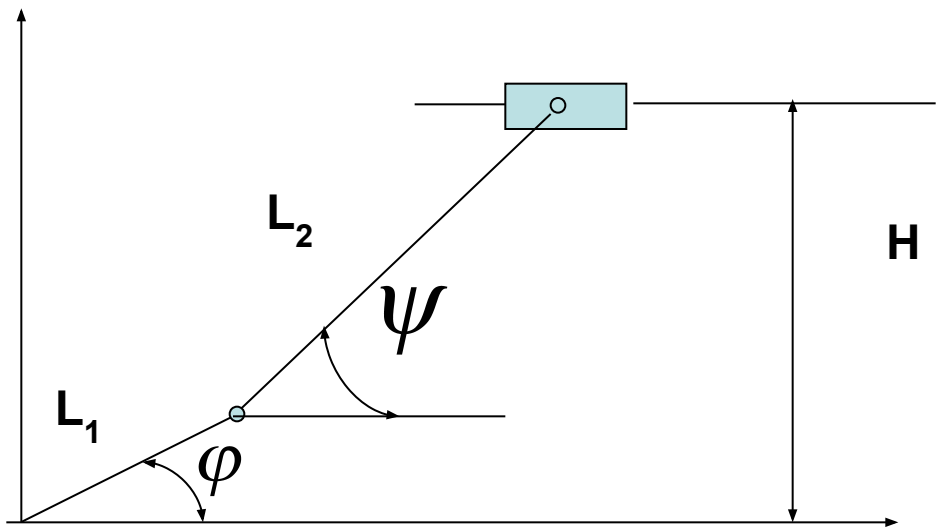
$$\psi_{tt} = \frac{(y_{tt})_A}{L_2 \cos\psi} + \psi_t (y_t)_A \frac{L_1}{L_2}\left(\frac{\sin\psi}{\cos^2\psi}\right)$$

$$x_{tt} = (x_{tt})_A - \psi_{tt}(y - y_A) - \psi_t[y_t - (y_t)_A]$$

$$y_{tt} = (y_{tt})_A + \psi_{tt}(x - x_A) + \psi_t[x_t - (x_t)_A]$$

Кривошипно-ползунный механизм.

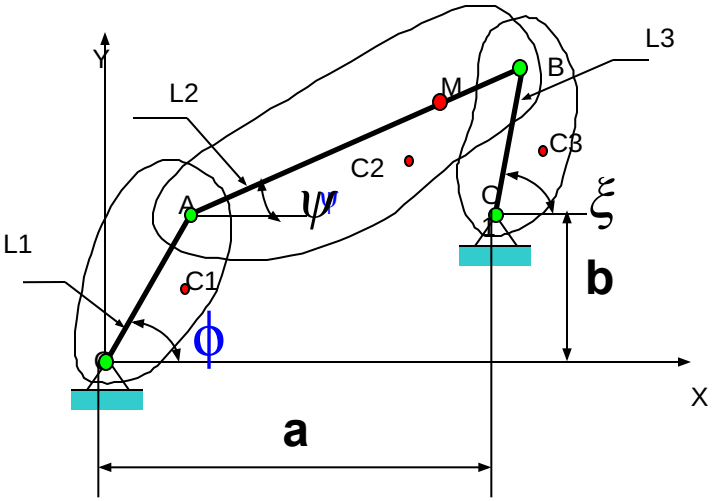
Другой вариант записи кинематических связей



$$L_1 \sin\varphi + L_2 \sin\psi = H$$ **=const**

Кривошипно-коромысловый механизм

$$L_1 \cos\varphi + L_2 \cos\psi - L_3 \cos\xi = a \qquad L_1 \sin\varphi + L_2 \sin\psi - L_3 \sin\xi = b$$



$$a - L_1 \cos\varphi = L_2 \cos\psi - L_3 \cos\xi;$$
$$b - L_1 \sin\varphi = L_2 \sin\psi - L_3 \sin\xi. \qquad \textbf{(a)}$$

$$a - L_1 \cos\varphi = P \qquad b - L_1 \sin\varphi = Q$$

$$P - L_2 \cos\psi = -L_3 \cos\xi;$$
$$Q - L_2 \sin\psi = -L_3 \sin\xi,$$

$$(P - L_2 \cos\psi)^2 + (Q - L_2 \sin\psi)^2 = L_3^2$$

$$P \cos\psi + Q \sin\psi = \frac{(P^2 + Q^2 + L_2^2 - L_3^2)}{2L_2} = F.$$

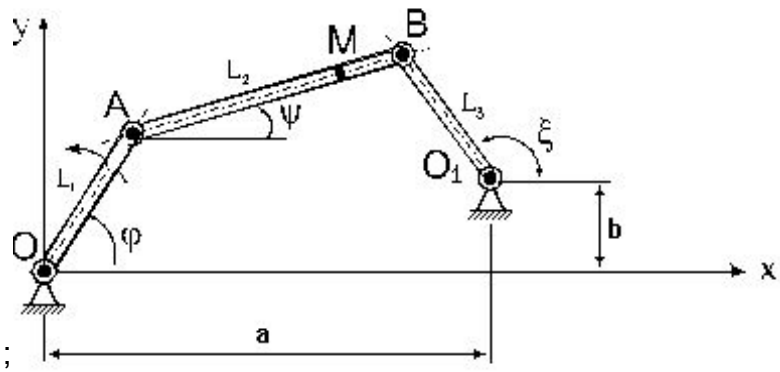
$$\sin\psi = \frac{2tg(\psi/2)}{1 + tg^2(\psi/2)} \qquad \cos\psi = \frac{1 - tg^2(\psi/2)}{1 + tg^2(\psi/2)}$$

$$tg\left(\frac{\psi}{2}\right) = \frac{Q \pm \sqrt{Q^2 + P^2 - F^2}}{P + F},$$

$$P[1 - tg^2(\psi/2)] + 2Q\,tg(\psi/2) = F[1 + tg^2(\psi/2)]$$

Кривошипно-коромысловый механизм

$$L_1 \cos\varphi + L_2 \cos\psi - L_3 \cos\xi = a \qquad L_1 \sin\varphi + L_2 \sin\psi - L_3 \sin\xi = b$$



$$a - L_1 \cos\varphi = L_2 \cos\psi - L_3 \cos\xi;$$
$$b - L_1 \sin\varphi = L_2 \sin\psi - L_3 \sin\xi. \qquad \textbf{(a)}$$

$$a - L_1 \cos\varphi = P \qquad b - L_1 \sin\varphi = Q$$

$$P - L_2 \cos\psi = -L_3 \cos\xi;$$
$$Q - L_2 \sin\psi = -L_3 \sin\xi,$$

$$(P - L_2 \cos\psi)^2 + (Q - L_2 \sin\psi)^2 = L_3^2$$

$$P \cos\psi + Q \sin\psi = \frac{(P^2 + Q^2 + L_2^2 - L_3^2)}{2L_2} = F.$$

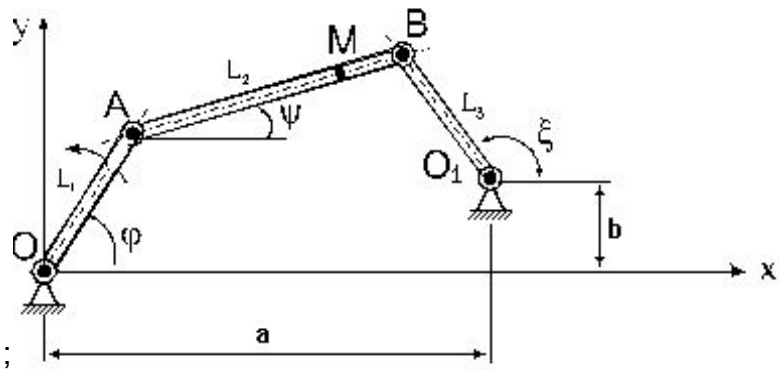
$$\sin\psi = \frac{2tg(\psi/2)}{1 + tg^2(\psi/2)} \qquad \cos\psi = \frac{1 - tg^2(\psi/2)}{1 + tg^2(\psi/2)}$$

$$tg\left(\frac{\psi}{2}\right) = \frac{Q \pm \sqrt{Q^2 + P^2 - F^2}}{P + F},$$

$$P[1 - tg^2(\psi/2)] + 2Q\,tg(\psi/2) = F[1 + tg^2(\psi/2)]$$

Кривошипно-коромысловый механизм.

Уравнения для углов наклона шатуна и коромысла



$$a - L_1 \cos\varphi = L_2 \cos\psi - L_3 \cos\xi;$$
$$b - L_1 \sin\varphi = L_2 \sin\psi - L_3 \sin\xi. \qquad \textbf{(a)}$$

$$a - L_1 \cos\varphi = P \qquad b - L_1 \sin\varphi = Q$$

$$\boxed{\begin{aligned} P - L_2 \cos\psi &= -L_3 \cos\xi; \\ Q - L_2 \sin\psi &= -L_3 \sin\xi, \end{aligned}}$$

$$tg\left(\frac{\psi}{2}\right) = \frac{Q \pm \sqrt{Q^2 + P^2 - F^2}}{P + F},$$

$$\psi_{1,2} = 2arctg\frac{Q \pm \sqrt{Q^2 + P^2 - F^2}}{P + F},$$

Из системы (а) получаем 4 варианта значений угла «кси»:

$$\cos\xi = (L_1 \cos\varphi + L_2 \cos\psi - a)/L_3 \qquad \sin\xi = (L_1 \sin\varphi + L_2 \sin\psi - b)/L_3$$

$$\xi = \arccos\frac{L_2 \cos\psi - P}{L_3}, \qquad \xi = \arcsin\frac{L_2 \sin\psi - Q}{L_3}$$

Соотношения между угловыми скоростями для кривошипно-коромыслового механизма

Дифференцируем систему уравнений (а) (см. сл. 16-18) по времени

$$-\psi_t L_2 \sin\psi + \xi_t L_3 \sin\xi = \varphi_t L_1 \sin\varphi;$$
$$\psi_t L_2 \cos\psi - \xi_t L_3 \cos\xi = -\varphi_t L_1 \cos\varphi, \qquad \textbf{(b)}$$

Решаем полученную систему по методу определителей

$$\Delta = \begin{vmatrix} -L_2 \sin\psi & L_3 \sin\xi \\ L_2 \cos\psi & -L_3 cos\xi \end{vmatrix} = L_2 L_3 \sin(\psi - \xi)$$

$$\Delta_{\psi_t} = \begin{vmatrix} \varphi_t L_1 \sin\varphi & L_3 \sin\xi \\ -\varphi_t L_1 \cos\varphi & -L_3 \cos\xi \end{vmatrix} = -\varphi_t L_1 L_3 \sin(\xi - \varphi)$$

$$\Delta_{\xi_t} = \begin{vmatrix} -L_2 \sin\psi & \varphi_t L_1 \sin\varphi \\ L_2 \cos\psi & -\varphi_t L_1 \cos\varphi \end{vmatrix} = \varphi_t L_1 L_2 \sin(\psi - \varphi)$$

$$\psi_t = \varphi_t \frac{L_1 \sin(\varphi - \xi)}{L_2 \sin(\psi - \xi)} \qquad \xi_t = \varphi_t \frac{L_1 \sin(\psi - \varphi)}{L_3 \sin(\psi - \xi)}$$

Решение системы линейных уравнений по методу Крамера

$$\psi_t L_2 \cos\psi - \xi_t L_3 \cos\xi = -\varphi_t L_1 \cos\varphi$$
$$-\psi_t L_2 \sin\psi + \xi_t L_3 \sin\xi = \varphi_t L_1 \sin\varphi \qquad \textbf{(b)}$$

Исходная система и ее основной определитель

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y = b_2$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

«Дополнительные определители»

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - b_2 a_{12}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$$

Решение системы

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

Соотношения между угловыми ускорениями для кривошипно-коромыслового механизма

Дифференцируем систему уравнений (b) (см. сл. 19) по времени

$$-\psi_{tt} L_2 \sin\psi + \xi_{tt} L_3 \sin\xi = \varphi_{tt} L_1 \cos\varphi + \varphi_t^2 L_1 \cos\varphi + \psi_t^2 L_2 \cos\psi - \xi_t^2 L_3 \cos\xi;$$

$$\psi_{tt} L_2 \cos\psi - \xi_{tt} L_3 \cos\xi = -\varphi_{tt} L_1 \cos\varphi + \varphi_t^2 L_1 \sin\varphi + \psi_t^2 L_2 \sin\psi - \xi_t^2 L_3 \sin\xi$$

Решаем полученную систему по методу определителей

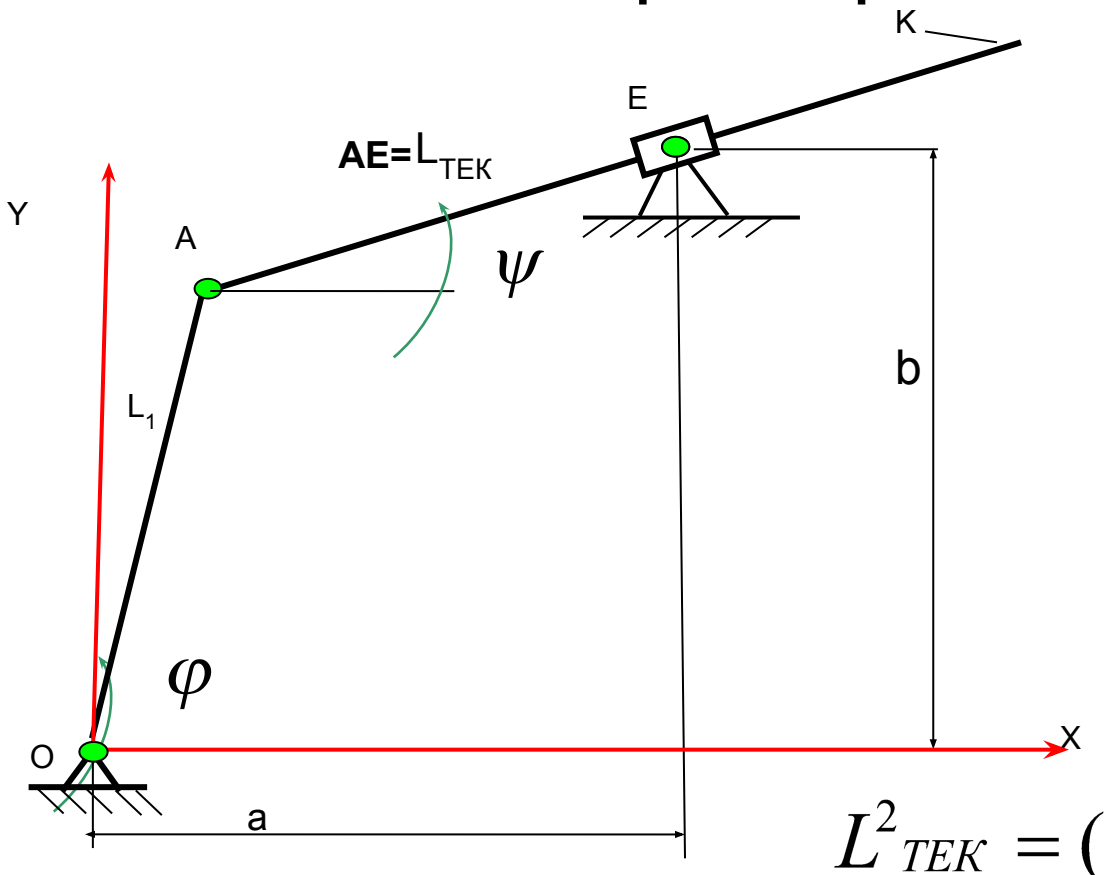
$$\Delta = \begin{vmatrix} -L_2 \sin\psi & L_3 \sin\xi \\ L_2 \cos\psi & -L_3 cos\xi \end{vmatrix} = L_2 L_3 \sin(\psi - \xi)$$

$$f_1 = \varphi_{tt} L_1 \sin\varphi + \varphi_t^2 L_1 \cos\varphi + \psi_t^2 L_2 \cos\psi - \xi_t^2 L_3 \cos\xi$$

$$f_2 = -\varphi_{tt} L_1 \cos\varphi + \varphi_t^2 L_1 \sin\varphi + \psi_t^2 L_2 \sin\psi - \xi_t^2 L_3 \sin\xi$$

$$\psi_{tt} = \frac{f_1 \cos\xi + f_2 \sin\xi}{L_2 \sin(\xi - \psi)} \qquad \xi_{tt} = \frac{f_1 \cos\psi + f_2 \sin\psi}{L_3 \sin(\xi - \psi)}$$

Кулисный механизм. Угловые характеристики



$$\sin\psi = \frac{b - y_A}{L_{TEK}}$$

$$\cos\psi = \frac{a - x_A}{L_{TEK}}$$

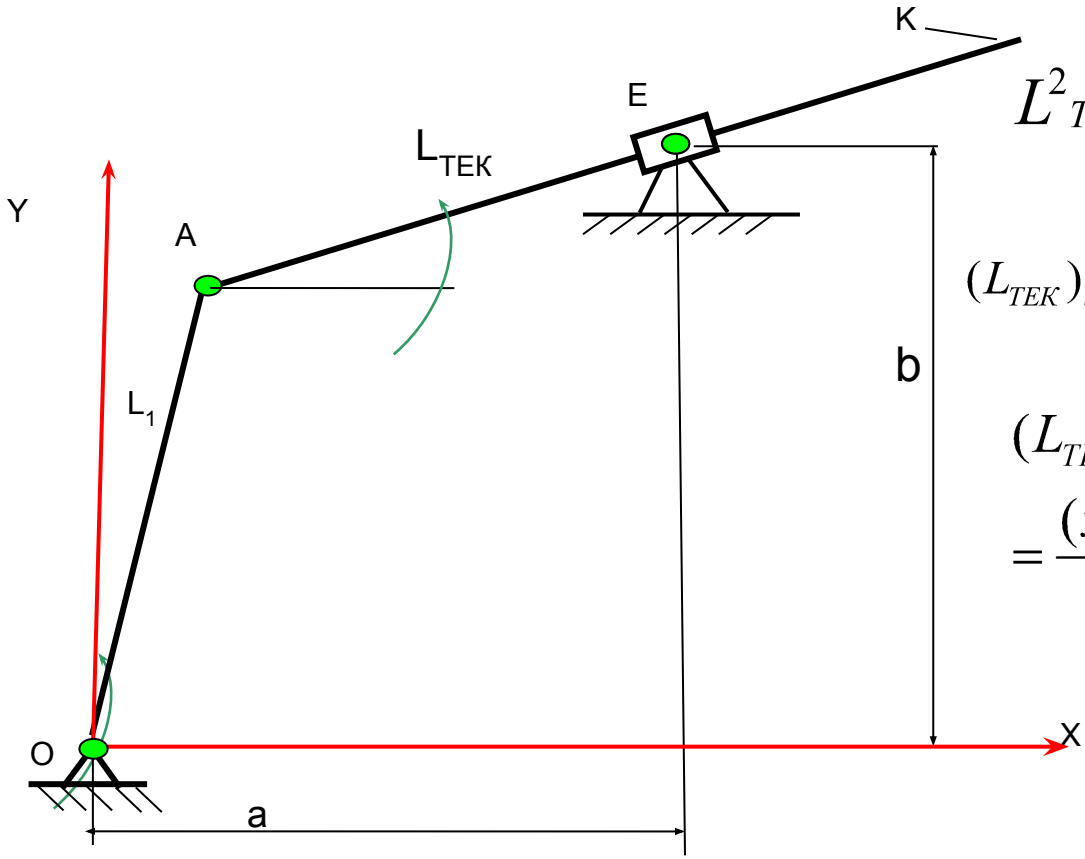
$$tg\psi = \frac{b - y_A}{a - x_A}$$

$$L^2{}_{TEK} = (a - x_A)^2 + (b - y_A)^2$$

$$\psi_t = \cos^2\psi \frac{(y_t)_A(x_A - a) - (x_t)_A(y_A - b)}{(a - x_A)^2}$$

Кулисные механизмы.

Направляющая с неподвижной осью



$$L^2_{TEK} = (a - x_A)^2 + (b - y_A)^2$$

$$(L_{TEK})_t = -\frac{(x_t)_A(a - x_A) + (y_t)_A(b - y_A)}{L_{TEK}}$$

$$(L_{TEK})_t = \frac{(x_t)_A(x_A - a) + (y_t)_A(y_A - b)}{L_{TEK}}$$

$$(L_{TEK})_{tt} = \frac{(x_{tt})_A(x_A - a) + (y_{tt})_A(y_A - b) + (x_{tt})_A + (y_{tt})_A}{L_{TEK}} -$$

$$- \frac{(x_t)_A(x_A - a) + (y_t)_A(y_A - b)}{(L_{TEK})^2}(L_{TEK})_t$$

Кулисные механизмы.

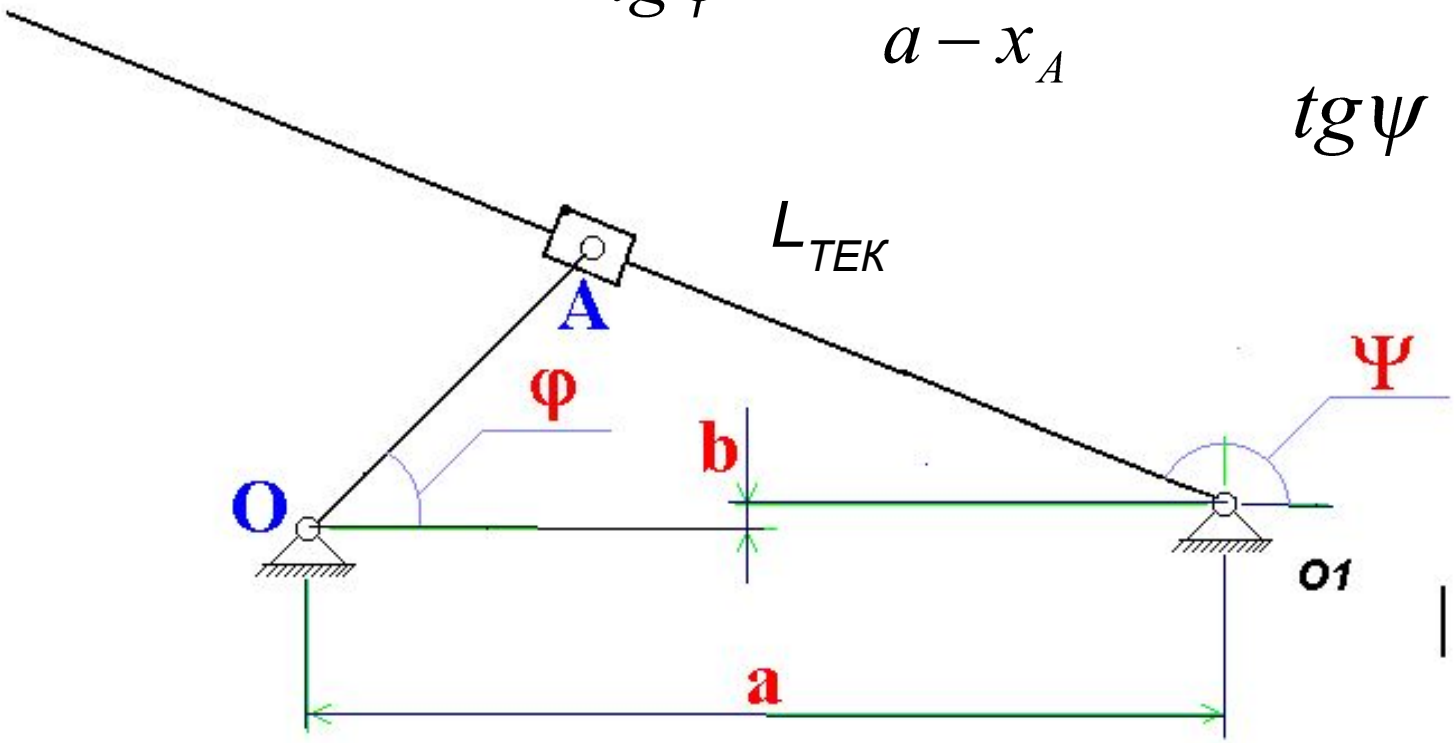
Направляющая с подвижной осью

$$L^2_{ТЕК} = (a - x_A)^2 + (b - y_A)^2$$

$$tg(\pi - \psi) = \frac{y_A - b}{a - x_A}$$

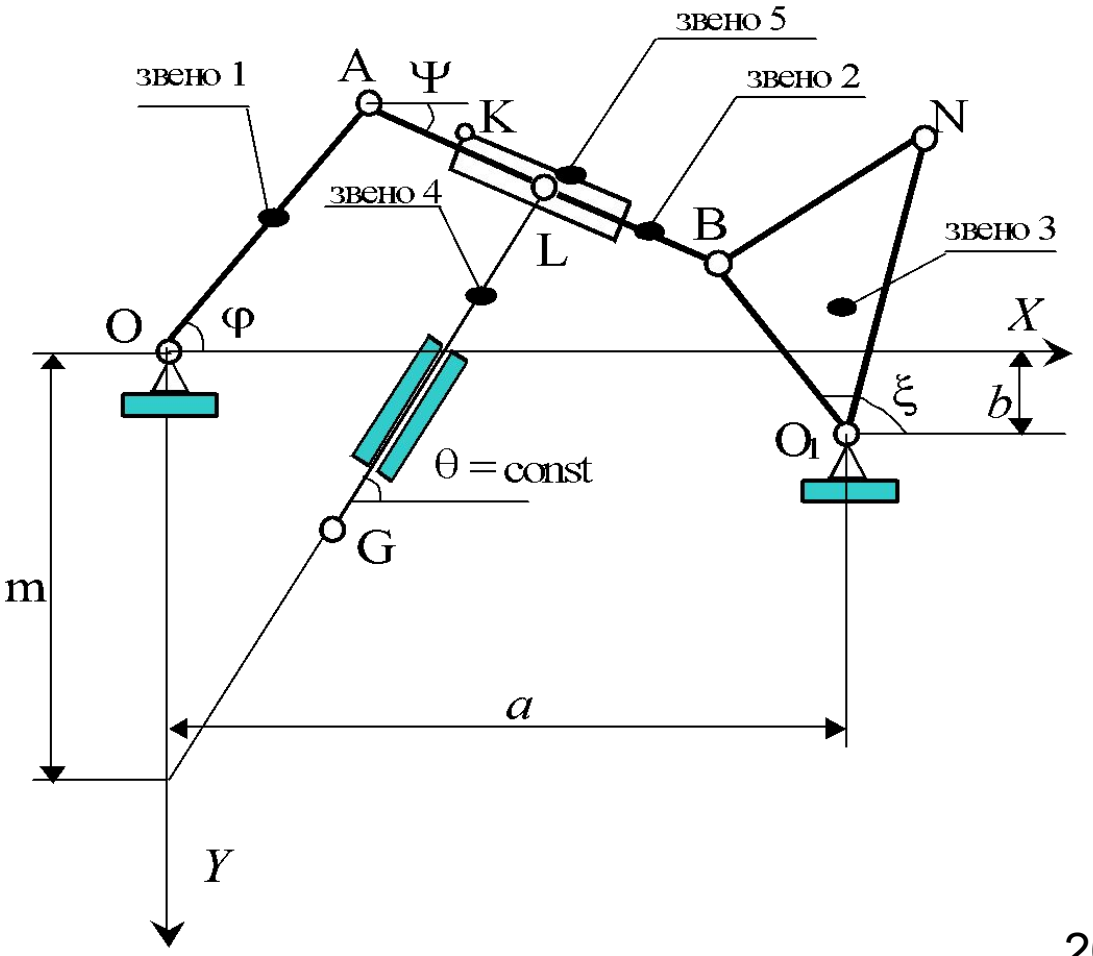
$$tg\psi = -\frac{y_A - b}{a - x_A}$$

$$tg\psi = \frac{b - y_A}{a - x_A}$$



- Все механизмы отличаются кинематическими связями.
- *Число возможных вариантов механизмов и кинематических связей бесконечно*.

КУЛИСНАЯ ПАРА С ПОЛЗУШКОЙ НА ШАТУНЕ И ФИКСИРОВАННОЙ НАПРАВЛЯЮЩЕЙ



КУЛИСНАЯ ПАРА С ПОЛЗУШКОЙ НА ШАТУНЕ И ФИКСИРОВАННОЙ НАПРАВЛЯЮЩЕЙ

- Пусть уравнение фиксированной направляющей имеет вид
- $$y = m + xtg\theta \quad (1)$$
- где *m* - отрезок, отсекаемый прямой с углом наклона θ на оси «y».Положение шатуна определяют оси шарниров А и В. Коэффициенты уравнения
- $$y = n + xtg\eta \quad (2)$$
-
- соединяющей их прямой находим из системы уравнений
- $$n + x_A tg\eta = y_A \quad (3a) \qquad n + x_B tg\eta = y_B \quad (3b)$$
- откуда
- $$tg\eta = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad (4)$$;
- Величину “n” удобно найти из уравнения (3a) или (3b).
- Точка пересечения L должна одновременно принадлежать обеим прямым (1) и (2), тогда ее координаты должна определять система уравнений
- $$y_L - x_L tg\eta = n \quad (5a) \qquad y_L - x_L tg\theta = m \quad (5b)$$
- Отсюда находим
- $$x_L = \frac{n - m}{tg\theta - tg\eta} \quad 6) \qquad y_L = \frac{ntg\theta - mtg\eta}{tg\theta - tg\eta} \quad (7)$$
-
- При программировании на ЭВМ для расчета ординаты точки пересечения удобнее пользоваться одним из уравнений (5).

УГОЛ МЕЖДУ ШАТУНОМ И ФИКСИРОВАННЫМ НАПРАВЛЕНИЕМ ДВИЖЕНИЯ ПОЛЗУНА

- Уравнение прямой, вдоль которой движется ползун
- (1) $$y = m + xtg\theta$$
- где *m* - отрезок, отсекаемый прямой с углом наклона «Тета» на оси «y».Положение шатуна определяют оси шарниров А и В. Уравнение прямой, ортогональной (1)
- (2) $$y = n + xtg\eta$$
- из условия ортогональности должно иметь угловой коэффициент
- (3) $$y = n - x / tg\theta$$
- Слагаемое “n” находим из условия прохождения прямой (2) через точку D с координатами *xD*, *yD* , т.е.
- $$n = y_D + \frac{x_D}{tg\theta} \quad (4) \qquad y = y_D - \frac{x - x_D}{tg\theta}$$
- Координаты точки пересечения прямых (1) и (2) определяются системой уравнений
- $$-x_N tg\theta + y_N = m \qquad \frac{x_N}{tg\theta} + y_N = y_D + \frac{x_D}{tg\theta}$$
- и составляют (по любому методу решения системы)
- ; (6) $$x_N = \frac{x_D + (y_D - m)tg\theta}{1 + tg^2\theta} \qquad y_N = \frac{m + x_D tg\theta + y_D tg^2\theta}{1 + tg^2\theta}$$
- Затем находим расстояние между точками D и N
- (7) $$h = \sqrt{(x_N - x_D)^2 + (y_N - y_D)^2}$$
- и искомый угол

$$\sin(\mu - \theta) = \frac{h}{L} \qquad \mu = \theta + \arcsin(\frac{h}{L})$$

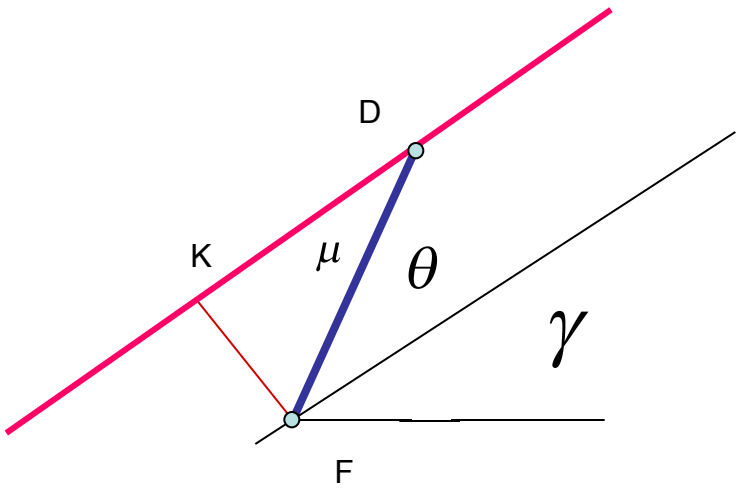
FD - шатун

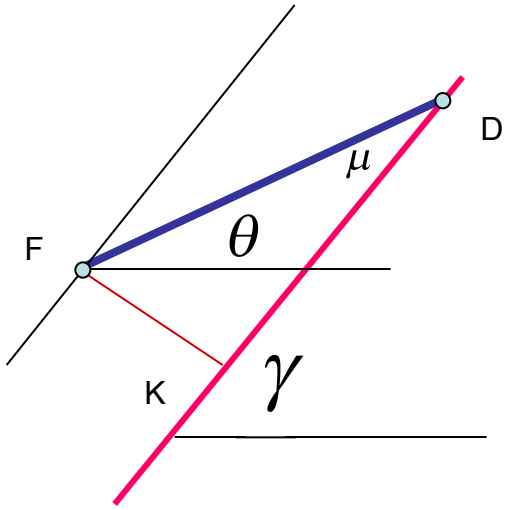
F, D – оси шарниров, соединяющих шатун с смежными звеньями.
К- точка пересечения перпендикуляра, опущенного из оси шарнира F на направление движение ползуна.

γ **- угол наклона направляющей DK движения ползуна**

θ **- угол наклона шатуна FD**

μ **- угол между направлением DK и шатуном FD**





- Расстояние от точки $P(x_P, y_P)$ до прямой $A*x + B*y + C = 0$ определяет уравнение

$$h = (-sign(C))\frac{Ax_P + By_P + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Знак "-" соответствует случаю, когда точка P и начало координат находятся по одну сторону от прямой
Знак "+" соответствует случаю, когда точка P и начало координат находятся по разные стороны прямой

Этот вариант удобен тем, что легко определить производные *ht* и *htt* , а именно:

$$h_t = \frac{A(x_t)_P + B(y_t)_P + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad h_{tt} = \frac{A(x_{tt})_P + B(y_{tt})_P + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

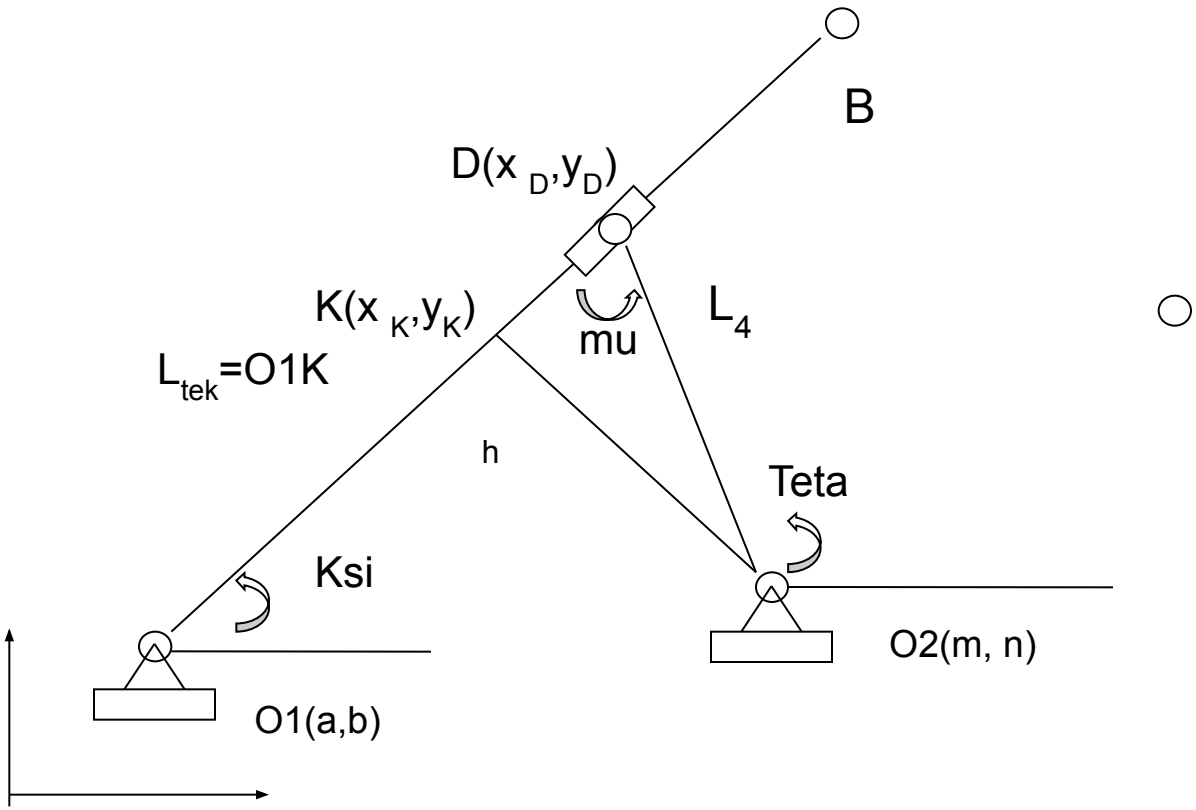
$$\sin\mu = \frac{h}{L_5} \qquad y_F < y_K \qquad \theta = \gamma + \mu$$

$$y_F > y_K \qquad \theta = \gamma - \mu$$

$$\theta_t = \pm\mu_t + 0 \qquad \theta_{tt} = \pm\mu_{tt}$$

$$\mu_t = \frac{h_t}{L_5\cos\mu} \qquad \mu_{tt} = \frac{h_{tt}}{L_5\cos\mu} + \mu_t\sin\mu\frac{h_t}{L_5\cos^2\mu}$$

Два коромысла с кулисной парой



Два коромысла с кулисной парой - 2

Уравнение прямой O1B

$$y = b + tg\xi(x - a)$$

Уравнение прямой O2K

$$y = n + (m - x)/tg\xi$$

Координаты точки пересечения «K»

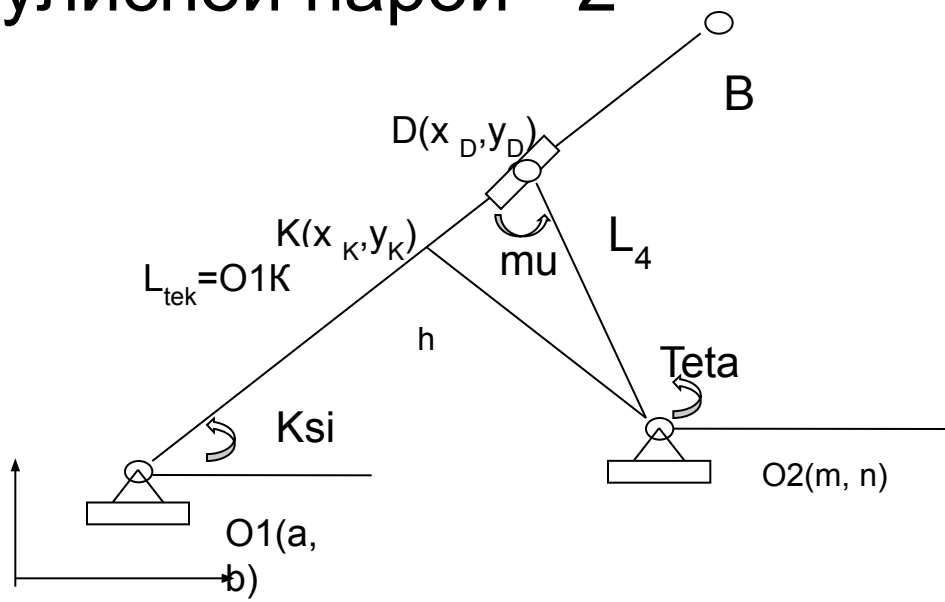
$$x_K = 0.5(n - b)\sin(2\xi) + m\cos^2\xi + a\sin^2\xi$$

$$y_K = b + tg\xi(x_K - a)$$

Компоненты скорости

$$(x_t)_K = \xi_t[(n - b)\cos(2\xi) + (a - m)\sin(2\xi)]$$

$$(y_t)_K = \xi_t(x_K - a)/\cos^2\xi + tg\xi(x_t)_K$$



Компоненты ускорения

$$(x_{tt})_K = \xi_{tt}[(n - b)\cos(2\xi) + (a - m)\sin(2\xi)] + 2\xi_t^2[(a - m)\cos(2\xi) + (b - n)\sin(2\xi)]$$

$$(y_{tt})_K = \xi_{tt}(x_K - a)/\cos^2\xi + 2(x_K - a)\sin\xi * \xi_t^2/\cos^3\xi + 2\xi_t(x_t)_K/\cos^2\xi + tg\xi(x_{tt})_K$$

Расстояние h между осью O2 и прямой O1B

$$h^2 = (x_K - m)^2 + (y_K - n)^2$$

Производные по времени

$$h_t = [(x_K - m)(x_t)_K + (y_K - n)(y_t)_K]/h$$

$$h_{tt} = -h_t[(x_K - m)(x_t)_K + (y_K - n)(y_t)_K]/h^2 + [(x_K - m)(x_{tt})_K + (y_K - n)(y_{tt})_K]/h +$$

$$+ [(x_t)^2{}_K + (y_t)^2{}_K]/h$$

Два коромысла с кулисной парой - 3

Для расчета текущей длины О1Д находим точку пересечения Д прямых О1ДВ (уравнение приведено выше) и О2Д

Уравнение прямой О2Д

$$y = n + tg\theta(x - m)$$

Получаем систему

$$x_D tg\theta - y_D = mtg\theta - n$$

$$x_D tg\xi - y_D = atg\xi - b$$

$$x_D = \frac{mtg\theta - atg\xi + b - n}{tg\theta - tg\xi} \qquad y_D = b + tg\xi(x_D - a)$$

Производные по времени

$$(x_t)_D = \frac{(m\theta_t / \cos^2\theta - a\xi_t / \cos^2\xi)(tg\theta - tg\xi) - x_D(\theta_t / \cos^2\theta - \xi_t / \cos^2\xi)(tg\theta - tg\xi)}{(tg\theta - tg\xi)^2}$$

$$(y_t)_D = \xi_t(x_D - a)/\cos^2\xi + tg\xi(x_t)_D$$

Текущая длина

$$L_{tek}{}^2 = (x_D - a)^2 + (y_D - b)^2$$

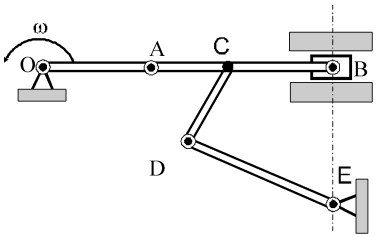
$$(L_{tek})_t = [(x_D - a)(x_t)_D + (y_D - b)(y_t)_D]/L_{tek}$$

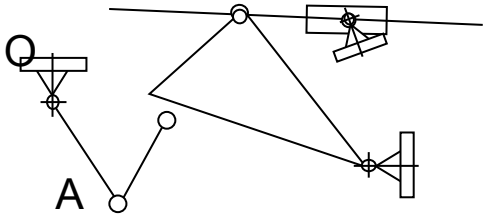
$$(L_{tek})_{tt} = -(L_{tek})_t[(x_D - a)(x_t)_D + (y_D - b)(y_t)_D]/(L_{tek})^2 +$$

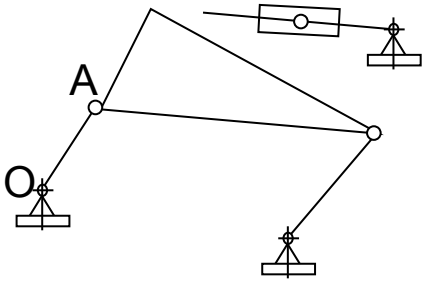
$$[(x_D - a)(x_{tt})_D + (y_D - b)(y_{tt})_D]/(L_{tek}) + [(x_t)_D^2 + (y_t)_D^2]/(L_{tek})$$

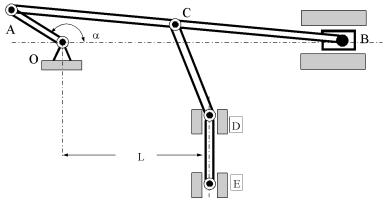
Рекомендуемая последовательность кинематического анализа механизма -1

- 1. Выбрать (получить) кинематическую схему механизма. Преобразовать ее к общему виду, включающему все возможные расположения осей шарниров. Выделить ведущее звено – кривошип. Провести структурный анализ. Найти число степеней свободы механизма.



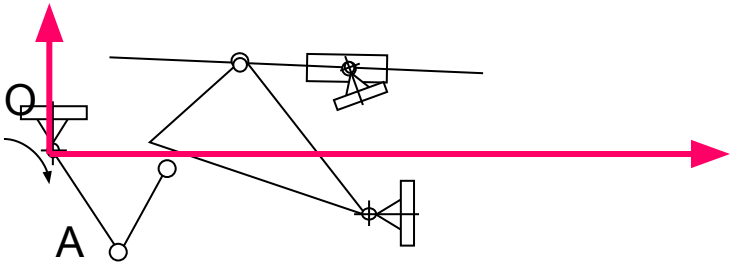


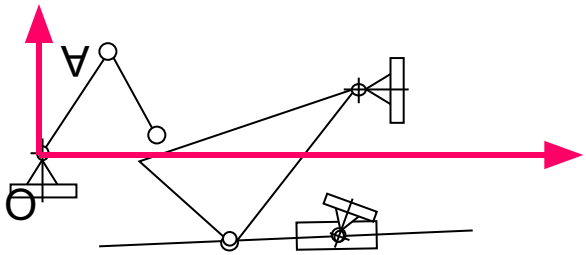


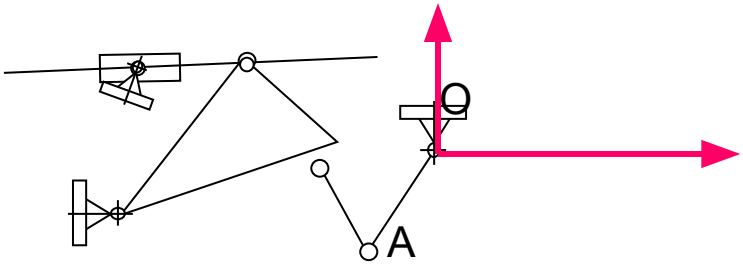


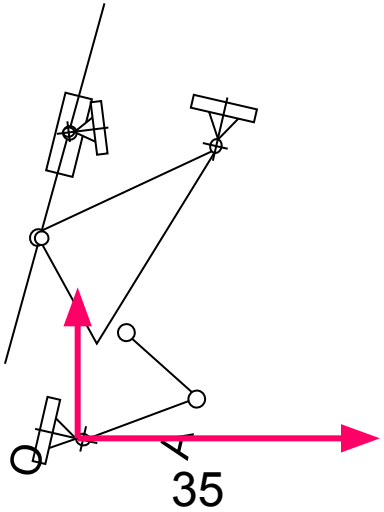
Рекомендуемая последовательность кинематического анализа механизма - 2

- **2. Выбрать предпочтительную систему координат, наиболее удобную для математического описания работы механизма. Ввести обозначения для расстояний, углов, координат характерных точек, уравнений фиксированных направляющих и пр.**



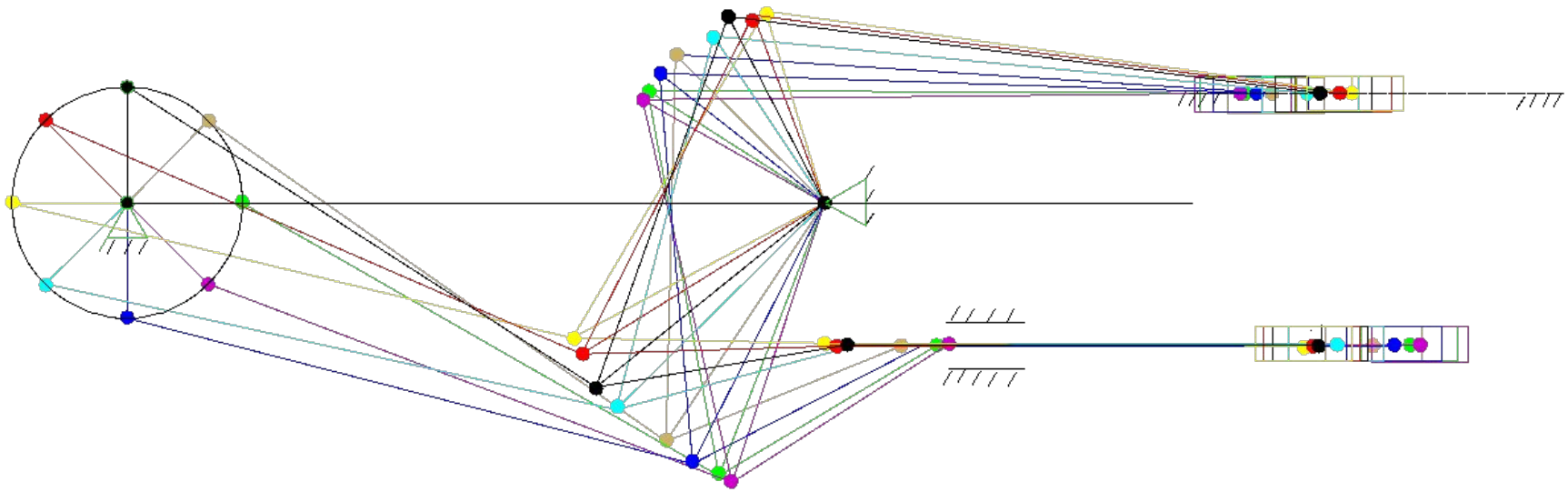






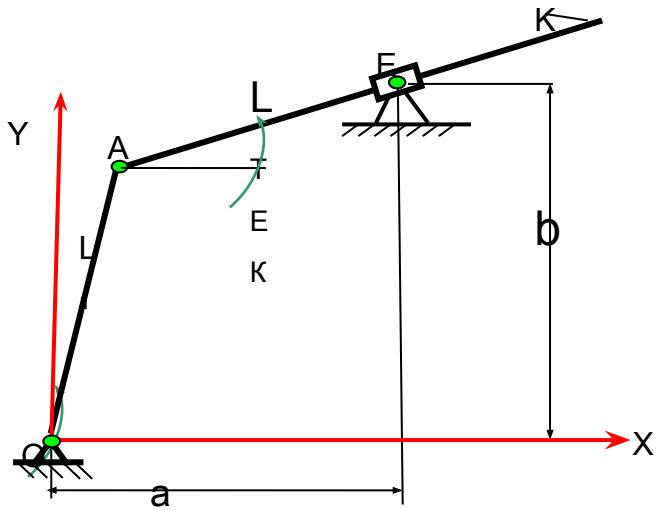
Рекомендуемая последовательность кинематического анализа механизма-3

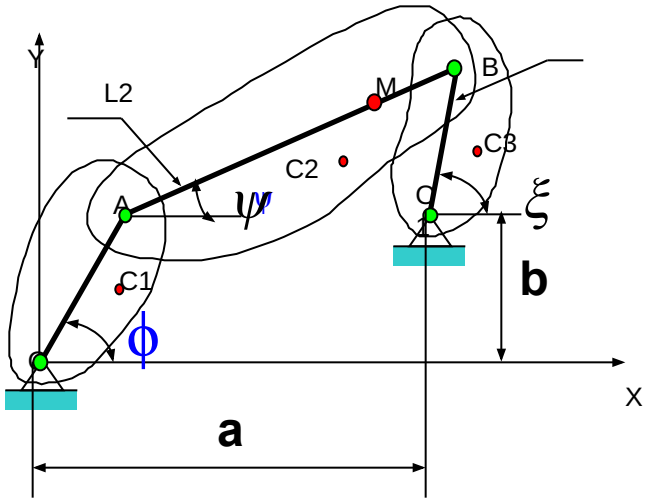
3. Для выбора допустимых соотношений расстояний между осями шарниров, обеспечивающих работоспособность механизма при полном обороте кривошипа, начертить механизм при 8 его положениях (схема глубинного насоса, Кретов И.И. ГМО-2-03)



Рекомендуемая последовательность кинематического анализа механизма - 4

- 4. Выбрать основной («базовый») четырехзвенник механизма, включающий стойку и кривошип (возможны несколько вариантов).





Рекомендуемая последовательность кинематического анализа механизма - 5

5. Выписываем (из лекций или учебного пособия) уравнения для координат, скоростей и ускорений каждого из звеньев четырехзвенника. Все они могут быть получены из общих соотношений для шатуна (см. слайд 7).

$$x = x_p + (\alpha - \alpha_p)\cos(\Delta\varphi) - (\beta - \beta_p)\sin(\Delta\varphi)$$

$$y = y_p + (\alpha - \alpha_p)\sin(\Delta\varphi) + (\beta - \beta_p)\cos(\Delta\varphi)$$

$$x_t = (x_t)_P - \varphi_t(y - y_P) \qquad y_t = (y_t)_P + \varphi_t(x - x_P)$$

$$x_{tt} = (x_{tt})_P - \varphi_{tt}(y - y_P) - \varphi^2{}_t(x - x_P)$$

$$y_{tt} = (y_{tt})_P + \varphi_{tt}(x - x_P) - \varphi^2{}_t(y - y_P)$$

Рекомендуемая последовательность кинематического анализа механизма - 6

6. Записываем уравнения кинематических связей для рассматриваемого четырехзвенника, находим соотношения для углов, угловых скоростей и ускорений.

Кривошипно-коромысловый механизм (см. слайды 16-21)

$$tg(\frac{\psi}{2}) = \frac{Q \pm \sqrt{Q^2 + P^2 - F^2}}{P + F},$$

$$\psi_t = \varphi_t \frac{L_1 \sin(\varphi - \xi)}{L_2 \sin(\psi - \xi)} \qquad \xi_t = \varphi_t \frac{L_1 \sin(\psi - \varphi)}{L_3 \sin(\psi - \xi)}$$

Кривошипно-кулисный механизм (см. слайды 22-24)

$$tg\psi = \frac{b - y_A}{a - x_A} \qquad \psi_t = \cos^2\psi \frac{(y_t)_A (x_A - a) - (x_t)_A (y_A - b)}{(a - x_A)^2}$$

Рекомендуемая последовательность кинематического анализа механизма - 7

- 7. Переходим к программированию задачи, например в электронных таблицах Excel.

7.1. Указываем автора работы, группу, схему (строки 1-2)

7.2. Выделяем блок исходных данных (строки 3-19)

4	L1
5	L2
6	L3
7	Alfa_A
8	Betta_A
9	Fi0
10	(Fi_t)0=
11	(Fi_tt)0=
12	+Fi_tt
13	Delta_Fi (градусы)
14	Delta_Fi (радианы)

7.3. Вводим стандартный блок «Угловые характеристики работы кривошипа» (строки 20-30)

7.4. Рассчитываем координаты, компоненты скорости и ускорения шарнира А, принадлежащего кривошипу (строки 32-38). Расчет кинематических характеристик центра массы кривошипа С1 можно перенести в раздел «Энергетический анализ механизма»

Рекомендуемая последовательность кинематического анализа механизма - 8

Переходим к программированию блока «Кинематические связи»

8.1. Вводим промежуточные переменные, чтобы длина программируемых выражений не превышала 1 строки

8.2. После вычисления искомых угловых функций и их производных по времени проводим обязательную проверку исходных уравнений

8.3. Определяем все возможные решения системы уравнений, описывающей кинематические связи в механизме.

8.4. Вводим обязательные строки «Принятые значения» и переносим в них адреса результатов, используемых в последующих расчетах.

Рекомендуемая последовательность кинематического анализа механизма - 9

Переходим к программированию кинематических характеристик ведомых звеньев четырехзвенника

9.1. Используя координаты, скорости и ускорения оси шарнира, связывающего исследуемое звено с ведущим, определяем координаты, скорости и ускорения других частиц звена, включая ось шарнира, связывающего его с последующим ведомым звеном.

9.2. Повторяем п. 9.1 для всех остальных звеньев механизма

Рекомендуемая последовательность кинематического анализа механизма - 10

Через каждые 5-8 строк программы проводим проверку результатов кинематических расчетов:

- для координат – по виду траектории,
- для скоростей и ускорений – по выполнению свойств производных от рассчитываемых функций (координат, углов и пр.),
- по сохранению расстояний между осями шарниров,
- по сравнения результатов с численным дифференцированием.

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМА

После завершения кинематического анализа переходим к расчету кинематических характеристик центров масс звеньев, их кинетической и потенциальной энергии, ньютоновых сил инерции и скорости изменения (мощности) кинетической и потенциальной энергии.

ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМА

Используя результаты кинематического и энергетического анализов, определяем обобщенные силы, приведенные к осям шарниров, с обязательной проверкой энергетического баланса при выборе различных комбинаций обобщенных сил.