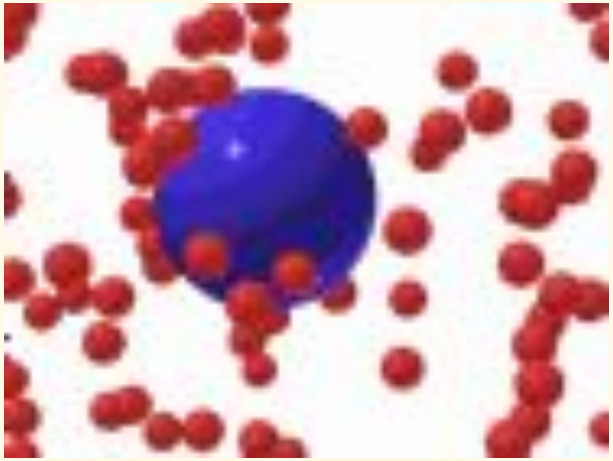
ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС

Детерминированность

Во всех случаях, когда говорят о детерминированности, подразумевают однозначную взаимосвязь причины и следствия. В применении к эволюционным законам, описывающим эволюцию процесса или объекта во времени, это означает, что если задано некоторое начальное состояние системы при $t = t_0$, то оно ***однозначно*** определяет состояние системы в любой момент времени $t > t_0$.

В общем случае зависимость будущего состояния системы $x(t)$ от начального $x(t_0)$ можно записать в виде: $x(t) = F[x(t_0)]$, где F – детерминированный закон (или оператор), который осуществляет строго однозначное преобразование начального состояния $x(t_0)$ в будущее состояние $x(t)$ для любого $t > t_0$. Этот закон может представлять собой функцию, дифференциальное или интегральное уравнение, просто некоторое правило, заданное таблицей или графиком, и т.д. Важно главное: закон F ***однозначно*** трансформирует начальное состояние (причину) в будущее состояние (следствие).

Хаос



Проведем мысленный эксперимент с броуновский частицей. Поместим частицу в начальный момент времени $t = t_0$ в раствор жидкости и с помощью микроскопа начнем фиксировать ее положение во времени, отмечая координаты частицы через равные интервалы Δt.

Мы увидим, что под действием случайных толчков со стороны окружающих молекул частица будет совершать нерегулярные блуждания, которые характеризуются запутанной траекторией. Повторим эксперимент несколько раз подряд, осуществляя в пределах возможного воспроизводство начальных условий опыта. Каковы будут результаты?

1. Траектории движения частицы будут сложными, непериодическими.
2. Любая попытка однозначного повторения опыта приведет к отрицательному результату. Каждый раз при повторении опыта с одинаковыми (в пределах наших возможностей) начальными условиями мы будем получать различные траектории движения частицы, которые даже близко не напоминают друг друга!

Классическое явление движения броуновской частицы дает нам четкие физические представления о хаосе как о непредсказуемом, случайном процессе.

Таким образом, если мы говорим о *хаосе*, мы подразумеваем, что изменение во времени состояния системы является случайным (его нельзя однозначно предсказать) и невоспроизводимым (процесс нельзя повторить).

Детерминизм ассоциируется с полной однозначной предсказуемостью и воспроизводимостью.

Что понимается под термином *детерминированный хаос*, где объединены два противоположных по смыслу понятия?

Устойчивость и неустойчивость

Режим функционирования динамической системы называется *устойчивым,* если малые возмущения в окрестности этого режима затухают во времени, стремясь к нулю. Если этого не происходит и малые отклонения от режима функционирования системы нарастают во времени, такой режим будет *неустойчивым.*

Нелинейность

Пусть мы имеем дело с неустойчивым режимом. Слегка нарушив режим малым воздействием, мы поначалу будем фиксировать нарастание возмущения. Будет ли оно бесконечным? В реальной жизни – никогда. Отклонение будет нарастать до тех пор, пока не вступит в действие некий механизм нелинейного ограничения процесса нарастания возмущения. Что это такое?

С физической точки зрения нарастание амплитуды не может происходить до бесконечности. На первом этапе, когда отклонение от исходного состояния мало, оно может нарастать. Дальше в силу ограниченности энергетических ресурсов системы это нарастание должно прекратиться или смениться уменьшением амплитуды отклонения. Любой новый режим должен иметь конечную амплитуду, и управляют этими процессами нелинейные законы. Мы говорим о нелинейности тогда, когда свойства системы непосредственно зависят от ее состояния.

Рассмотрим пример. Пусть зависимость амплитуды отклонения f от исходного состояния x определяется следующим соотношением:

$$f(x) = kx - bx^3, \tag{1}$$

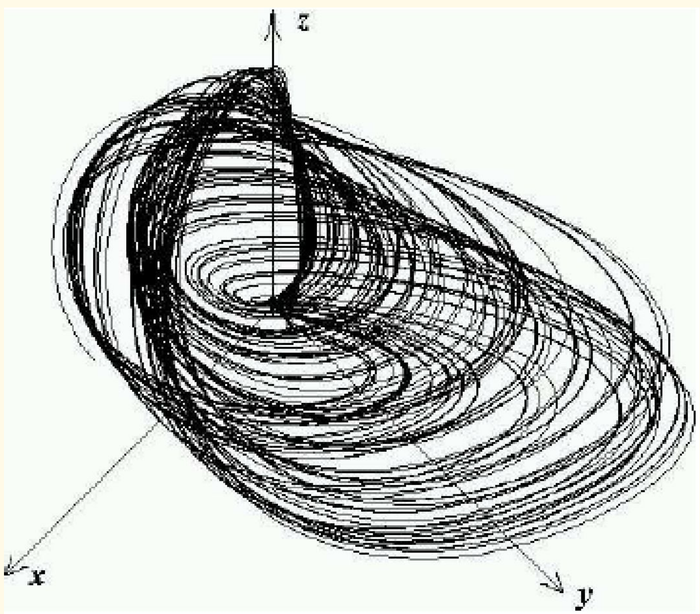
где k и b – постоянные положительные коэффициенты. Если $x << 1$, то $bx^3 << kx$ и

$$f(x) \cong kx. \tag{2}$$

В данном случае $f(x)$ линейно растет с ростом x. Если же x становится сравнимым с единицей, то членом bx^3 пренебрегать уже нельзя. В случае (1) рост отклонения $f(x)$ за счет члена kx начнет испытывать нелинейное ограничение в силу вычитания величины bx^3. При некоторых значениях x величина отклонения (1) вновь будет близка к нулю и все начнется сначала: отклонение начнет нарастать, достигнет максимума и затем, испытывая ограничение, опять уменьшится. Система будет как бы автоматически себя регулировать, так как ее свойства зависят от ее текущего состояния.

Детерминированный хаос

Пусть у нас есть некоторая динамическая система, описываемая системой 3-х дифференциальных уравнений. Исходное состояние – неустойчивое состояние равновесия в нуле координат. Зададим некоторое малое отклонение от состояния равновесия, проинтегрируем систему и представим ее решение в виде фазовой траектории в трехмерном пространстве. В силу неустойчивости начальное возмущение будет нарастать. Траектория раскручивается в трехмерном пространстве, удаляясь от точки 0 по спирали. Достигнув некоторых значений и испытывая действие нелинейного ограничения, траектория вновь вернется в окрестность исходного состояния.



Далее, ввиду неустойчивости, процесс будет повторяться. В принципе возможны 2 варианта: 1) траектория, спустя конечное время, замкнется, демонстрируя наличие некоторого сложного, но периодического процесса; 2) траектория будет воспроизводить некий апериодический процесс, если при $t \to \infty$ замыкания не произойдет.

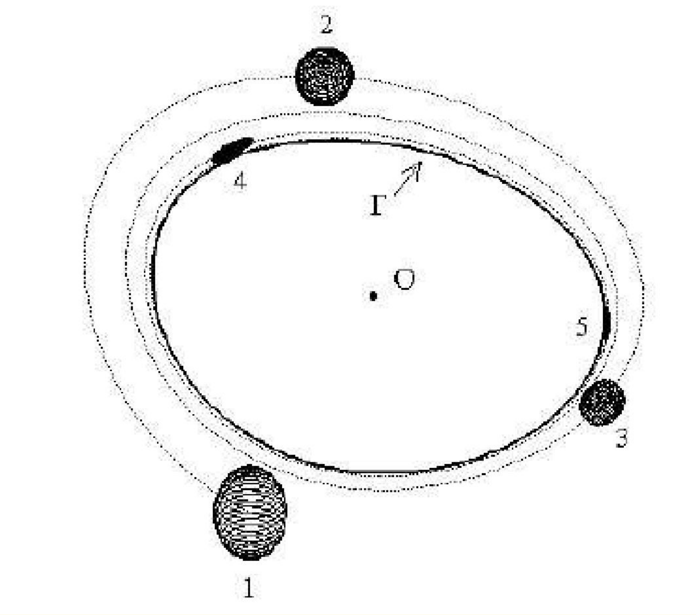
Второй случай и отвечает режиму ***детерминированного хаоса***!

Действительно, работает основной принцип детерминизма: будущее однозначно определено начальным состоянием. Однако процесс эволюции системы во времени является сложным, непериодическим. Чисто внешне он ничем не отличается от случайного, но при более детальном анализе вскрывается одно существенное отличие этого процесса от случайного: этот процесс воспроизводим!

Действительно, повторив еще раз начальное состояние, в силу детерминированности компьютер вновь воспроизведет ту же самую траекторию независимо от степени ее сложности. Значит, этот непериодический процесс не является хаотическим по определению хаоса, данного выше? Да, это сложный, похожий на случайный, но тем не менее детерминированный процесс. Важно здесь то, что он характеризуется неустойчивостью, и это обстоятельство позволяет нам понять еще одно принципиальное важное свойство систем с детерминированным хаосом – ***перемешивание.***

Важное замечание. Фазовая траектория в режиме детерминированного хаоса никогда не покидает некоторой замкнутой области и не притягивается к другим устойчивым объектам (аттракторам). Такие траектории в математике называют ***устойчивыми по Пуассону***, имея в виду факт возвращаемости траектории со временем в малую окрестность начальной точки. Но в общем понимании, данный тип движения всегда неустойчив.

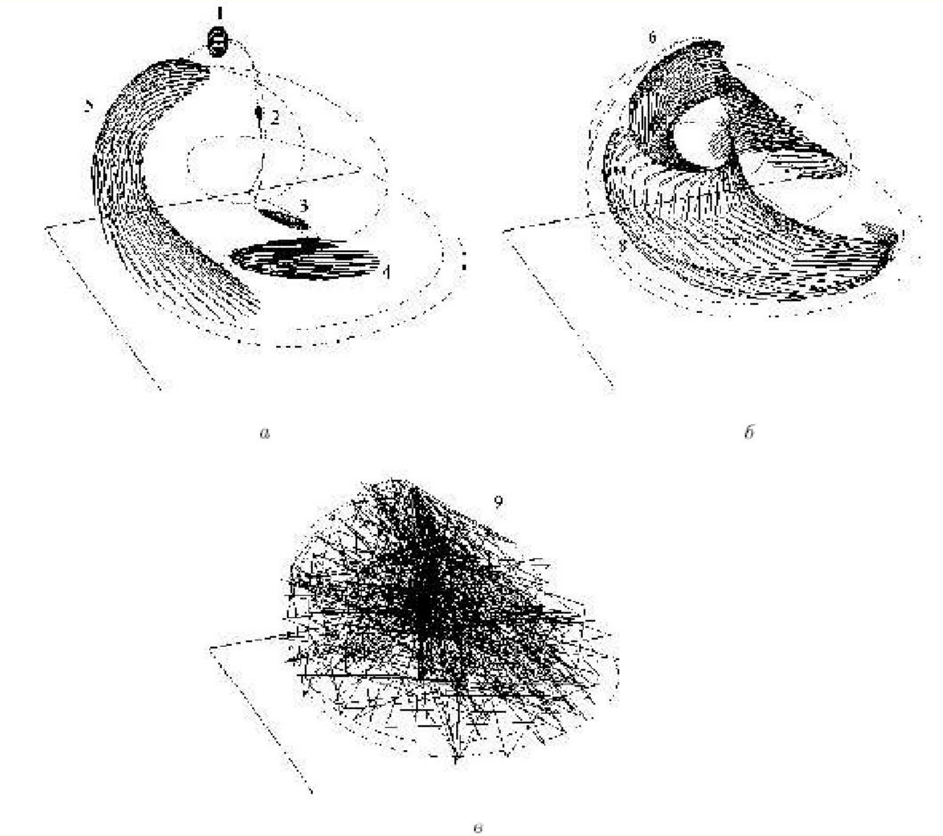
Перемешивание



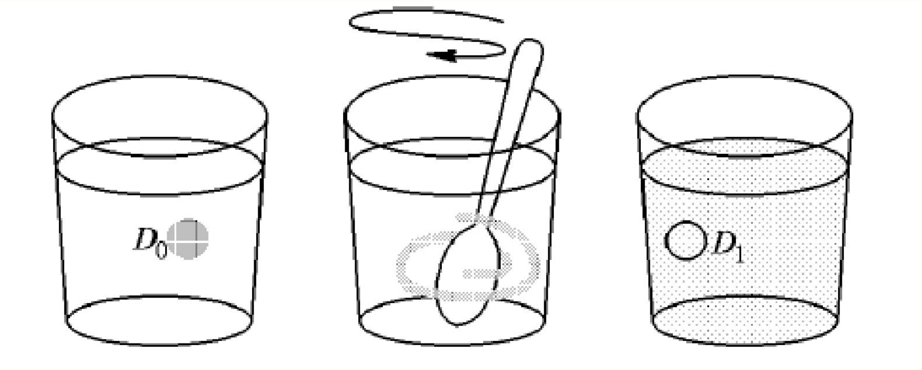
Рассмотрим устойчивый режим движения в детерминированных диссипативных динамических систем.

Пусть мы имеем в качестве начального состояния не точку с определенными координатами в пространстве состояний $\boldsymbol{x}_0$, а малую сферу радиуса $\varepsilon > 0$, окружающую эту точку. Любая точка внутри сферы характеризует малое отклонение от $\boldsymbol{x}_0$. Сфера включает совокупность возможных отклонений от исходного состояния, не превышающих по модулю ε. Теперь применим оператор эволюции и проследим за трансформацией этой сферы. В силу устойчивости выбранного нами режима любое малое отклонение во времени должно затухать! Это означает, что под действием детерминированного закона эволюции шарик радиуса ε во времени будет сжиматься и при $t \to \infty$ его радиус уменьшится до нуля!

Исходный фазовый объем в диссипативных системах во времени уменьшается. Это означает, что малые возмущения в итоге будут затухать и система вновь вернется в исходный режим, который является устойчивым.



Пусть исходный режим неустойчив. Это ведет к росту возмущений. Кроме того, диссипативные системы вне зависимости от вида устойчивости вызывают уменьшение элемента фазового объема во времени до нуля, что связано с потерями энергии. Как совместить эти два фактора? Существует единственное решение: элемент фазового объема по некоторым направлениям должен растягиваться, а по другим сжиматься. Причем, степень сжатия должна обязательно превалировать над степенью расширения, чтобы в итоге фазовый объем во времени уменьшался! В нелинейных диссипативных системах это оказывается возможным. Данный механизм показан на рисунке. В силу наличия механизма нелинейного ограничения фазовая траектория сложного режима колебаний сосредоточена в ограниченной области фазового пространства. При этом любая малая окрестность исходного начального состояния эволюционирует во времени и в итоге перемешивается по всей области, занятой траекторией.



Проведем эксперимент. В стакан с водой помести очень маленькую капельку чернил и размешаем воду чайной ложкой. Что при этом произойдет? Чернила практически равномерно разбегутся по всему объему воды, слегка окрасив ее. Частички чернил, первоначально сосредоточенные в маленьком объеме капельки, спустя время перемешивания можно будет обнаружить в любой части объема воды в стакане. Этот процесс и называется перемешиванием. Поток воды в стакане, созданный движением чайной ложки, можно интерпретировать как действие детерминированного эволюционного оператора динамической системы. Чаинка при этом будет двигаться по сложной, но детерминированной траектории. А капелька чернил, которую можно рассматривать как некий маленький объем в фазовом пространстве вокруг чаинки, под действием оператора эволюции перемешается по всему объему воды.

Вероятностные свойства детерминированных систем

В неустойчивых режимах в детерминированных нелинейных системах с перемешиванием мы можем предсказать будущее состояние однозначно только в случае строгого задания начальных условий. Однако, если учесть сколь угодно малую, но конечную ошибку, то детерминированное предсказание становится невозможным. Малая область первоначальной неопределенности размывается за счет перемешивания на конечную область фазового пространства. Теперь мы имеем дело с процессом, который ассоциируется с настоящей случайностью, с настоящим хаосом!

Основным свойством динамических систем, демонстрирующих режим детерминированного хаоса, является чувствительная зависимость режима функционирования к сколь угодно малым изменениям начальных условий. Именно это обстоятельство ведет к необходимости вводить вероятностные характеристики для описания динамики таких систем. В этом смысле становится понятным термин «детерминированный хаос», который характеризует наличие случайного, непредсказуемого поведения системы, которое управляется детерминированными законами.

Неопределенность в задании начального состояния – ситуация вполне реальная с точки зрения физики. Действительно, в силу конечной точности регистрации состояния любыми приборами, оно определяется с конечной (пусть сколь-угодно малой) ошибкой. Поэтому мы должны анализировать эволюцию во времени не начальной точки, а начальной области вокруг этой точки.

Странные аттракторы

Математическим образом режима функционирования диссипативной динамической системы служит ***аттрактор*** – предельное множество траекторий в фазовом пространстве системы, к которому стремятся все траектории из некоторой окрестности этого множества.

Регулярные аттракторы – неподвижная точка (устойчивое состояние равновесия), предельный цикл (устойчивое периодическое движение), тор (квазипериодические колебания).

Странный хаотический аттрактор – математический образ режима детерминированного хаоса. Траектория такого аттрактора непериодическая (она не замыкается) и режим функционирования неустойчив (малые отклонения от режима первоначально нарастают). Странные аттракторы – сложно устроенные множества, демонстрирующие все более тонкую структуру на разных уровнях ее разрешения (фракталы).

Основным критерием странности аттрактора является неустойчивость траектории. Причем неустойчивость обязана быть экспоненциальной! Это означает, что малое возмущение режима $D(0)$ должно во времени увеличиваться по экспоненте:

$$D(t) = D(0)\, exp(\lambda t), \qquad \lambda = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{D(t)}{D(0)},$$

λ - показатель Ляпунова.

Оказалось, что положительность величины λ говорит не только об экспоненциальной неустойчивости режима колебаний, но доказывает наличие в системе перемешивания. Если установлено, что исследуемый режим имеет положительный показатель Ляпунова $\lambda > 0$, то следствием будут: непериодичность в зависимости от времени любой из координат состояния, сплошной спектр мощности (в спектре колебаний присутствуют все частоты из некоторого интервала) и спадающая во времени автокорреляционная функция. До недавнего времени с таким поведением указанных характеристик однозначно связывали представления о случайном процессе. Теперь оказалось, что подобными свойствами может обладать процесс, порождаемый детерминированными законами. Это обстоятельство и послужило основанием называть такие процессы детерминированным хаосом.

История развития

1. Механика.

Результатами исследований И. Ньютона, Ж.Л. Лагранжа, П.С. Лапласа, У. Гамильтона стало формирование представления о том, что мы сейчас называем гамильтоновой или консервативной ДС.

Проблема трех тел в небесной механике – первая задача, анализируя которую исследователи столкнулись с возникновением сложной динамики и хаоса. В результате развития теории возмущений было обнаружено, что системы, относящиеся к классу гамильтоновых неинтегрируемых систем, могут демонстрировать хаос. Одним из первых примеров компьютерного исследования сложной динамики стала работа французских астрофизиков (M. Henon and C. Heiles, 1964), рассмотревших модель движения звезды через галактический диск.

Значительный прогресс в понимании соотношения между квазипериодической динамикой и хаосом связан с теорией, которую создали в 50–60-х годах советские математики А.Н. Колмогоров (1903–1987) и В.И. Арнольд и американский математик Ю. Мозер (теория КАМ). Основная теорема утверждает, что при включении достаточно слабого взаимодействия между движениями нелинейных систем с иррациональным соотношением частот квазипериодический характер динамики в большинстве случаев сохраняется.

2. Статистическая физика.

Вторая линия развития связана с формированием так называемой эргодической теории.

Основоположники статистической физики Джозайя Уиллард Гиббс (1839–1903) и Людвиг Больцман (1844–1906) рассматривали фазовое пространство гамильтоновых систем, образованных совокупностью большого числа микрочастиц (атомов или молекул). В силу закона сохранения энергии, предоставленная себе система должна оставаться все время на некоторой гиперповерхности в этом пространстве, задаваемой условием постоянства энергии. Больцман ввел эргодическую гипотезу — предположение о том, что имеется по существу только одна фазовая траектория, проходящая через все точки энергетической поверхности. В 1913 г. было доказано, что такое, в принципе, невозможно. Исправленная версия эргодической гипотезы принадлежит Паулю Эренфесту (1883–1933) и состоит в том, что фазовая траектория с течением времени должна проходить сколь угодно близко от любой точки на энергетической поверхности.

В обоснование эргодической теоремы внесли вклад Энрико Ферми (1901–1954), Джордж Биркгоф (1884–1944), Джон фон Нейман (1903–1957). Результатом явилось формирование отдельной математической дисциплины — эргодической теории или метрической теории динамических систем.

Количественная характеристика неустойчивости траекторий известна как ляпуновский характеристический показатель — величина, введенная русским математиком А. М. Ляпуновым (1857–1918; докторская диссертация «Общая задача об устойчивости движения», 1892). В 1968 г. советский математик В. И. Оселедец опубликовал важнейший результат — так называемую мультипликативную эргодическую теорему, которая позволяет говорить о ляпуновских показателях, определенных не для одной индивидуальной фазовой траектории, а для множества траекторий. Эта теорема лежит в основе современного понимания и применения в нелинейной динамике концепции ляпуновских показателей.

Были введены и другие характеристики, позволяющие различать простую и сложную динамику, — динамическая энтропия, известная как энтропия Колмогорова–Синая (Колмогоров, 1959) и топологическая энтропия (Adler et al., 1965)

3. Теория колебаний, радиофизика и электроника.

До сих пор мы вели речь о гамильтоновых системах. Однако на уровне окружающих нас макроскопических явлений чаще всего приходится встречаться с диссипативными динамическими системами. Необходимость изучения таких систем становилась насущной по мере развития таких дисциплин, как радиофизика и гидродинамика.

Итак, третья линия связана с радиотехникой, электроникой, теорией автоматического регулирования. Здесь стоит начать с работ голландского физика и инженера Б. Ван-дер-Поля (1889–1959). С его именем связан генератор или осциллятор Ван-дер-Поля — классическая модель нелинейной системы, демонстрирующей периодические автоколебания. Около 1927 г. Ван-дер-Поль и Ван-дер-Марк исследовали динамику такого генератора под периодическим внешним воздействием. Интересно, что режим работы устройства контролировался по звуку в наушниках. Исследователи отметили явление синхронизации при определенных рациональных соотношениях частоты воздействия и собственной частоты и шумоподобные колебания при переходах между областями захвата. Возможно, это первое документально зарегистрированное экспериментальное наблюдение хаоса.

В России в 20-е годы в Московском университете сформировалась сильная научная школа Л. И. Мандельштама (1879–1944). Интересы этой школы охватывали, в частности, радиофизику, оптику, колебательные процессы в системах различной природы. Мандельштам первым пришел к пониманию возможности такой дисциплины, как теория нелинейных колебаний, — до этого полагали, что нелинейные явления должны изучаться для каждой конкретной системы отдельно. В конце 20-х годов ученик Мандельштама А. А. Андронов (1901–1952) установил, что адекватным математическим образом периодических автоколебаний являются предельные циклы, введенные Пуанкаре в его качественной теории дифференциальных уравнений. Мандельштам сразу понял важность этого достижения и настоял на немедленной публикации результата. Андронов привлек также для анализа автоколебательных систем созданный А. М. Ляпуновым аппарат теории устойчивости. Одно из важных достижений — исследование момента возникновения автоколебаний при изменении параметров, ситуации, которую теперь называют бифуркацией Андронова–Хопфа. С 1931 г. Андронов работает в Нижнем Новгороде (Горьком), где вокруг него формируется крупная научная школа в области теории колебаний. В 1937 г. выходит классическая книга А. А. Андронова, А. А. Витта и С. Э. Хайкина «Теория колебаний». Один из соавторов книги — Витт оказался жертвой репрессий и погиб в лагерях, в издании книги 1937 г. его имя было исключено и восстановлено только в последующих изданиях.

В формировании, распространении и популяризации в нашей стране представлений о хаотической динамике большую роль сыграли такие представители нижегородской научной школы, как А.В. Гапонов-Грехов, Ю.И. Неймарк, М.И. Рабинович, Л.П. Шильников и др.

В 60-70-х годах в Институте радиотехнике и электронике АН СССР под руководством В.Я. Кислова проводились исследования, направленные на создание эффективных генераторов шума. Предложенная схема состояла из двух ламп бегущей волны (ЛБВ). Одна ЛБВ, более мощная, функционировала как усилитель, вторая использовалась как нелинейный элемент, обеспечивающий запаздывающую обратную связь путем подачи преобразованного сигнала с выхода усилителя на его вход. Исследователи целенаправленно получили хаотические автоколебания и правильно интерпретировали их как динамический режим в системе с запаздывающей обратной связью.

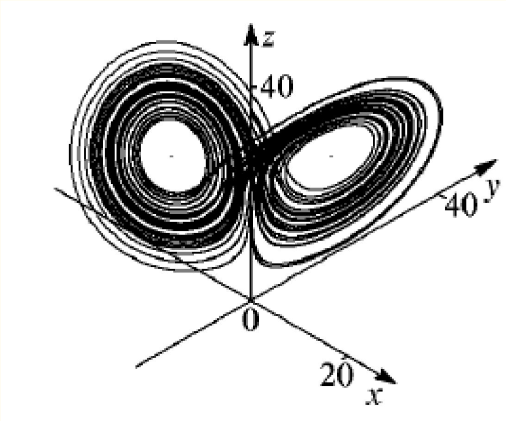
Один из самых первых (а может быть и первый) радиотехнических автогенераторов, допускающий описание простой системой дифф. уравнений, в котором был реализован режим хаотических автоколебаний, был предложен на нашей кафедре, в группе проф. В.С. Анищенко – модифицированный генератор с инерционной нелинейностью или генератор Анищенко-Астахова.

4. Гидродинамика.

Четвертая линия развития связана с гидродинамикой и проблемой турбулентности.

В 1883 г. была опубликована работа английского физика Осборна Рейнольдса (1842–1912) «Экспериментальное исследование обстоятельств, которые определяют, будет ли движение воды прямолинейным или волнистым, и о законе сопротивления в параллельных каналах». В зависимости от безразмерного параметра, известного теперь как число Рейнольдса [1], движение воды в трубке было ламинарным или турбулентным. Хотя основные уравнения, описывающие динамику вязкой жидкости — уравнения Навье–Стокса, уже были известны, причины возникновения турбулентности оставались загадкой. С тех пор вопрос о природе турбулентности стоял перед наукой, приобретая со временем все большую остроту.

В 1963 г. американский метеоролог Э. Лоренц опубликовал статью «Детерминированное непериодическое течение», в которой обсуждались результаты численного интегрирования с помощью компьютера системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений, моделирующей динамику жидкости при конвекции в подогреваемом снизу слое. Будучи хорошо образованным математически, Лоренц подверг полученные результаты тщательному и глубокому обсуждению, акцентировав внимание на взаимосвязи между наблюдаемой сложной динамикой и присущей системе неустойчивостью фазовых траекторий. Позднее это свойство хаотической динамики пропагандировалось им под названием «эффект бабочки» (butterfly effect): в приложении к метеорологии взмах крыльев бабочки может через достаточное время повлечь существенное изменение погоды где-то совсем в другом месте. Примерно в то же самое время А. Н. Ораевский с соавторами также получили непериодические решения для аналогичных уравнений в теории одномодового лазера. Как работа Лоренца, опубликованная в метеорологическом журнале, так и работа Ораевского не были своевременно замечены и оценены.



$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad \dot{y} = rx - y - xz, \quad \dot{z} = -bz + xy$$

В 1971 г., основываясь на достигнутом к этому времени продвижении в математических исследованиях, Д. Рюэль и Ф. Такенс выступили с работой «О природе турбулентности». Подвергнув критике теорию Ландау, они аргументировали, что уже после включения в игру относительно небольшого числа частот (трех или четырех в зависимости от некоторых математических деталей) динамика может стать турбулентной и, в частности, демонстрировать характерный для случайного процесса сплошной спектр. Это связывалось с появлением в фазовом пространстве «странного аттрактора» — ключевой термин, введение которого определило историческое значение работы Рюэля и Такенса. Подчеркивалось наличие неустойчивости фазовых траекторий на странном аттракторе и его нетривиальная геометрическая структура — он представлял собой то, что стали называть фрактальным множеством или просто фракталом.

5. Дискретные отображения.

Попытки математического описания биологических проблем динамики популяций восходят к Томасу Мальтусу (1766–1834), автору нашумевшей концепции о том, что численность людей возрастает в геометрической прогрессии, а средства поддержания жизни лишь в арифметической. Поэтому численность населения должна регулироваться войнами, эпидемиями и пр. Марксисты, как известно, заклеймили эту теорию как человеконенавистническую. Не входя в полемику, заметим, что в отсутствие факторов, сдерживающих рост населения, изменение численности популяции из года в год «по Мальтусу» можно описать как $x_{n+1} = Rx_n$, где R — параметр, определяющий условия жизни популяции. Ввести сдерживающий фактор можно, если добавить в уравнение нелинейный, например, квадратичный член: $x_{n+1} = R(x_n - x_n^2)$. Полученное соотношение называют логистическим отображением и оно действительно неплохо описывает, по крайней мере, с качественной стороны, динамику некоторых биологических популяций.

В 1975 г. американские математики Ли и Йорке опубликовали работу «Период три означает хаос». Речь шла о том, что если при частном значении параметра логистическое или другое одномерное отображение вида $x_{n+1} = f(x_n)$ имеет цикл периода три, то оно имеет бесконечное множество циклов всех прочих периодов. Эта работа привлекла большое внимание, и стоит отметить, что именно в ней в контексте нелинейной динамики впервые появился термин «хаос», ставший впоследствии общепринятым обозначением всей области деятельности, о которой мы ведем речь. Только через несколько лет на Западе стало широко известно, что еще в 1964 г. советский математик А. Н. Шарковский опубликовал гораздо более содержательную теорему, устанавливающую самые общие закономерности сосуществования циклов различного периода в одномерных непрерывных отображениях.

К середине 70-х годов было уже хорошо известно, что при увеличении параметра в логистическом отображении имеет место последовательность бифуркаций удвоения периода. Соответствующие компьютерные результаты очень наглядно были представлены, например, в работе Роберта Мэя (May, 1976). В это время, занимаясь исследованием удвоений периода с помощью карманного калькулятора, американский физик Митчел Фейгенбаум, работавший в Лос-Аламосской национальной лаборатории, обнаружил, что точки бифуркаций удвоения периода накапливались к определенному пределу — порогу возникновения хаоса по закону геометрической прогрессии с показателем 4,669... Этот показатель оказался универсальным, т. е. возникал и в других отображениях, и, как затем выяснилось, в нелинейных диссипативных системах самого разного вида.

6. Математика.

Неоценимую роль для науки о динамическом хаосе сыграли исследования ряда математиков и разработанные ими теории.

Это, в первую очередь, теория множеств и теория размерности. Разработанные великим немецким математиком Георгом Кантором (1845–1918) представления о бесконечных множествах, их сравнении посредством установления взаимно-однозначного соответствия, определение счетного множества и континуума, знаменитый пример множества Кантора служат рабочими инструментами исследователей в области нелинейной динамики. Эти концепции будут неоднократно встречаться в нашем курсе. Другие примеры «математических монстров» (снежинка Коха, ковер Серпиньского и др.), придуманных математиками для объяснения тонких моментов теории множеств, используются для иллюстрации свойств объектов, с которыми приходится иметь дело при изучении сложной динамики (странные аттракторы). Нетривиальное обобщение понятия размерности, применимое к таким множеством, было разработано немецким математиком Феликсом Хаусдорфом (1868–1942) и также стало рабочим инструментом в нелинейной динамике.

Множества с нецелой размерностью Хаусдорфа называют фракталами. Этот термин был введен сравнительно недавно Бенуа Мандельбротом. Именно он обратил внимание на то, что странные объекты, «математические монстры», могут во многих ситуациях служить вполне реалистичными моделями различных образований в природе. Такого рода примеров известно теперь очень много (облака, горные массивы, кластеры из частиц во взвесях, магнитные домены, вихри в турбулентной жидкости и так далее). Будучи далекой от принятых в математике стандартов стиля и строгости изложения, книга Мандельброта представляла собой скорее произведение научно-популярного жанра. Тем не менее, она вызвала массовый интерес научного сообщества и стимулировала бурное развитие новой дисциплины — фрактальной геометрии, соприкасающейся по многим пунктам с нелинейной динамикой.

7. Прикладной хаос.

Вопрос: для чего нужен хаос?

Прежде всего, нельзя недооценивать колоссального мировоззренческого значения этой концепции. Окружающий нас мир полон нелинейных явлений и процессов, правильное представление о которых немыслимо без понимания возможности хаоса, а также связанных с этим принципиальных ограничений на предсказуемость поведения сложных систем. Например, становится вполне очевидной несостоятельность учения об однозначной определенности исторического процесса.

Сказанное не мешает обсуждать возможность использования хаоса в системах различной природы для каких-либо конкретных практических целей или же учета тех последствий, к которым может привести возникновение сложной динамики.

Приведем простой пример — задачу о динамике судна или нефтяной платформы при наличии волнения (Thompson, Stewart, 1986). В известном приближении, это нелинейная динамическая система с внешним периодическим воздействием. Нормальное, рабочее расположение судна отвечает одному аттрактору системы, перевернутое — другому. Можно задаться вопросом, как расположен и как устроен бассейн притяжения второго аттрактора. Как он зависит от интенсивности волнения? Ясно, что попадание в бассейн притяжения второго аттрактора ведет к катастрофе! Подчеркнем, что только нелинейный анализ обеспечивает всестороннее понимание ситуации, выработку условий и рекомендаций по избежанию катастрофы.

Благодаря динамической природе хаотических режимов и их чувствительности по отношению к малым возмущениям они допускают эффективное управление посредством внешнего контролируемого воздействия. Целью такого воздействия может быть реализация в системе периодического режима вместо хаоса или попадание в заданную область фазового пространства. Эта идея, выдвинутая первоначально группой американских исследователей из университета штата Мериленд (Ott, Grebogi, Yorke, 1990), представляется очень перспективной и плодотворной в прикладном плане. К настоящему времени по этому предмету имеется обширная литература, проведено множество международных научных конференций.

Успешные примеры управления хаосом реализованы в механических системах, электронных устройствах, лазерах. В качестве примера можно привести работу (Bollt, Meiss, 1995), где рассматривается применение методики управления хаосом для того, чтобы направить космический аппарат на Луну. Оказывается, что с помощью малых контролируемых воздействий задачу удается решить с очень существенной экономией топлива, правда, ценой увеличения продолжительности полета.

Другое направление применения идей и методов нелинейной динамики связано с проблемой обработки сигналов. Представим себе, что исследуется удаленный и недоступный объект, так что наши возможности ограничиваются анализом поступающего от него сигнала. За последние годы были предложены методики, позволяющие выяснить, произведен ли сигнал динамической системой, а также получить информацию о свойствах и характеристиках этой системы. Таким образом, аппарат нелинейной динамики превращается в инструмент исследования, позволяющий сделать заключение или предположение о структуре объекта, сконструировать его динамическую модель и т. д. Разработку методов и алгоритмов анализа сигналов можно считать важным направлением нелинейной динамики, непосредственно связанным с возможными приложениями.

Очень высоко оцениваются перспективы использования анализа и обработки сигналов, конструирования моделей, а также методик управления хаосом применительно к проблемам медицины и биологии.

Одно из возможных приложений хаоса состоит в использовании генерируемых динамическими системами хаотических сигналов в целях коммуникации. Благодаря хаотической природе сигналов открываются новые возможности кодирования информации, которая становится труднодоступной для перехвата. Предложен целый ряд схем, обеспечивающих связь на хаотических сигналах, проведены демонстрационные эксперименты (см. обзор Hasler, 1998).

Результаты, полученные в нелинейной динамике, открывают новые нетривиальные возможности для сжатия и хранения, а также обработки информации. Интересным примером такого рода может служить предложенная в Институте радиотехники и электроники РАН схема кодирования и обработки информации с использованием одномерных отображений (Andreev, Dmitriev et al., 1992). Эффективные методы сжатия информации разработаны на основании идей фрактальной геометрии (см. обзор Дьюдни, 1990). Прорабатывается вопрос о реализации вычислительных процессов в системах, отличных от традиционной компьютерной архитектуры и опирающихся на феномены нелинейной динамики (Sinha, Ditto, 1998).