

Тема 3. Анализ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНА

1. Эффективные и неэффективные ограничения в оптимальном плане.
2. Двойственные оценки и их анализ.
3. Анализ устойчивости оптимального плана.
4. Техника отладки оптимизационных моделей.

1. Эффективные и неэффективные ограничения ♦

$$\max 800 \cdot x_1 + 950 \cdot x_2 + 4200 \cdot x_3 \text{ (руб./сут.)}$$

$$1,01 \cdot x_1 + 1,01 \cdot x_2 + 9,45 \cdot x_3 \leq 140 \text{ (ц/сут.)}$$

$$(1/5) \cdot x_1 + (1/6) \cdot x_2 \leq 21 \text{ (ч/сут.)}$$

$$(1/0,3) \cdot x_3 \leq 16 \text{ (ч/сут.)}$$

$$x_1 \geq 90 \text{ (ц/сут.)}$$

$$x_2 \geq 10 \text{ (ц/сут.)}$$

$$x_3 \geq 0 \text{ (ц/сут.)}$$

$$x_1 = 90$$

$$x_2 = 18$$

$$x_3 = 3,272$$

Ограничение	Сумма	Отклонение	Оценка
5	18	8	0 (неэфф.)

1. Эффективные и неэффективные ограничения: ЭКОНОМИЧЕСКИЕ РЕЗЕРВЫ ♦

- Разница между свободным членом и суммой ограничения отражает **величину экономических резервов соответствующего ресурса**

Пример: ограничение 3

$$(1/0,3) \cdot x_3 \leq 16 \text{ (ч/сут.)}$$

$$\underbrace{-10,907}_{\text{свободный член}} + \underbrace{16}_{\text{сумма коэффициентов}} = 5,093 \text{ (ч/сут.)} \text{ — неиспользуемая мощность (резерв)}$$

В рамках описываемых моделью технологических возможностей использовать эти мощности экономически эффективным способом невозможно

1. Эффективные и неэффективные ограничения:

ЭКОНОМИЧЕСКИЕ РЕЗЕРВЫ

- Разница между свободным членом и суммой ограничения отражает **величину экономических резервов соответствующего ресурса**
- Резерв не может быть использован в оптимальном плане, но указывает на возможность изменений в объекте моделирования (например, резерв ресурса можно продать или сдать в аренду)
- Предполагаемые изменения в объекте моделирования можно отразить в модели, соответствующим образом изменив её.

1. Эффективные и неэффективные ограничения: оценка адекватности модели

- Действительно ли избыточные ресурсы не могут быть использованы эффективно и с пользой?
- Существует ли объяснение тому, что на самом деле избыточны другие ресурсы? Не следует ли отразить это объяснение в модели?
- Почему модель показывает такие большие резервы?
- С наличием резервов связаны инвестиционные возможности. Заметил ли их кто-нибудь, кроме разработчика модели? Если нет, почему?

2. Двойственные оценки ♦

$$\begin{cases} \max_{\mathbf{x}} \mathbf{c}\mathbf{x} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \text{ где:} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= (c_1, c_2, \dots, c_n) \\ \mathbf{x} &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} a_{11} & \boxtimes & a_{1n} \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ a_{m1} & \boxtimes & a_{mn} \end{pmatrix} \\ \mathbf{b} &= (b_1, b_2, \dots, b_m) \\ \mathbf{0} &= (0, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

Рассмотрим задачу с точки зрения возможного изменения её параметров — \mathbf{A} , \mathbf{c} и \mathbf{b}

Вектора \mathbf{x}
здесь нет

$$\begin{aligned} Z &= z(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \\ &= \max_{\mathbf{x}} (\mathbf{c}\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial z(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}{\partial b_1}, \frac{\partial z(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}{\partial b_2}, \\ &\dots, \frac{\partial z(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}{\partial b_m} \end{aligned}$$

2. Двойственные оценки

Величина $\frac{\partial z(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}{\partial b_i}$ равна значению p_i – переменной двойственной ЗЛП, соответствующей ограничению i .

Для эффективного ограничения отлична от нуля

Для неэффективного ограничения равна нулю

Величина $\frac{\partial z(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}{\partial b_i}$ называется *двойственной оценкой* ограничения или *объективно обусловленной оценкой* ресурса, представленного ограничением i .

2. Двойственные оценки

- Двойственная оценка (д.о.) ограничения i показывает, на сколько изменится целевая функция при единичном изменении объёма ограничения, т.е. величины b_i .
- Изменение целевой функции будет соответствовать д.о. по крайней мере при достаточно малом изменении величины b_i (изменение на единицу может оказаться слишком большим).
- Изменение целевой функции может соответствовать д.о. при изменении b_i только в одну сторону.
- Единица измерения двойственной оценки –

$$\frac{[\text{единица измерения целевой функции}]}{[\text{единица измерения ограничения } i]}$$

2. Двойственные оценки

Примеры:

- при увеличении объёма переработки молока в смену со 140 до 141 *ц/сут.* целевая функция увеличится на $p_1=444,4$ руб. и составит $102842,2+444,4=103286,7$ руб.
- при увеличении времени использования оборудования для фасовки молока и кефира с 21 до 22 *ч/сут.* целевая функция увеличится на $p_2=3006,7$ руб. и составит $102842,2+3006,7=105898,9$ руб.
- увеличение времени использования оборудования для фасовки сметаны не повлияет на целевую функцию ($p_3=0$): в самом деле, и без того из 16 возможных часов его работы используются только 9 ч. 54 мин.

2. Двойственные оценки

Примеры:

- включение в модель новой переменной «сметана диетическая» в предположении, что на производство 1 *ц* сметаны обезжиренной требуется 6 *ц* молока, производительность при фасовке **такая же**, что и для обычной сметаны, а цена реализации составляет 3200 руб./*ц*, приведёт к изменению целевой функции (в расчёте на 1 *ц*):
 - ◆ $-6 \text{ ц мол./ц см.} \cdot 444,4 \text{ руб./ц мол.} = -2666,4 \text{ руб./ц см.}$ – за счёт изменения плана использования молочного сырья;
 - ◆ $-(1/0,3 \text{ ц см./ч}) \cdot 0 \text{ руб./ч} = 0 \text{ руб./ц см.}$ – за счёт изменения плана использования оборудования для фасовки сметаны;
 - ◆ $+3200 \text{ руб./ц см.}$ – за счёт выручки от реализации;
 - ◆ **Итого +533,6 руб./ц сметаны.**
- Итак, освоение производства диетической сметаны – выгодное предприятие.

2. Двойственные оценки

и адекватность модели

Величина объективно обусловленной оценки (о.о.о.) каждого ресурса должна быть объяснима с точки зрения *реального* вклада дополнительной единицы этого ресурса в выбранный критерий оптимальности.

- ◆ Если в действительности эффект больше или меньше, чем в модели (т.е. чем величина о.о.о.), составитель модели должен иметь объяснение, почему это происходит.
- ◆ Если целевая функция модели отражает прибыль, составитель модели должен объяснить, почему возможны отклонения о.о.о. от рыночных цен ресурсов и каков экономический смысл этих отклонений (особенно если отклонения велики).

3. Анализ устойчивости оптимального плана

- Цель анализа – определить возможные изменения модели, при которых не меняется набор *ненулевых (базисных)* переменных и *эффективных* ограничений.
Значение целевой функции, а в ряде случаев – базисных переменных или ненулевых двойственных оценок при таких изменениях может меняться.
- Смысл анализа – выявить границы изменений в моделируемом объекте, которые не повлекут за собой сложных организационно-экономических мероприятий по освоению новых видов деятельности (не ограничиваясь изменением размеров имеющихся) и изысканию новых каналов снабжения ресурсами.

3. Последняя симплексная таблица ♦

	Мо- локо	Ке- фир	Сме- тана	Откл. бал. мол.	Откл. фас. мол.	Откл. фас. смет.	Откл. мин. мол.	Откл. мин. кеф.	Иск. мин. мол.	Иск. мин. кеф.	Своб. чл. / u_i / знач. пер.
Баланс молока v_{1j}					6		1,2	1	-1,2	-1	8
Время фасовки молока+кефира				0,3	2,1				-0,0		5,093
Время фасовки сметаны v_{3j}			1	0,11	4		2		0,02		3,272
Минимум пастер. молока	1						-1		1		90
Минимум кефира v_{5j}		1			6		1,2		-1,2		18
Целевая функция / w_j / оценки				-444	-3 007		-250		$-\infty$	$-\infty$	-102 842

Строка i (2) Столбец j (3)

Д.о. P_i

3. Оптимальный план остаётся неизменным, если:

- коэффициент целевой функции при небазисной переменной меняется в пределах от $-\infty$ до $-w_j$;
- коэффициент целевой функции при базисной переменной меняется в пределах

$$\max_{v_{ij} > 0} \left\{ \frac{w_j}{v_{ij}}; -\infty \right\} \leq \Delta c_i \leq \min_{v_{ij} < 0} \left\{ \frac{w_j}{v_{ij}}; +\infty \right\}$$

Базисная переменная,
соответствующая i -й строке
последней симплексной таблицы

Остальные обозначения
- на предыдущем слайде

3. Анализ устойчивости

оптимального плана: базисный коэффициент ЦФ

	Мо- локо	Ке- фир	<i>Сме- тана</i>	Откл. бал. мол.	Откл. фас. мол.	Откл. фас. смет.	Откл. мин. мол.	Откл. мин. кеф.	Иск. мин. мол.	Иск. мин. кеф.	Своб. чл./зна ч. пер.
Баланс молока					6		1,2	1	-1,2	-1	8
Время фасовки молока+кефира				-0,3 5	2,14	1	0,07		-0,0 7		5,093
<i>Время фасовки сметаны</i>				0,11	-0,6 4		-0,0 2		0,02		3,272
Минимум пастер. молока				max -4 200	min 4 688,6		min 12 500		max -∞		90
Минимум кефира		1			6		1,2		-1,2		18
Целевая функ- ция / оценки				-444	-3 007		-250		-∞	-∞	-102 842

3. Оценки оптимального плана остаются неизменными, если:

- свободный член *эффективного* ограничения типа «меньше либо равно», меняется в пределах

$$\max_{v_{ij} < 0} \left\{ \frac{u_i}{v_{ij}}; -\infty \right\} \leq -\Delta b_j \leq \min_{v_{ij} > 0} \left\{ \frac{u_i}{v_{ij}}; +\infty \right\}$$

Для типа
«больше либо
равно» минус
заменить на
плюс

Эффективное ограничение,
отклонение по которому
соответствует j -му столбцу
последней симплексной

Остальные
обозначения – слайд 15

3. Анализ устойчивости

оптимального плана: свободный член ограничения

	Мо- локо	Ке- фир	Сме- тана	Откл. бал. мол.	Откл. фас. мол.	Откл. фас. смет.	<i>Откл мин. мол.</i>	Откл. мин. кеф.	Иск. мин. мол.	Иск. мин. кеф.	Своб. чл./зна ч. пер.	
Баланс молока	4-е ограничение											
Время фасовки молока+кефира				-0,3 5	2,14	1	0,07		0 7		5,093	
Время фасовки сметаны			1	0,11	-0,6 4		-0,0 2		2		3,272	
<i>Минимум пастер. молока</i>	1						-1		1		90	
Минимум кефира		1			6		1,2		2		18	
Целевая функ- ция / оценки				-444	-3 007		-250		-∞	-∞	-102 842	

3. Анализ устойчивости

оптимального плана может также проводиться по отношению к:

- Пределу введения в базис небазисной переменной при неизменных оценках и соответствующему изменению значений базисных переменных
- Границам изменения технико-экономического коэффициента при небазисной переменной, не влияющего на значения переменных и двойственных оценок
- Введению в оптимальный план новых переменных и ограничений (для этой цели достаточно исходной симплексной таблицы)

(см. рекомендуемую литературу)

4. Техника отладки моделей: ♦

поиск причины неограниченности целевой функции

■ Причины:

- ◆ Некоторые коэффициенты пропущены либо приписаны не той переменной, которой они должны соответствовать
- ◆ Ошибочные знаки некоторых ограничений
- ◆ Неправильно задана целевая функция (в т.ч. min вместо max и наоборот)

■ Поиск:

- ◆ Иногда переменная, в коэффициентах при которой имеется ошибка, выдаёт себя чрезмерно большим значением
- ◆ В противном случае:
 1. Ограничиваем все переменные модели сверху значением, заведомо превышающим их ожидаемые значения в оптимальном плане ♦
 2. Проверяем, существует ли ограничение, лимитирующее данную переменную ♦
 3. Если нет – исправляем ошибку; в противном случае снимаем с этой переменной отладочное ограничение и переходим к п. 1.

В предположении, что переменные неотрицательны

- Все ли коэффициенты при этой переменной на месте?!
- Достаточно ли имеющихся ограничений?

4. Техника отладки моделей:

причины несовместности системы ограничений

- Отрицательный результат эксперимента на модели (ошибкой не является)
- Ошибка при расчёте значений коэффициентов или свободных членов модели
- Некоторые коэффициенты пропущены либо приписаны не той переменной, которой они должны соответствовать
- Ошибочные знаки некоторых ограничений

4. Техника отладки моделей: ♦

поиск причин несовместности системы ограничений

- Если *эффективных* ограничений мало – проверяем каждое из них на наличие вышеуказанных *причин*
- В противном случае:
 1. Проверяем на отсутствие типовых ошибок для модели данного вида
 2. Обращаем внимание на группы связанных переменных, не вошедшие в базис
 3. Освобождаем на *ограничениях* *связывающих* переменных. Для многих моделей существуют типовых ограничений, связывающих эти переменные
 - ♦ Если нет – повторяем п.3.

4. Техника отладки моделей

- Несовместность никогда не может быть вызвана:
 - ◆ ошибкой в целевой функции;
 - ◆ ошибкой в неэффективном ограничении
- Неограниченность никогда не может быть вызвана ошибкой в величине свободных членов

4. Техника отладки моделей:

неадекватное оптимальное решение

- Причины те же, что и при несовместности/неограниченности
- Поиск ошибок: сравнение *оптимального решения* (значения переменных, объёмы использования ресурсов и их эффективность) с *фактическим состоянием* моделируемой системы и объяснение причин наблюдаемых различий
 - ◆ В моделируемой системе должны существовать реальные возможности освоить оптимальный план
 - ◆ Сопоставление модели с реальностью может указать на ограничения, в реальности препятствующие освоению оптимального плана, но не отражённые в модели.

Литература

■ Основная

- ◆ Математическое моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве / *Гатаулин А.М., Гаврилов Г.В. и др.* М.: Агропромиздат, 1990. — глава 5.
- ◆ Презентация: <http://svetlov.timacad.ru> Презентация: <http://svetlov.timacad.ru/umk1> Презентация: <http://svetlov.timacad.ru/umk1/lek3.ppt>

■ Дополнительная

- ◆ Практикум по математическому моделированию экономических процессов в сельском хозяйстве / *А.Ф. Карпенко, В.А. Кардаш, Н.С. Низова и др.*: 2-е изд. М.: Агропромиздат, 1985.
- ◆ *Вентцель Е.С.* Исследование операций: Задачи, принципы, методология. М.: Высшая школа, 2001.
- ◆ *Воркуев Б.Л.* Анализ решений экономико-математических моделей. М.: Изд-во МГУ, 1987.