

# Математические методы исследования операций

---

---

---

глава 2.

## Линейное программирование

(часть **1**)

Курс для студентов  
экономико-математических  
специальностей

# Линейное программирование 1

- ❖ **Определение задачи ЛП**
- ❖ **КЗЛП и построение канонической формы**
- ❖ **Первая геометрическая интерпретация и графический метод решения**
- ❖ **Основные теоремы ЛП**
- ❖ **Вторая геометрическая интерпретация и базисные планы**
- ❖ **Теоремы о базисных планах**

## Линейное программирование 2

- ❖ Симплекс-метод, алгоритм
- ❖ Симплекс-метод, обоснование
- ❖ Метод минимизации невязок
- ❖ Проблема вырожденности
- ❖ Альтернативные оптимальные планы
- ❖ Модифицированный симплекс-метод

# Общая задача линейного программирования

## Общая задача линейного программирования (ОЗЛП)

$$f(\mathbf{x}) = c_1 x_1 + c_2 x_2 \quad \boxtimes \quad + c_l x_l + c_{l+1} x_{l+1} \quad \boxtimes \quad + c_n x_n \rightarrow \max$$

$$a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 \quad \boxtimes \quad + a_{1,l} x_l + a_{1,l+1} x_{l+1} \quad \boxtimes \quad + a_{1,n} x_n \leq b_1,$$

$$a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 \quad \boxtimes \quad + a_{2,l} x_l + a_{2,l+1} x_{l+1} \quad \boxtimes \quad + a_{2,n} x_n \leq b_2,$$

$$\boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes$$

$$a_{r,1} x_1 + a_{r,2} x_2 \quad \boxtimes \quad + a_{r,l} x_l + a_{r,l+1} x_{l+1} \quad \boxtimes \quad + a_{r,n} x_n \leq b_r,$$

$$a_{r+1,1} x_1 + a_{r+1,2} x_2 \quad \boxtimes \quad + a_{r+1,l} x_l + a_{r+1,l+1} x_{l+1} \quad \boxtimes \quad + a_{r+1,n} x_n = b_{r+1},$$

$$\boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes$$

$$a_{m,1} x_1 + a_{m,2} x_2 \quad \boxtimes \quad + a_{m,l} x_l + a_{m,l+1} x_{l+1} \quad \boxtimes \quad + a_{m,n} x_n = b_m,$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad \boxtimes \quad x_l \geq 0.$$



## Каноническая задача линейного программирования 2

### Каноническая задача линейного программирования (ОЗЛП)

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}\mathbf{x} \rightarrow \max, D = \{\mathbf{x} \in R^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}.$$



## Построение канонической формы 1

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}\mathbf{x} \rightarrow \max, D = \{\mathbf{x} \in R^n \mid \begin{array}{ll} a_i x_i \leq b_i, & i \in I_n; \\ a_i x_i = b_i, & i \in I_e; \\ x_j \geq 0, & j \in J \end{array}\}$$



## Построение канонической формы 2

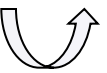
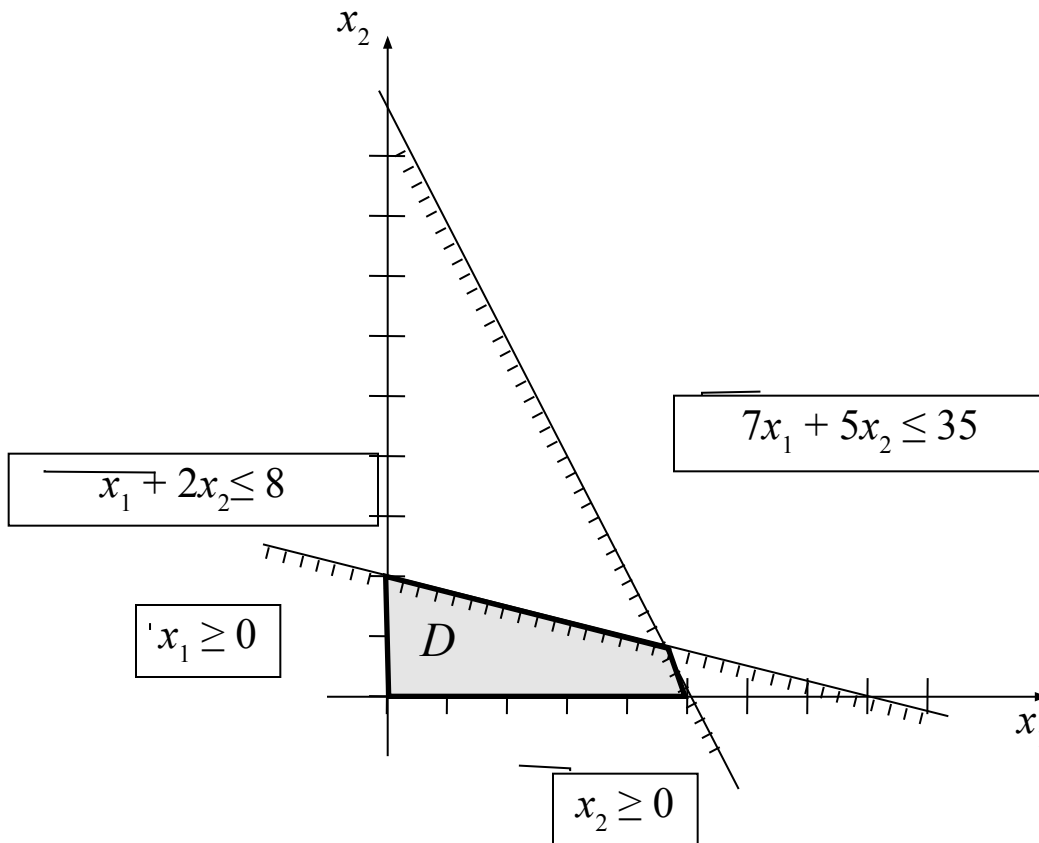
- ограничения, имеющие форму неравенств ( $i \in I_n$ ), преобразуются в уравнения за счет добавления фиктивных неотрицательных переменных  $y_{n+i}$  ( $i \in I_n$ ), которые одновременно входят в целевую функцию с коэффициентом 0, т.е. не оказывают влияния на ее значение;
- переменные ОЗЛП, на которые *наложено условие неотрицательности* ( $j \in J$ ), формально (без каких-либо изменений) трансформируются в соответствующие переменные канонической формы:  $y_j = x_j$ ;
- переменные, на которые не наложено условие неотрицательности ( $j \notin J$ ), представляются в виде разности двух новых неотрицательных переменных  $y_j^+$  и  $y_j^-$ , где, таких что:

$$x_j = y_j^+ - y_j^-.$$



# Первая геометрическая интерпретация ЗЛП

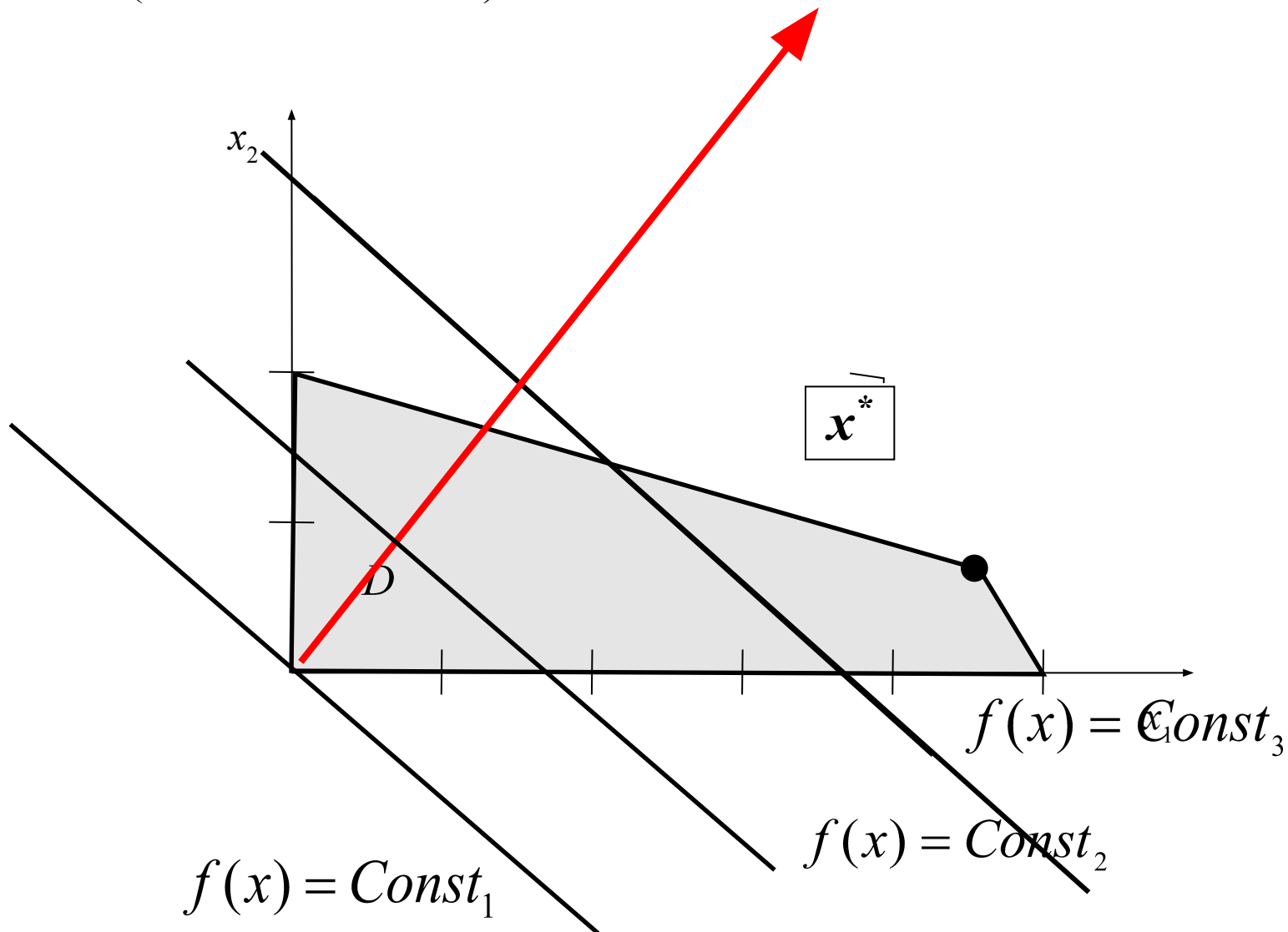
## Рассмотрим задачу-базовый пример





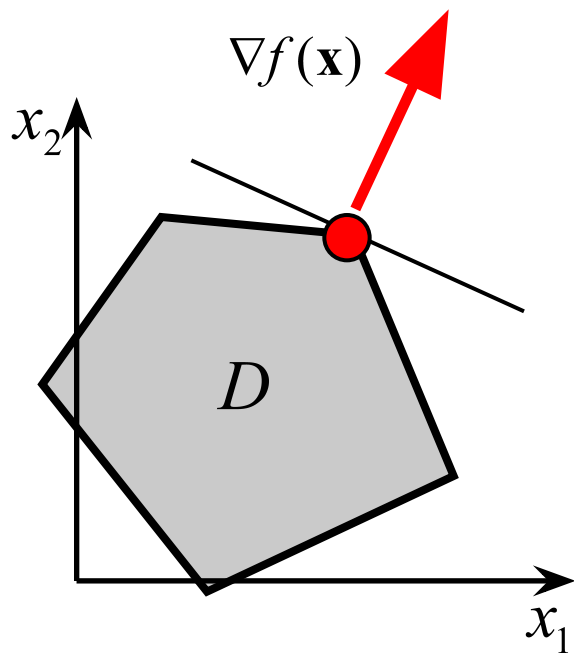
# Графический метод решения ЗЛП 1

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right) = (c_1, c_2, \dots, c_n) = \mathbf{c}$$



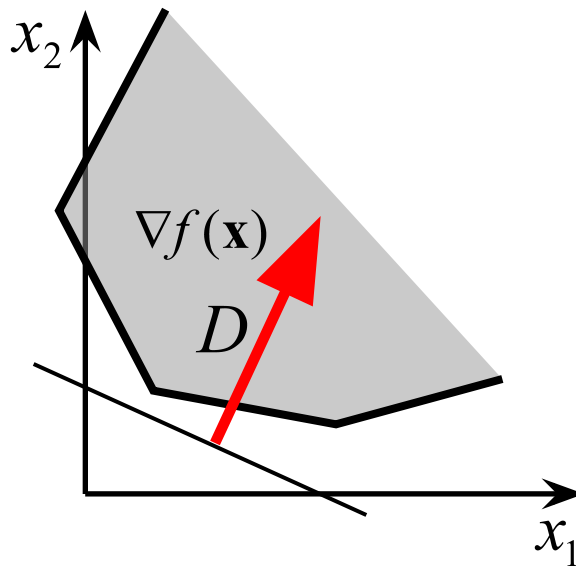
# Принципиальные ситуации, возможные при решении задачи линейного программирования

Решение достигается в угловой точке



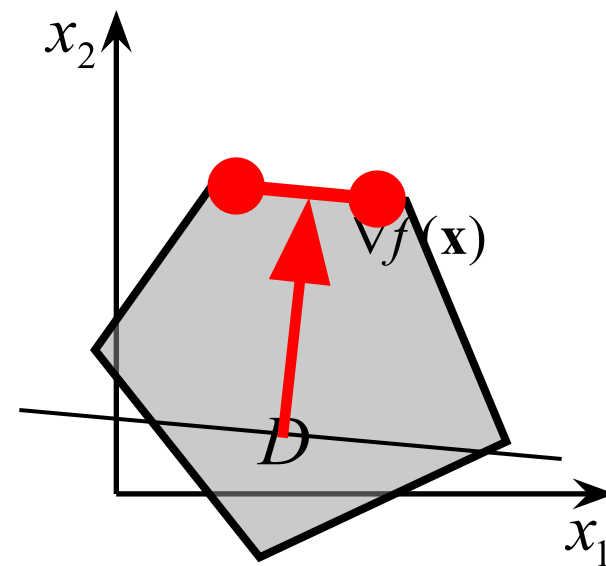
(a)

Целевая функция не ограничена



(b)

Бесконечное множество решений



(c)

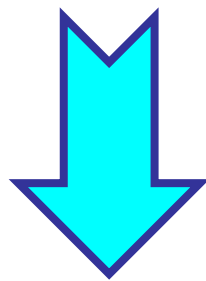


## Графический метод решения ЗЛП 2

Рассмотрим задачу

$$f(\mathbf{x}) \rightarrow \max, D = \{\mathbf{x} \in R^n \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b}; x_j \geq 0, j \in J\},$$

$$n - m \leq 2 \quad \Rightarrow \quad x_{j_1}, x_{j_2} \quad \boxtimes \quad x_j = \varphi_j(x_{j_1}, x_{j_2})$$



$$\mathbf{cx} = \sum_{j=1}^n \varphi_j(x_{j_1}, x_{j_2}) \rightarrow \max,$$

$$D = \{(x_{j_1}, x_{j_2}) \in R^2 \mid \varphi_j(x_{j_1}, x_{j_2}) \geq 0, j \in J\}$$



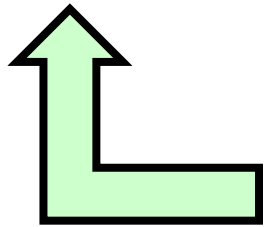
# Основные теоремы ЛП 1



## Теорема

Если целевая функция  $f$  принимает максимальное значение в некоторой точке множества допустимых планов  $D$ , то она принимает это значение и в некоторой угловой точке данного множества.

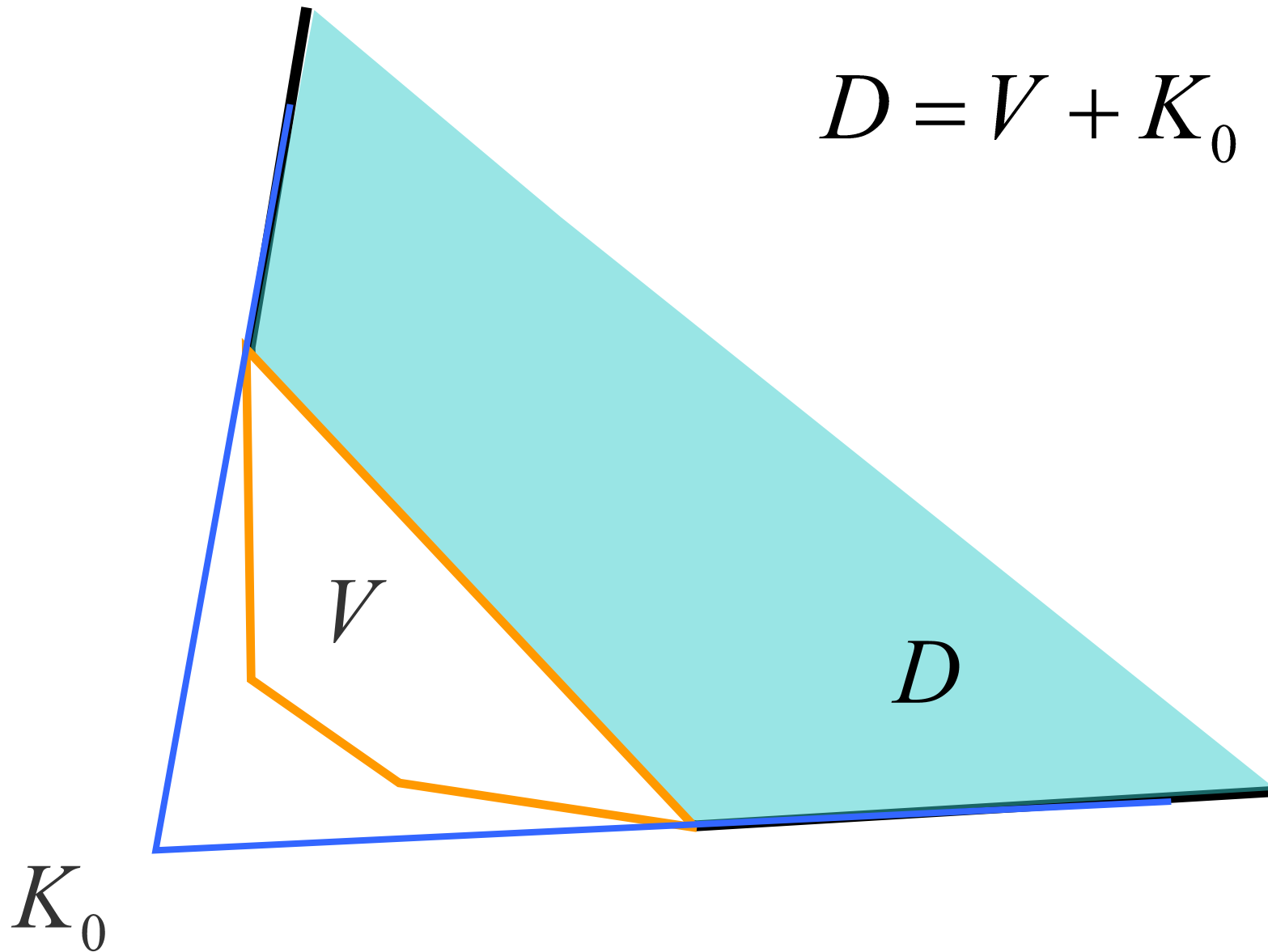
## □ Доказательство



*Теорема о представлении многогранного выпуклого множества*

если  $D$  — многогранное выпуклое множество, то существуют такие выпуклый многогранник  $V$  и многогранный выпуклый конус  $K_0$  с вершиной в нуле, что  $D = V + K_0$ .





## Основные теоремы ЛП    3

$$\mathbf{x}^* = \arg \max_{\mathbf{x} \in D} \{f(\mathbf{x})\} : \quad \forall \mathbf{x} \in D : \mathbf{c}\mathbf{x}^* \geq \mathbf{c}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{x}^* = \sum_{k=1}^s \lambda_k \mathbf{x}^k + \sum_{l=1}^p \mu_l \mathbf{x}^l$$

$$\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^s, \mathbf{x}^k$$

- угловые точки

$$\sum_{k=1}^s \lambda_k = 1 \quad \lambda_k \geq 0, \quad k \in 1..s;$$

## Основные теоремы ЛП    4

$\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^l, \mathbf{x}^p$  - направляющие вектора конуса

(!) рассуждения «от противного»

$$\exists \mu_l > 0: \quad \forall \mu \in [0, +\infty[$$

$$\mu_l \geq 0, l \in 1..p$$

$$f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{c}\mathbf{x}^* = \sum_{k=1}^s \lambda_k (\mathbf{c}\mathbf{x}^k) + \sum_{l \neq l_0} \mu_l (\mathbf{c}\mathbf{x}^l) + \mu_{l_0} (\mathbf{c}\mathbf{x}^{l_0})$$

## Основные теоремы ЛП    5

По свойствам многогранного выпуклого конуса:

$$\forall \mu \in [0, +\infty[$$

$$\mathbf{x}(\mu) = \sum_{k=1}^s \lambda_k \mathbf{x}^k + \sum_{l \neq l_0} \mu_l \mathbf{x}^l + \mu \mathbf{x}^{l_0} \in D$$

В зависимости от знака  $\mathbf{c}\mathbf{x}^{l_0}$

(1)  $\mathbf{c}\mathbf{x}^{l_0} > 0 \quad \forall \mu > \mu_{l_0} :$

$$f(\mathbf{x}(\mu)) = \sum_{k=1}^s \lambda_k (\mathbf{c}\mathbf{x}^k) + \sum_{l \neq l_0} \mu_l (\mathbf{c}\mathbf{x}^l) + \mu (\mathbf{c}\mathbf{x}^{l_0}) > f(\mathbf{x}^*)$$



## Основные теоремы ЛП    5

$$(2) \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x}^{l_0} < 0 \quad \forall \mu \in [0, \mu_{l_0}[: f(\mathbf{x}(\mu)) > f(\mathbf{x}^*)$$

$$(3) \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x}^{l_0} = 0 \quad \forall \mu \geq 0$$

## Вторая геометрическая интерпретация ЗЛП 1

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}\mathbf{x} \rightarrow \max, D = \{\mathbf{x} \in R^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}.$$

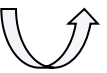
(!) без ограничения общности

$$m \leq n$$

$$m > n$$

$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$   
несовместна

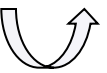
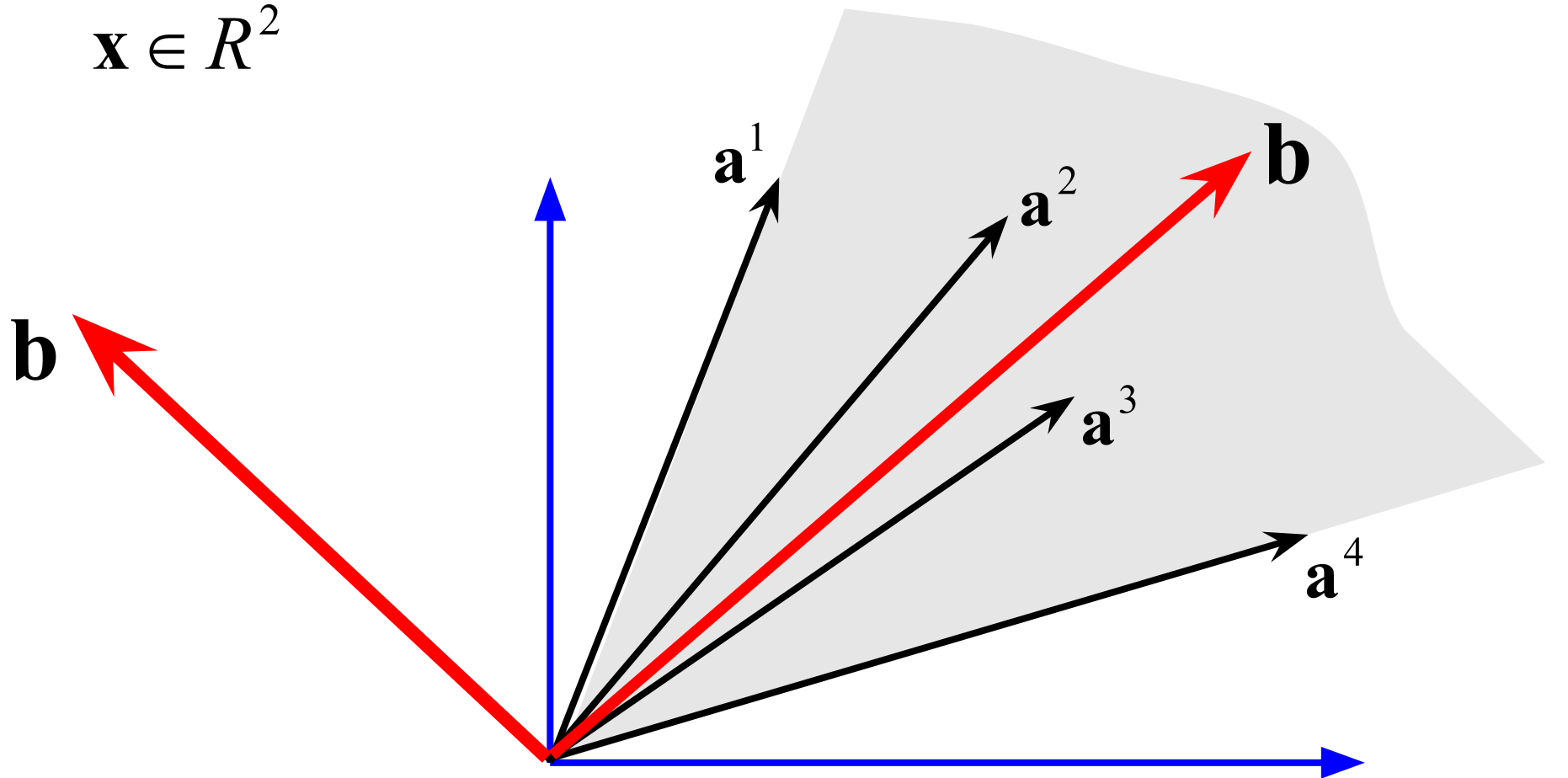
существуют  
линейно-зависимые  
ограничения



# Вторая геометрическая интерпретация ЗЛП 1

$$\mathbf{a}^1 x_1 + \mathbf{a}^2 x_2 + \dots + \mathbf{a}^j x_j + \dots + \mathbf{a}^n x_n = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \in R^2$$



## Базисный план 1

$$\beta = \{ \mathbf{a}^{j_1}, \mathbf{a}^{j_2}, \square, \mathbf{a}^{j_m} \}$$

$$N(\beta) = \{ j_1, j_2, \square, j_m \}$$

$$\mathbf{x}(\beta) : \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(\beta) =$$

$$= \mathbf{a}^{j_1} \cdot x_{j_1} + \mathbf{a}^{j_2} \cdot x_{j_2} + \square + \mathbf{a}^{j_m} \cdot x_{j_m} = \mathbf{b}$$

## Базисный план 2

 **Х(β)** базисный план

$$x_j(\beta) \geq 0, \quad j \in N(\beta);$$

$$x_j(\beta) = 0, \quad j \notin N(\beta).$$

## Базисный план 3

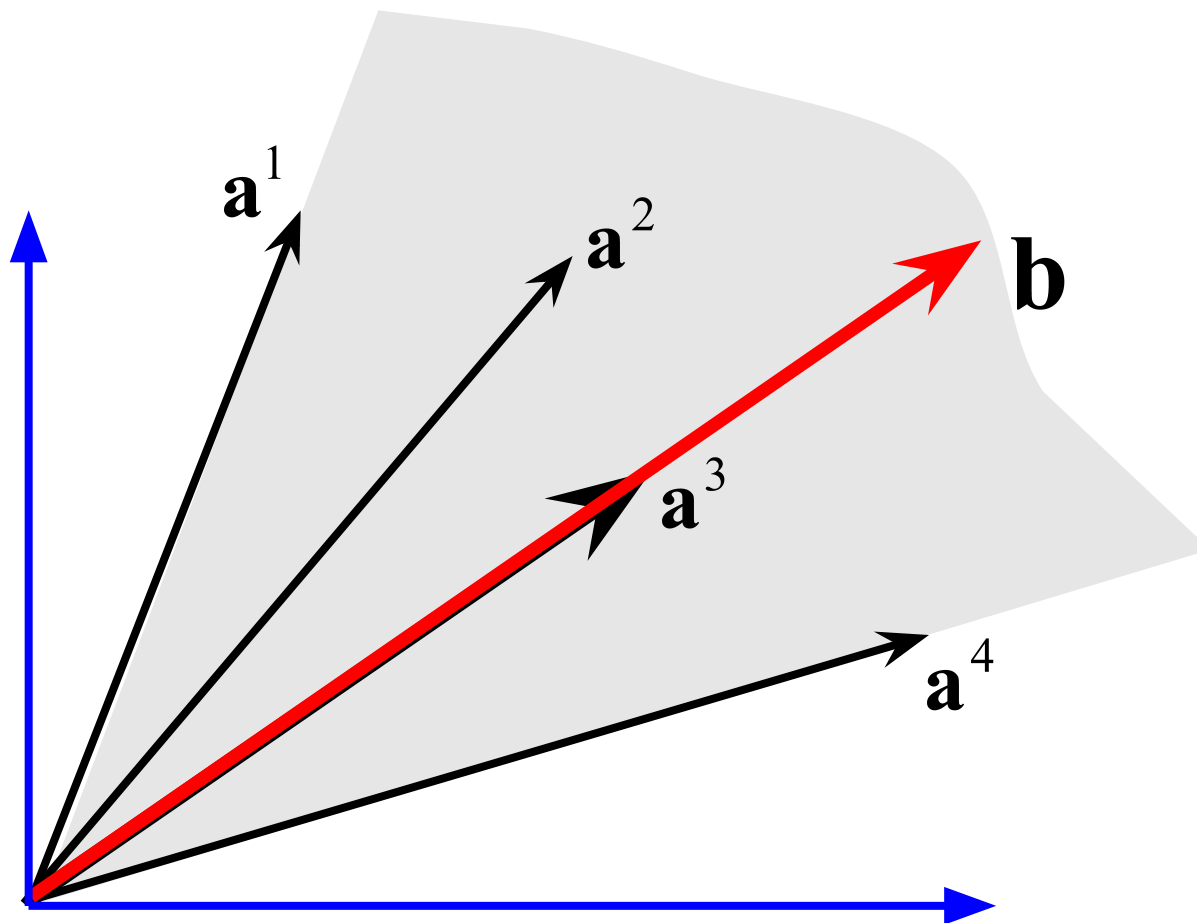


**базисный план-невырожденный:**

$$x(\beta) > 0, \forall j \in N(\beta)$$

**вырожденный – в противном случае.**

# Базисный план 4



# Теоремы о свойствах базисных планов 1



## Теорема

Каждый допустимый базисный план является угловой точкой множества допустимых планов

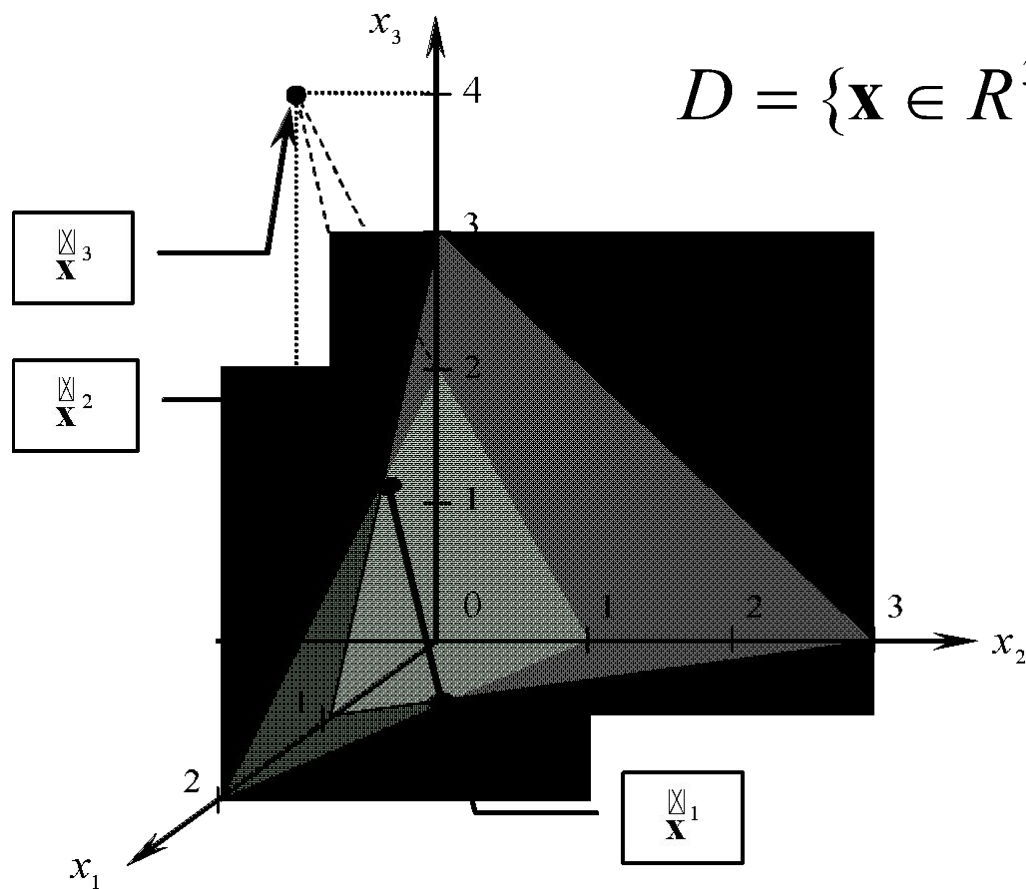
$$\beta = \{a^1, a^2, \dots, a^m\}$$





# Теоремы о свойствах базисных планов 2

# Базисные планы (пример)



$$D = \{ \mathbf{x} \in R^3 \mid \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{array} \}.$$

## Симплекс-метод, историческая справка



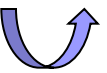
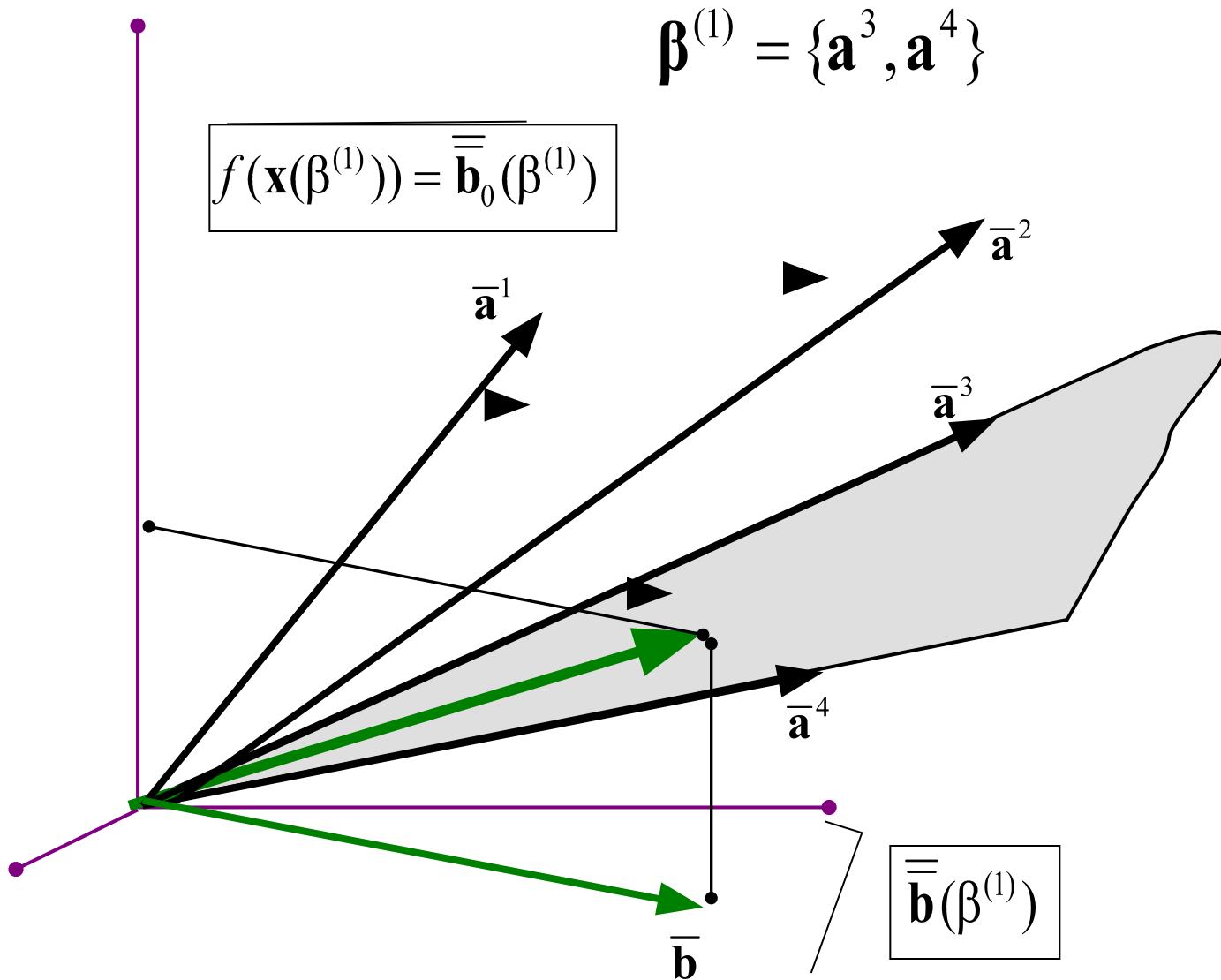
**Леонид Витальевич  
Канторович  
(1912–1986) , 1939**



**Джордж Данциг  
(1914–2005) , 1947**



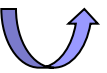
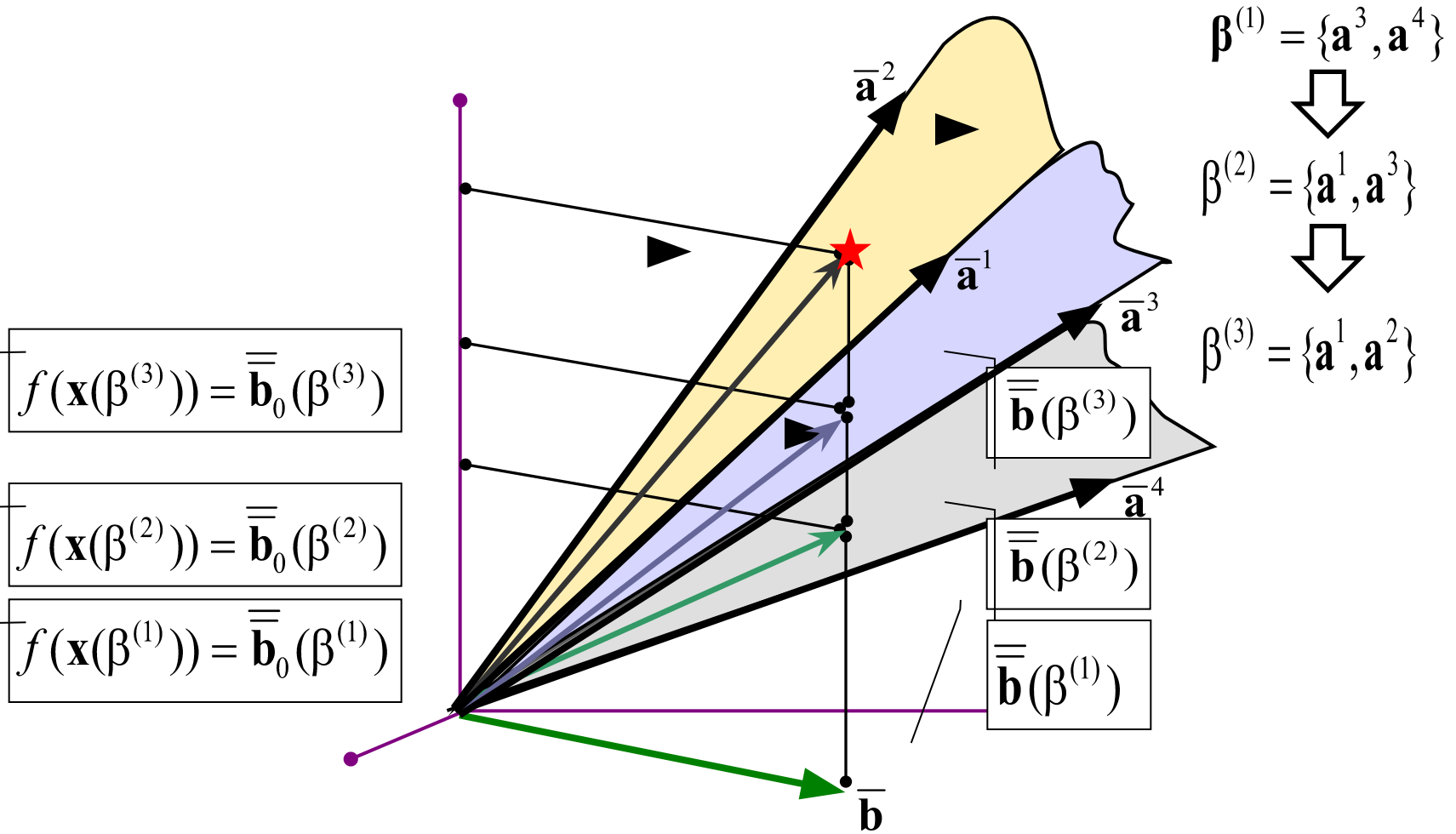
# Симплекс-метод, геометр. интерпретация 1



# Симплекс-метод, геометр. интерпретация 2



# Симплекс-метод, геометр. интерпретация 3



# Симплекс-метод алгоритм

0-итерация: Определение  
исходного допустимого  
базисного плана

Проверка  
оптимальнос  
ти

Да

Выход

Нет

Определение вводимого столбца

Обнаружена  
неограничен  
ность

Выход

Нет

Определение  
выводимого  
столбца

Пересчёт параметров задачи относительно  
нового базиса

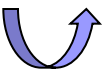
Стандартная  
итерация



# Симплекс-метод критерий оптимальности

☞ план является оптимальным, если для всех  $j \in 1..n$   
 $a_{0j}(\beta^{(q)}) \geq 0$ , и неоптимальным в противном случае,  
т.е. если существует такое  $l \in \{1..n\}$ , что  $a_{0l}(\beta^{(q)}) < 0$ .

Значения  $a_{0j}(\beta^{(q)})$  также называют оценками столбцов матрицы  $A$  относительно текущего базиса или симплекс-разностями.





# Симплекс-метод

## определение выводимого столбца

☝ для столбца  $a^i$ , претендующего на ввод в базис, и вектора ограничений  $b$  рассматриваются отношения

Таким образом, если базис на  $q$ -й итерации включал столбцы с номерами

$$N(\beta^{(q)}) \equiv \left\{ \frac{b_i(\beta^{(q)})}{a_{il}(\beta^{(q)})} \mid j_{r-1}, j_r, j_{r+1}, \dots, j_m \right\},$$

то базис на итерации  $q+1$  будет состоять из столбцов с номерами:

и определяется такая строка  $r$ , что

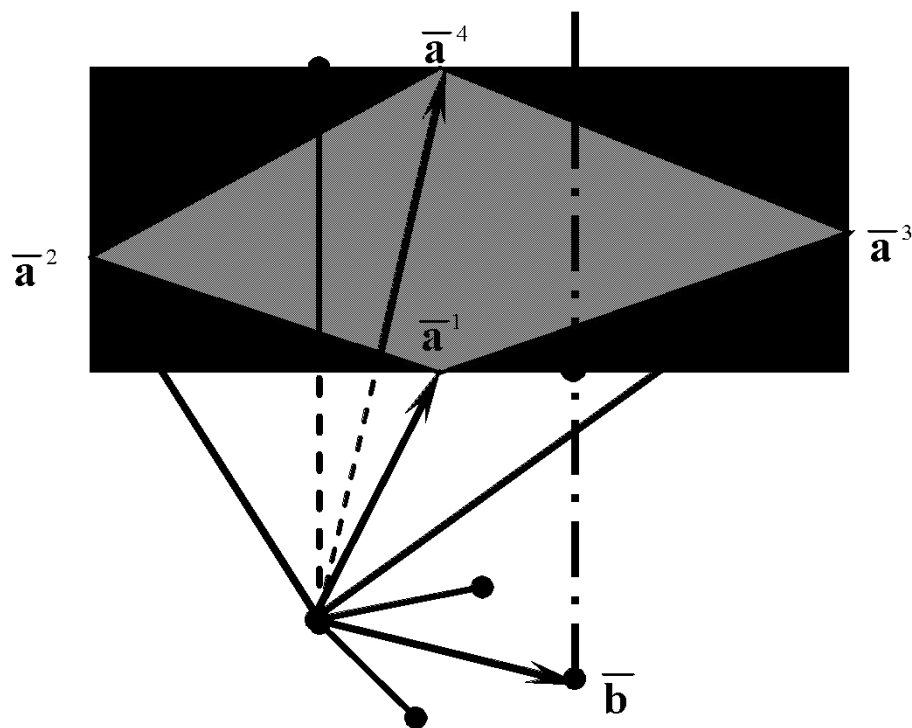
$$\lambda_r = \min_{i \in \{1..m \mid a_{il}(\beta^{(q)}) > 0\}} \{\lambda_i\}.$$

Полученный индекс  $r$  определяет номер столбца в  $N(\beta^{(q)})$ ,

выводимого из базиса, а именно,  $j_r = N_r(\beta^{(q)})$ .

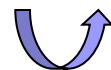


# Симплекс-метод, неограниченность



$$\exists l : a_{0l}(\beta^{(q)}) < 0$$

$$\mathbf{a}^l(\beta^{(q)}) \leq 0$$



# Симплекс-метод, симплекс-таблица

Номера базисных столбцов

Значение цел. функции на текущем плане

Строка «оценок»

$T^{(q)} =$

	$b_0(\beta^{(q)})$	$a_0(\beta^{(q)})$	
$N(\beta^{(q)})$	$b(\beta^{(q)})$	$A(\beta^{(q)})$	$\lambda^{(q)}$

Столбец ограничений в текущем базисе

Матрица задачи в текущем базисе

Значения  $\lambda$ ,  
рассч. при  
определен.  
выводимого  
столбца

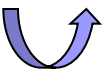


# Симплекс-метод, приме

Исходный  
допустимый  
базис

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 &\rightarrow \max, \\ 7x_1 + 5x_2 + x_3 &= 35, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 &= 8, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\bar{\Delta}(\beta^{(1)}) = \left[ \begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \quad \bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(1)}) = \left[ \begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right],$$

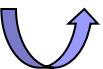


# Симплекс-метод, пример (1)

$$\bar{\mathbf{A}}(\beta) \mathbf{b}(\beta) = \mathbf{A}(\beta) \Delta^{-1} (\mathbf{b}(\beta) - \mathbf{A}(\beta) \Delta^{-1} \mathbf{b}(\beta))$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -0 & 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 7 & 0 & 5 & 35 & 0 & -35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

	$b_0(\beta^{(q)})$				
	0	-4	-3	0	0
3	35	7	5	1	0
$N(\beta^{(q)})$	$\mathbf{b}(\beta^{(q)})$		$\mathbf{A}(\beta^{(q)})$		
4	8	1	2	0	1



Разрешающий элемент

# Симплекс-метод, пример (2)

$$a_0(\beta^{(1)}) + \frac{4}{7} \cdot a_1(\beta^{(1)})$$

$$35 : 7 = 5$$

$$T^{(1)} =$$

	0	-4	-3	0	0
<b>3</b>	35	7	5	1	0
<b>4</b>	8	1	2	0	1

$$8 : 1 = 8$$

$$a_2(\beta^{(1)}) - \frac{1}{7} a_1(\beta^{(1)})$$

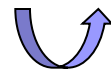
Разрешающий элемент

$$5 : 5/7 = 7$$

$$T^{(2)} =$$

	20	0	-1/7	4/7	0
<b>1</b>	5	1	5/7	1/7	0
<b>4</b>	3	0	9/7	-1/7	1

$$3 : 9/7 = 7/3$$



# Симплекс-метод. пример (3)

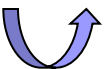
План оптимальный !!!

$$T^{(3)} =$$

	61/3	0	0	5/9	1/9
<b>1</b>	10/3	1	0	2/9	-5/9
<b>2</b>	7/3	0	1	-1/9	7/9

$$\mathbf{x}^* = \left(\frac{10}{3}, \frac{7}{3}, 0, 0\right),$$

$$f^* = f(\mathbf{x}^*) = \frac{61}{3} = 20\frac{1}{3}.$$



# Симплекс-метод, метод минимизации невязок

$$f(\mathbf{x}) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \rightarrow \max,$$

$$D = \{\mathbf{x} \in R^n \mid a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = b_1,$$

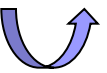
$$\tilde{f}(\mathbf{x}) = 0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_n - 1 \cdot x_{n+1} - 1 \cdot x_{n+m} \rightarrow \max,$$

$$\tilde{D} = \{\mathbf{x} \in R^{n+m} \mid a_{11} x_1 + \dots + a_{m1} x_1 + \dots + a_{1n} x_n + \dots + a_{mn} x_n + 0 \cdot x_{n+1} + \dots + 1 \cdot x_{n+m} = b_m,$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \\ x_{n+1} \geq 0, \dots, x_{n+m} \geq 0 \end{array} \right\}$$

$$a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n + 0 \cdot x_{n+1} + \dots + 1 \cdot x_{n+m} = b_m,$$

$$x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, x_{n+1} \geq 0, \dots, x_{n+m} \geq 0 \}.$$





# Обоснование симплекс-метода T1/1

**Теорема 1.** Если для плана  $\mathbf{x}^*(\beta)$  выполняется условие  $\mathbf{a}_0(\beta) \geq 0$ , то данный план является оптимальным.

Рассмотрим произвольный план задачи  $\mathbf{x} \in D$ . Из допустимости  $\mathbf{x}$  следует

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{a}^j x_j = \mathbf{b}.$$

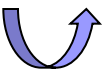
Значение целевой функции задачи, достигаемое на плане  $\mathbf{x}$ , можно выразить как

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j.$$

При этом с учетом того, что  $\forall j \in 1..n \quad a_{0,j}(\beta) = -c_j + \mathbf{c}(\beta) \cdot \mathbf{a}^j(\beta) \geq 0$  и, соответственно,  $c_j \leq \mathbf{c}(\beta) \cdot \mathbf{a}^j(\beta)$ , получаем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n c_j x_j &\leq \sum_{j=1}^n \left[ \sum_{i=1}^m c_i(\beta) \cdot a_{ij}(\beta) \right] x_j = \\ &= \sum_{i=1}^m \left[ \sum_{j=1}^n a_{ij}(\beta) \cdot x_j \right] c_i(\beta). \end{aligned}$$

(T1.1)



# Обоснование симплекс-метода T1/2

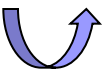
Выражения  $\sum_{j=1}^n a_{ij}(\beta) \cdot x_j$  представляют собой ничто иное, как «левые» части ограничений задачи, преобразованные относительно текущего базиса  $\beta$ , а, поскольку план  $\mathbf{x}$  является допустимым, то для  $\forall i$ :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}(\beta) \cdot x_j = b_i(\beta). \quad (\text{T1.2})$$

Подставив (T1.1) в (T1.2) получаем, что для произвольного  $\mathbf{x} \in D$

$$f(\mathbf{x}) \leq \sum_{i=1}^m b_i(\beta) \cdot c_i(\beta) = f(\mathbf{x}^*(\beta)),$$

что и означает оптимальность  $\mathbf{x}^*(\beta)$ . ✌



# Обоснование симплекс-метода T2/1

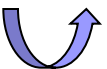
**Теорема 2.** В симплекс-алгоритме очередной план  $\mathbf{x}(\beta^{(q+1)})$ , получаемый на основе допустимого базисного плана  $\mathbf{x}(\beta^{(q)})$ , всегда является допустимым.

Базисный план  $\mathbf{x}(\beta^{(q+1)})$ , получаемый на очередной итерации  $q+1$ , связан с предшествующим ему планом  $\mathbf{x}(\beta^{(q)})$  соотношениями

$$\begin{aligned}x_{N_i(\beta^{(q)})}(\beta^{(q+1)}) &= x_{N_i(\beta^{(q)})}(\beta^{(q)}) - \lambda \cdot a_{il}(\beta^{(q)}) \quad \text{для } i = 1..m \ (j \in N(\beta^{(q)})), \\x_l(\beta^{(q+1)}) &= \lambda, \\x_j(\beta^{(q+1)}) &= 0 \quad \text{для } j \notin \{N(\beta^{(q)}) \cup l\},\end{aligned}$$

(T2.1)

где  $x_{N_i(\beta^{(q)})}(\beta^{(q)}) = b_i(\beta^{(q)})$  для  $i \in 1..m$ .



# Обоснование симплекс-метода T2/2

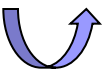
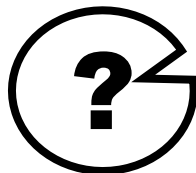
Тогда  $\forall \lambda$

$$\sum_{i=1}^m \mathbf{a}^{N_i(\beta^{(q+1)})} \cdot b_i(\beta^{(q+1)}) - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}^j \cdot x_j(\beta^{(q+1)}) = \sum_{i=1}^m \mathbf{a}^{N_i(\beta^{(q)})} \cdot b_i(\beta^{(q)}) - \sum_{i=1}^m \mathbf{a}^l \cdot x_i(\beta^{(q+1)})$$

$$\sum_{i=1}^m \mathbf{a}^{N_i(\beta^{(q)})} \cdot a_{il}(\beta^{(q)}) \cdot \sum_{i=1}^m \mathbf{a}^{N_i(\beta^{(q)})} \cdot [b_i(\beta^{(q)}) - \lambda \cdot a_{il}(\beta^{(q)})] + \mathbf{a}^l \cdot \lambda \quad (i \in \bar{1..m})$$

единичными (в базисе  $\beta^{(q)}$ )  $\lambda \sum_{i=1}^m \mathbf{a}^{N_i(\beta^{(q)})} \cdot a_{il}(\beta^{(q)}) + \mathbf{a}^l \cdot \lambda =$

$$= \mathbf{b} - \lambda \mathbf{a}^l + \lambda \mathbf{a}^l = \mathbf{b}.$$



## Обоснование симплекс-метода T2/3

Таким образом, при формировании  $\mathbf{x}(\beta^{(q+1)})$  согласно правилам (T2.1) при  $\forall \lambda$  он будет удовлетворять первой группе ограничений КЗЛП ( $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ).

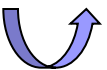
Если  $\lambda$  выбирается согласно правилам определения выводимого столбца:  $\lambda = \lambda_r$  для  $i \in \{1..m \mid a_{il}(\beta^{(q)}) \leq 0\}$  в силу неотрицательности  $\lambda_r$  имеем

$$x_{N_i(\beta^{(q)})}(\beta^{(q+1)}) = x_{N_i(\beta^{(q)})}(\beta^{(q)}) - \lambda \cdot a_{il}(\beta^{(q)}) \geq 0.$$

Для  $i \in \{1..m \mid a_{il}(\beta^{(q)}) > 0\}$  также будет выполняться условие

$$\begin{aligned} x_{N_i(\beta^{(q)})}(\beta^{(q+1)}) &= b_i(\beta^{(q)}) - \lambda_r \cdot a_{il}(\beta^{(q)}) = \\ &= b_i(\beta^{(q)}) - \min_{i: a_{il}(\beta^{(q)}) > 0} \left\{ \frac{b_i(\beta^{(q)})}{a_{il}(\beta^{(q)})} \right\} \cdot a_{il}(\beta^{(q)}) \geq 0. \end{aligned}$$

Остальные компоненты  $\mathbf{x}(\beta^{(q+1)})$  ( $j \notin N(\beta^{(q)})$ ) — неотрицательны по определению, т.е. план  $\mathbf{x}(\beta^{(q+1)}) \geq 0$ , что и означает его допустимость. ✌



# Обоснование симплекс-метода T3/1

**Теорема 3.** В случае невырожденности ЗЛП при переходе к очередному базисному плану  $\mathbf{x}(\beta^{(q+1)})$  происходит «улучшение» (возрастание) значения целевой функции:  $f(\mathbf{x}(\beta^{(q+1)})) > f(\mathbf{x}(\beta^{(q)}))$ .

С учетом (T2.1) значение целевой функции в  $\mathbf{x}(\beta^{(q+1)})$  может быть представлено как

$$f(\mathbf{x}(\beta^{(q+1)})) = \sum_{i=1}^m c_{N_i(\beta^{(q)})} \cdot x_{N_i(\beta^{(q)})}(\beta^{(q+1)}) + c_l \cdot x_l(\beta^{(q+1)}) =$$

Таким образом, если  $\sum_{i=1}^m c_{N_i(\beta^{(q)})} \cdot [b_i(\beta^{(q)}) - \lambda_r \cdot a_{il}(\beta^{(q)})] + c_l \cdot \lambda_r =$  (столбец  $l$  имеет отрицательную оценку), то  $f(\mathbf{x}(\beta^{(q+1)})) > f(\mathbf{x}(\beta^{(q)}))$ .

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^m c_{N_i(\beta^{(q)})} \cdot b_i(\beta^{(q)}) - \lambda_r \cdot \left[ \sum_{i=1}^m c_{N_i(\beta^{(q)})} \cdot a_{il}(\beta^{(q)}) - c_l \right] = \\ &= f(\mathbf{x}(\beta^{(q)})) - \lambda_r \cdot a_{0l}(\beta^{(q)}). \end{aligned}$$

(T3.1)



# Обоснование симплекс-метода T4/1

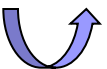
**Теорема 4.** Если для текущего базисного плана  $\mathbf{x}(\beta^{(q)})$  существует такое  $l$ , что  $a_{0,l}(\beta^{(q)}) < 0$  и  $\mathbf{a}^l(\beta^{(q)}) \leq 0$ , то целевая функция задачи не ограничена сверху.

В ходе доказательства теоремы 2 было показано, что базисный план  $\mathbf{x}(\beta^{(q+1)})$ , получаемый на очередной итерации  $q + 1$ , если  $\mathbf{a}^l(\beta^{(q)}) \leq 0$ , при любом  $\lambda > 0$  всегда является допустимым.

Используя (ТЗ.1), значение целевой функции для плана  $\mathbf{x}(\beta^{(q+1)})$  можно выразить как

$$f(\mathbf{x}(\beta^{(q+1)})) = f(\mathbf{x}(\beta^{(q)})) - \lambda \cdot a_{0l}(\beta^{(q)}).$$

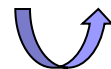
Тогда, с учетом того, что  $a_{0l}(\beta^{(q)}) < 0$ , устремив  $\lambda \rightarrow +\infty$ , мы получаем неограниченное возрастание целевой функции на множестве допустимых планов. ✌️



# Сходимость симплекс-метода и проблема вырожденности 1

Рассмотрим пример

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) = & x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ D = \{\mathbf{x} \in R^2 \mid & x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ & 3x_1 - x_2 \leq 3, \\ & \mathbf{x} \geq 0\}. \end{aligned}$$





# Сходимость симплекс-метода и проблема вырожденности 2

$$T^{(1)} =$$

		0	-1	-1	0	0	0	
3	8	1	2	1	0	0	8	
4	12	3	2	0	1	0	4	
5	3	3	-1	0	0	1	1	

$$T^{(2)} =$$

		1	0	-4/3	0	0	1/3	
3	7	0	7/3	1	0	-1/3	3	
4	9	0	3	0	1	-1	3	
1	1	1	-1/3	0	0	1/3	—	

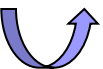
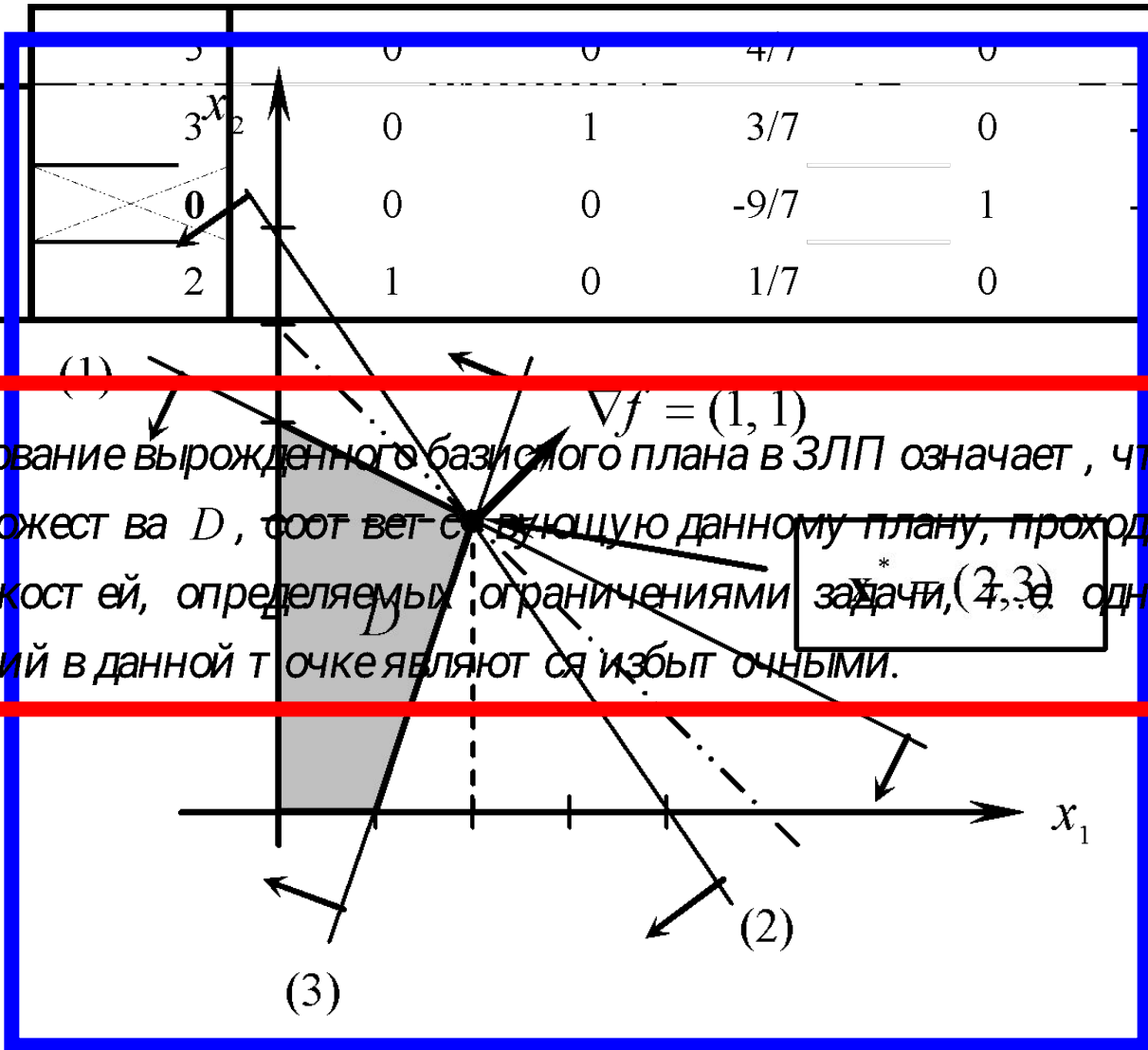


# Сходимость симплекс-метода и проблема вырожденности 3

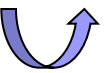
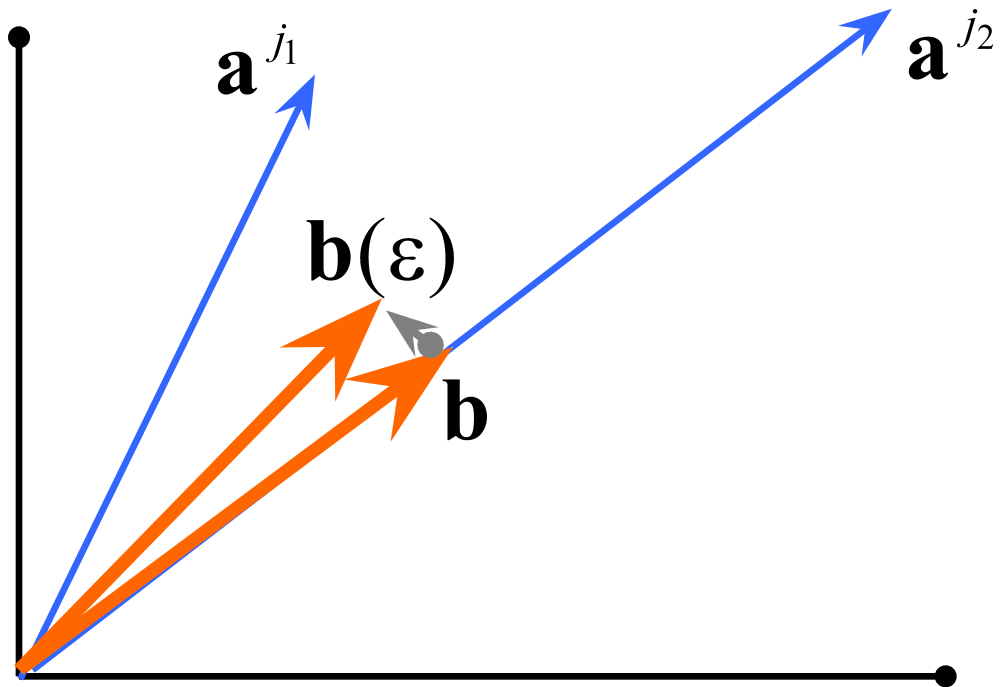
$T^{(3)} =$

		3	0	0	4/7	0	1/7
2	$3x_2$	0	1	3/7	0	-1/7	
4	<b>0</b>	0	0	-9/7	1	-4/7	
1	2	1	0	1/7	0	2/7	

существование вырожденного базисного плана в ЗЛП означает, что через угловую точку множества  $D$ , соответствующую данному плану, проходит более чем  $m$  гиперплоскость ей, определяемых ограничениями задачи,  $(2,3)$  одно или несколько ограничений в данной точке являются избыточными.



# Сходимость симплекс-метода и проблема вырожденности 4



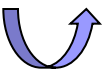
# Сходимость симплекс-метода и проблема вырожденности 5

(👉) Базовая идея: переход к «возмущённой» задаче

$$(D, f) \quad \Rightarrow \quad (D(\varepsilon), f)$$

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{a}^j x_j = \mathbf{b} + \sum_{j=1}^n \mathbf{a}^j \varepsilon^j = \mathbf{b}(\varepsilon) \quad (\mathbf{B.1})$$

где  $\varepsilon$  — некоторый достаточно малый положительный параметр  
( $\varepsilon^j$  —  $j$ -я степень числа  $\varepsilon$ )

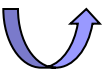


# Сходимость симплекс-метода и проблема вырожденности 6

## (👉) Теорема Чарнса

существует такое  $\varepsilon' > 0$ , что для  $\forall \varepsilon \in ]0, \varepsilon'[$  задача  $(D(\varepsilon), f)$ , полученная в результате преобразования (B.1), будет невырожденной;

существует такое  $\varepsilon'' > 0$ , что для  $\forall \varepsilon \in ]0, \varepsilon''[$  из допустимости базиса в задаче  $(D(\varepsilon), f)$  будет следовать его допустимость в исходной задаче (а из оптимальности — оптимальность).

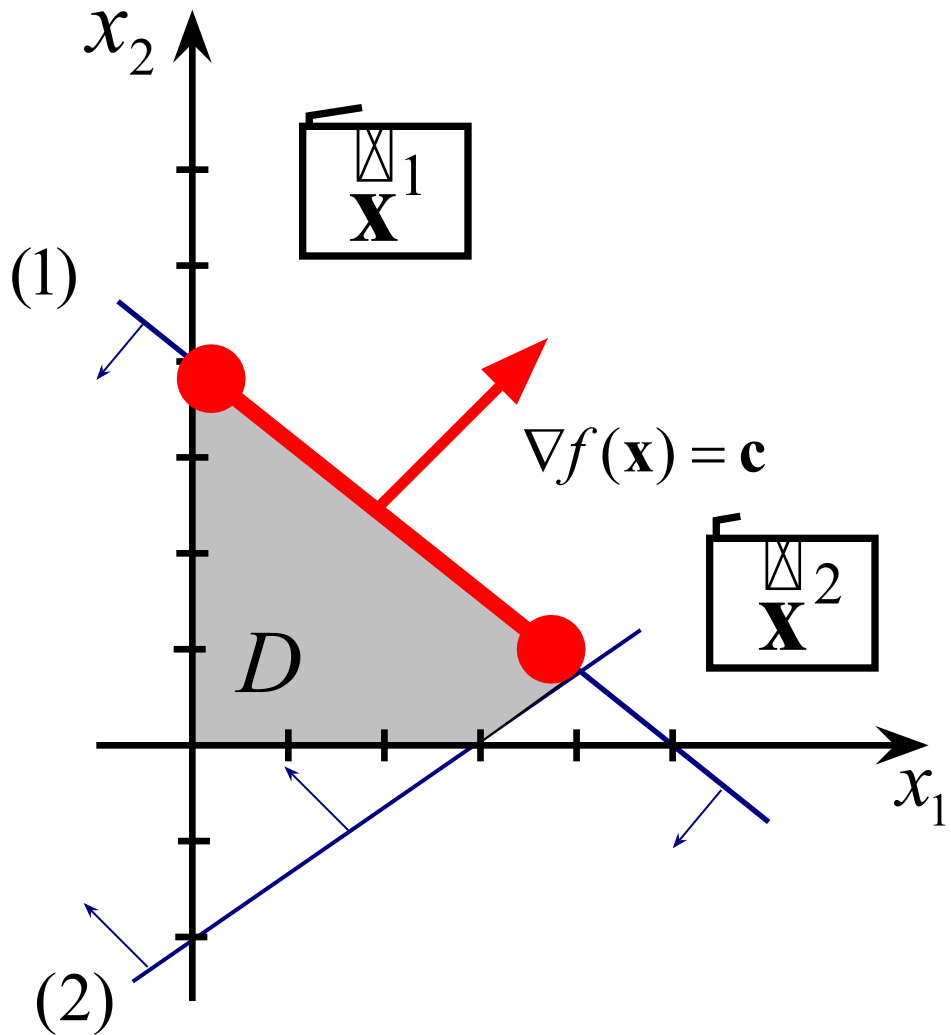


# Альтернативные оптимальные планы 1

Рассмотрим пример

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) = & \quad 8x_1 + 10x_2 \rightarrow \max, \\ D = \{\mathbf{x} \in R^2 \mid & \quad 4x_1 + 5x_2 \leq 20, \\ & \quad 2x_1 - 3x_2, \leq 6, \\ & \quad \mathbf{x} \geq 0\}. \end{aligned}$$

# Альтернативные оптимальные планы 2



$$\bar{\mathbf{x}}^1 = (0, 4)$$

$$\bar{\mathbf{x}}^2 = (45/11, 8/11)$$

# Альтернативные оптимальные планы 3

$T^{(1)} =$ 

	0	-8	-10	0	0
3	$s$	20	4	5	1
4	$s$	0			0

  
 $\mathbf{x}^* = \sum_{i=1}^6 \lambda_i \mathbf{x}^i$ , где  $\lambda_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^6 \lambda_i = 1$

$T^{(2)} =$ 

	40	0	0	2	0
2	4	4/5	1	1/5	0
4	18	22/5	0	3/5	1

$\mathbf{x}^* = \lambda \mathbf{x}^1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}^2 =$ 

	$45/11 \cdot \lambda + 45/11$	$0$	$0$	$1$	$0$
2	$8/11$	$0$	$1$	$36/11 \cdot \lambda - 2/11$	$8/11$
1	$45/11$	$1$	$0$	$3/22$	$5/22$

$\hat{\mathbf{x}}^1$  and  $\hat{\mathbf{x}}^2$  are indicated by green circles.



# Модифицированный симплекс-метод 1

$$\beta^{(q)} \rightarrow \beta^{(q+1)}$$

$$\bar{\mathbf{A}}(\beta^{(q)}) \rightarrow \bar{\mathbf{A}}(\beta^{(q+1)})$$

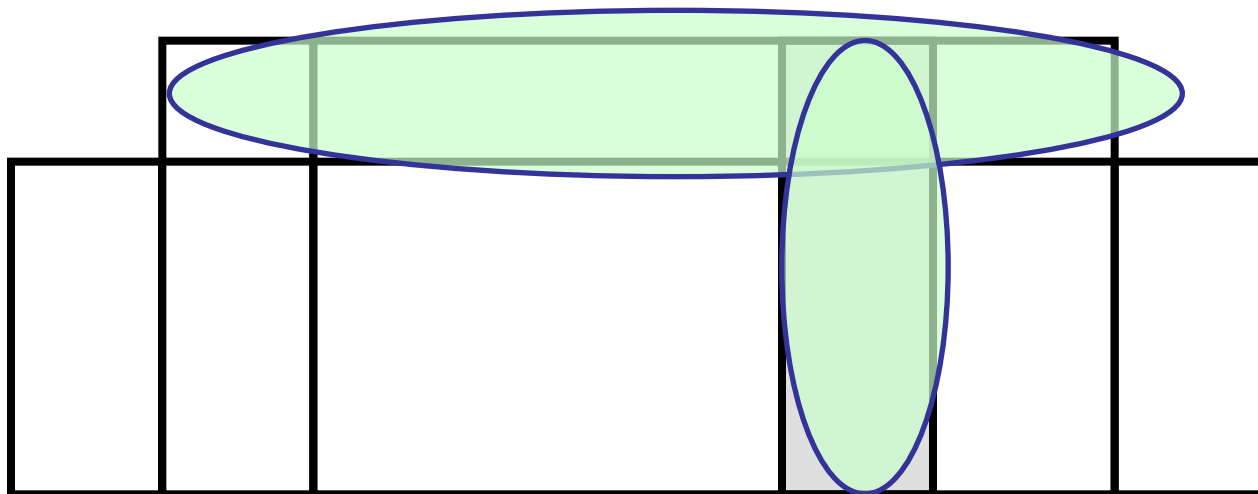
$$\bar{\mathbf{A}}(\beta^{(q)}) = \bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(q)}) \cdot \bar{\mathbf{A}}$$



$$\bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(q)}) \rightarrow \bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(q+1)})$$

# Модифицированный симплекс-метод 2

$$\mathbf{a}_0(\beta^{(q)})$$



$$\bar{\mathbf{a}}^l(\beta^{(q)})$$

# Модифицированный симплекс-метод, пример 1

$-\delta_0(\beta^{(1)})$	4	3	0	0	$\Delta(\beta^{(1)}) = \bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(1)}) =$ <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td style="padding: 2px;">-1</td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">0</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">1</td><td style="padding: 2px;">0</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">1</td></tr> </table>	-1	0	0	0	1	0	0	0	1
-1	0	0												
0	1	0												
0	0	1												
$\bar{\Delta}$	7	5	1	0										
$\delta_0(\beta^{(q)})$	1	2	0	1										
$b_0(\beta^{(q)})$	-4	$a_0(\beta^{(1)})$	0	0	$\rightarrow \max,$									
	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_3$	$\bar{a}_4$	$= 35,$									
	$x_1$	$+ 2x_2$	$+ x_3$	$+ x_4$	$= 8,$									

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$

0	-1	0	0	4	-4
$N(\beta^{(q)})$	35	0	0	7	7
$\bar{a}^l(\beta^{(q)})$	0	0	1	1	1
$\bar{a}^l(\beta^{(8)})$	4	0	0	1	8

$\lambda^{(q)}$

## Модифицированный симплекс-метод, пример 2

$T_1 =$

-1	0	0	4	3	0	0
-1	4/7	0	7	5	1	0
-1	5/9	1/9	1	2	0	1
			-4	-3	0	0
			0	-1/7	4/7	0
			0	0	5/9	1/9

## Модифицированный симплекс-метод, пример 3

$$T_2^{(2)} =$$

		20	-1	4/7	0	3	-1/7	
1	5	0	1/7	0	5	5/7	7	
4	3	0	-1/7	1	2	9/7	7/3	

$$T_2^{(3)} =$$

		61/3	-1	5/9	1/9			
1	10/3	0	2/9	-5/9				
2	7/3	0	-1/9	7/9				

# Модифицированный симплекс-метод, мультипликативная форма     3

$$\Delta^{-1}(\beta^{(q+1)}) = \mathbf{E}^{(q)} \cdot \Delta^{-1}(\beta^{(q)})$$

$r$ -й столбец:

$$\left[ \begin{array}{c} \frac{a_{1l}(\beta^{(q)})}{a_{rl}(\beta^{(q)})} \\ \frac{a_{2l}(\beta^{(q)})}{a_{rl}(\beta^{(q)})} \\ \vdots \\ \frac{1}{a_{rl}(\beta^{(q)})} \\ \vdots \\ \frac{a_{ml}(\beta^{(q)})}{a_{rl}(\beta^{(q)})} \end{array} \right]$$

**Мультипликативная** форма

$$\cdot \Delta^{-1}(\beta^{(q)}) = \mathbf{E}^{(q-1)} \cdot \mathbf{E}^{(q-2)} \cdot \dots \cdot \mathbf{E}^{(1)} \cdot \Delta^{-1}(\beta^{(1)})$$