Математические методы исследования операций

глава 2.

Линейное программирование

(часть 1)

Курс для студентов экономико-математических специальностей

Линейное программирование 1

- Определение задачи ЛП
- КЗЛП и построение канонической формы
- Первая геометрическая интерпретация и графический метод решения
- Основные теоремы ЛП
- Вторая геометрическая интерпретация и базисные планы
- Теоремы о базисных планах

Линейное программирование 2

- Симплекс-метод, алгоритм
- Симплекс-метод, обоснование
- Метод минимизации невязок
- Проблема вырожденности
- Альтернативные оптимальные планы
- Модифицированный симплекс-метод

Общая задача линейного программирования

Общая задача линейного программирования **(**ОЗЛП**)**

$$f(\mathbf{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_lx_l + c_{l+1}x_{l+1} + \ldots + c_nx_n \to \max$$

$$\begin{array}{llllllll}
a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2 & \ldots & +a_{1,l}x_l & +a_{1,l+1}x_{l+1} & \ldots & +a_{1,n}x_n & \le b_1, \\
a_{2,1}x_1 & +a_{2,2}x_2 & \ldots & +a_{2,l}x_l & +a_{2,l+1}x_{l+1} & \ldots & +a_{2,n}x_n & \le b_2, \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\
a_{r,1}x_1 & +a_{r,2}x_2 & \ldots & +a_{r,l}x_l & +a_{r,l+1}x_{l+1} & \ldots & +a_{r,n}x_n & \le b_r, \\
a_{r+1,1}x_1 & +a_{r+1,2}x_2 & \ldots & +a_{r+1,l}x_l & +a_{r+1,l+1}x_{l+1} & \ldots & +a_{r+1,n}x_n & = b_{r+1}, \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\
a_{m,1}x_1 & +a_{m,2}x_2 & \ldots & +a_{m,l}x_l & +a_{m,l+1}x_{l+1} & & +a_{m,n}x_n & = b_m, \\
x_1 \ge 0, & x_2 \ge 0, & \ldots & x_l \ge 0. & & & &
\end{array}$$

Каноническая задача линейного программирования (ОЗЛП)

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{cx} \to \max,\ D = \{\mathbf{x} \in R^n \mid \ \mathbf{Ax} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}.$$

Построение канонической формы 1

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{cx} \to \max,\ D = \{\mathbf{x} \in R^n \mid \begin{array}{lll} a_i x_i \le b_i, & & i \in I_n; \\ a_i x_i = b_i, & & i \in I_e; \\ x_j \ge 0, & & j \in J\} \end{array}$$

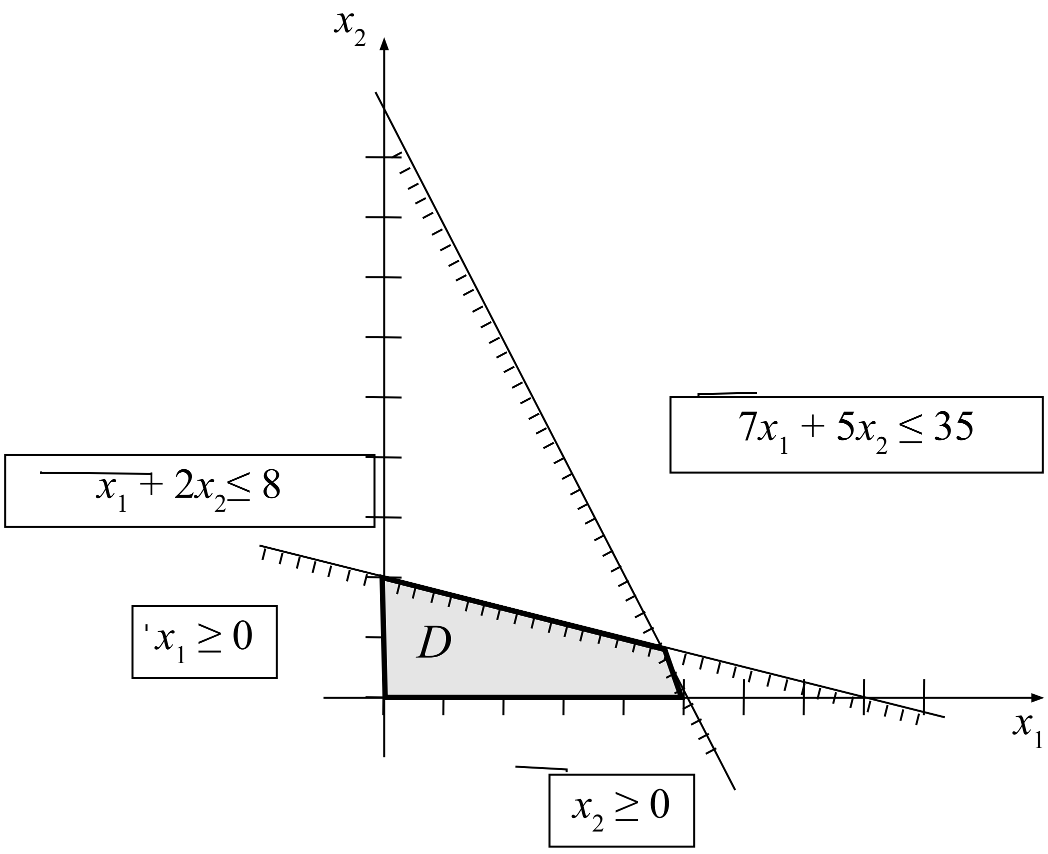
Построение канонической формы 2

- ограничения, имеющие форму неравенств $(i \in I_n)$, преобразуются в уравнения за счет добавления фиктивных неотрицательных переменных y_{n+i} $(i \in I_n)$, которые одновременно входят в целевую функцию с коэффициентом 0, т.е. не оказывают влияния на ее значение;
- переменные ОЗЛП, на которые *наложено условие неотрицательности* $(j \in J)$, формально (без каких-либо изменений) трансформируются в соответствующие переменные канонической формы: $y_j = x_j$;
- переменные, на которые не наложено условие неотрицательности $(j \notin J)$, представляются в виде разности двух новых неотрицательных переменных y_j^+ и y_j^-, где, таких что:

$$x_j = y_j^+ - y_j^-.$$

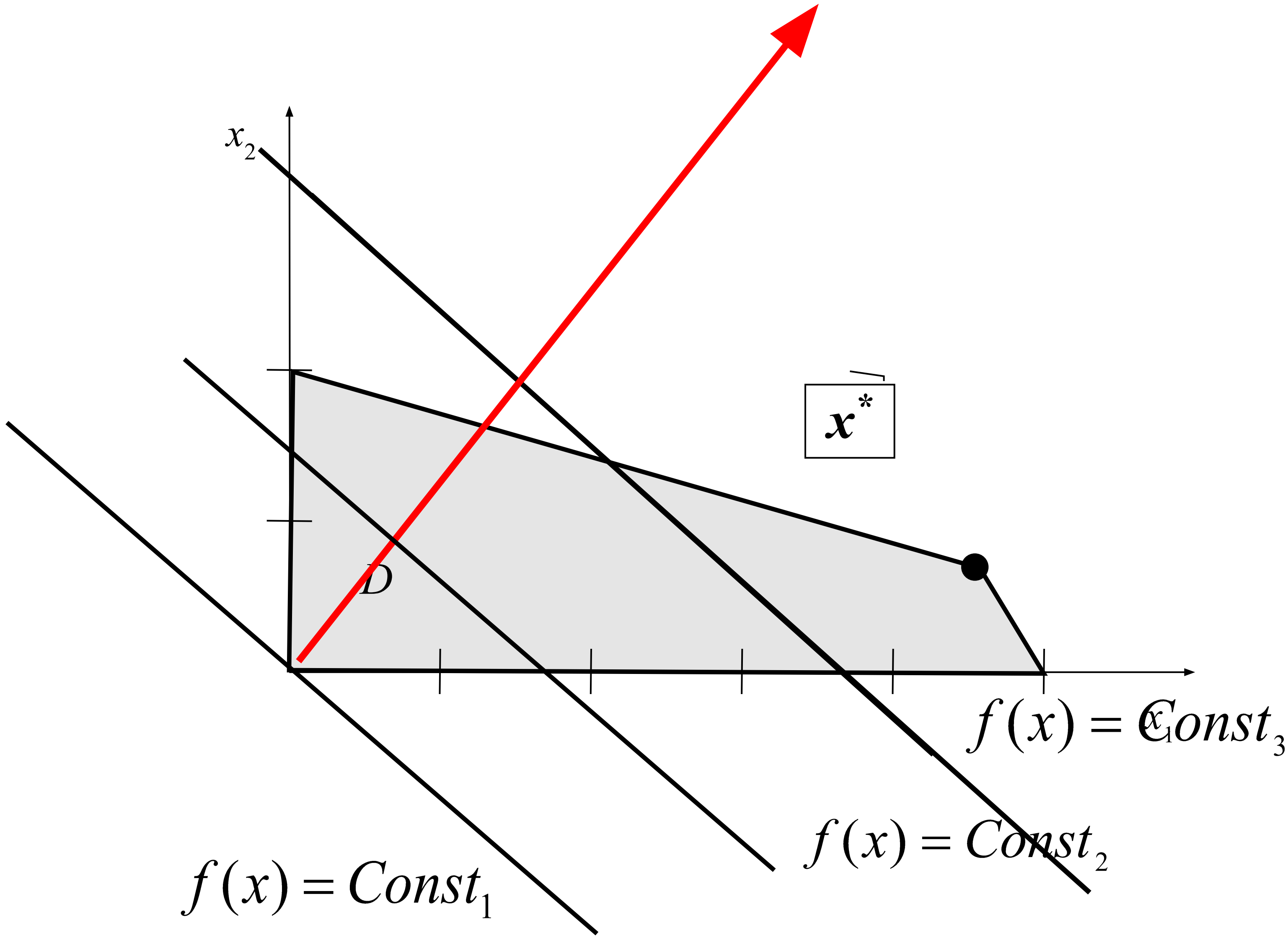
Первая геометрическая интерпретация ЗЛП

Рассмотрим задачу-базовый пример

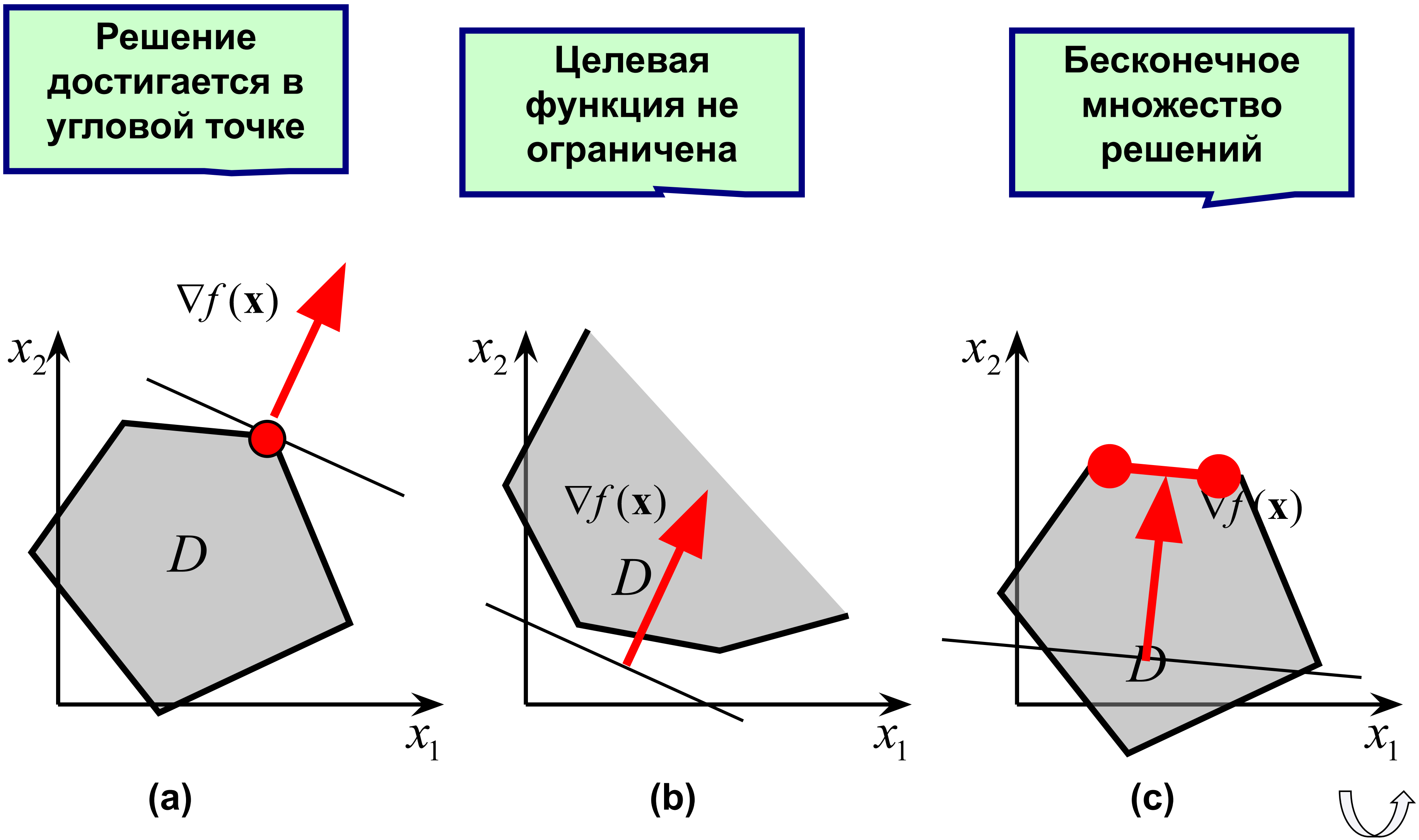


Графический метод решения ЗЛП 1

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right) = (c_1, c_2, \ldots, c_n) = \mathbf{c}$$



Принципиальные ситуации, возможные при решении задачи линейного программирования



Графический метод решения ЗЛП 2

Рассмотрим задачу

$$f(\mathbf{x}) \to \max,\ D = \{\mathbf{x} \in R^n \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b};\ x_j \ge 0,\ j \in J\},$$

$$n - m \le 2 \qquad x_{j_1}, x_{j_2} \qquad x_j = \varphi_j(x_{j_1}, x_{j_2})$$

$$\mathbf{cx} = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x_{j_1}, x_{j_2}) \to \max,$$

$$D = \{(x_{j_1}, x_{j_2}) \in R^2 \mid \varphi_j(x_{j_1}, x_{j_2}) \ge 0,\ j \in J\}$$

Основные теоремы ЛП 1

☝ Теорема

Если целевая функция f принимает максимальное значение в некоторой точке множества допустимых планов D, то она принимает это значение и в некоторой угловой точке данного множества.

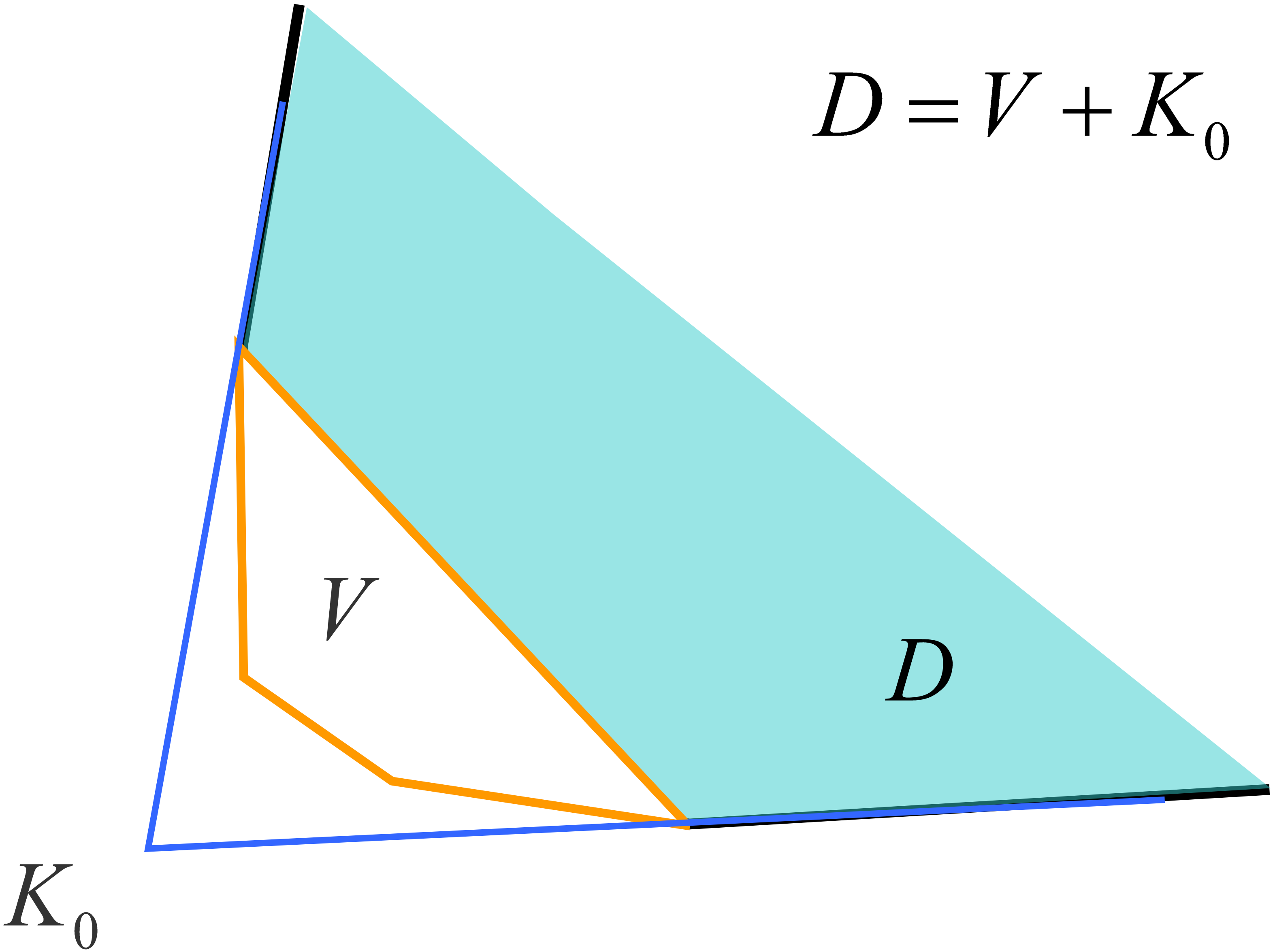
☐ Доказательство

Теорема о представлении многогранного выпуклого множества

если D — многогранное выпуклое множество, то существуют такие выпуклый многогранник V и многогранный выпуклый конус K_0 с вершиной в нуле, что $D = V + K_0$.

Основные теоремы ЛП 2

$$D = V + K_0$$



$$\mathbf{x}^* = \arg\max_{\mathbf{x}\in D}\{f(x)\}: \qquad \forall \mathbf{x} \in D : \mathbf{cx}^* \geq \mathbf{cx}$$

$$\mathbf{x}^* = \sum_{k=1}^{s} \lambda_k \mathbf{x}^k + \sum_{l=1}^{p} \mu_l \mathbf{x}^l$$

$\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^s, \ldots, \mathbf{x}^k$ - угловые точки

$$\sum_{k=1}^{s} \lambda_s = 1 \qquad \lambda_k \geq 0, \;\; k \in 1..s;$$

Основные теоремы ЛП 4

$\vec{\mathbf{x}}^{1}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{l}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{p}$ - направляющие вектора конуса

(!) рассуждения «от противного»

$$] \ \exists \mu_l > 0: \qquad \forall \mu \in [0, +\infty[$$

$$\mu_l \geq 0, l \in 1..p$$

$$f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{c}\mathbf{x}^* = \sum_{k=1}^{s} \lambda_k (\mathbf{c}\vec{\mathbf{x}}^{k}) + \sum_{l \neq l_0} \mu_l (\mathbf{c}\vec{\mathbf{x}}^{l}) + \mu_{l_0} (\mathbf{c}\vec{\mathbf{x}}^{l_0})$$

Основные теоремы ЛП 5

По свойства многогранного выпуклого конуса:

$$\forall \mu \in [0, +\infty[$$

$$\mathbf{x}(\mu) = \sum_{k=1}^{s} \lambda_k \mathbf{x}^{k} + \sum_{l \neq l_0} \mu_l \mathbf{x}^{l} + \mu \mathbf{x}^{l_0} \in D$$

В зависимости от знака $\mathbf{c}\mathbf{x}^{l_0}$

(1) $\mathbf{c}\mathbf{x}^{l_0} > 0 \quad \forall \mu > \mu_{l_0} :$

$$f(\mathbf{x}(\mu)) = \sum_{k=1}^{s} \lambda_k (\mathbf{c}\mathbf{x}^{k}) + \sum_{l \neq l_0} \mu_l (\mathbf{c}\mathbf{x}^{l}) + \mu(\mathbf{c}\mathbf{x}^{l_0}) > f(\mathbf{x}^{*})$$

Основные теоремы ЛП 5

(2) $\mathbf{c}\vec{\mathbf{x}}^{\,l_0} < 0 \qquad \forall \mu \in [0, \mu_{l_0}[: f(\mathbf{x}(\mu)) > f(\mathbf{x}^*)$

(3) $\mathbf{c}\vec{\mathbf{x}}^{\,l_0} = 0 \qquad \forall \mu \geq 0$

Вторая геометрическая интерпретация ЗЛП 1

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{cx} \to \max,\ D = \{\mathbf{x} \in R^n \mid \ \mathbf{Ax} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}.$$

(!) без ограничения общности

$$m \leq n$$

$$m > n$$

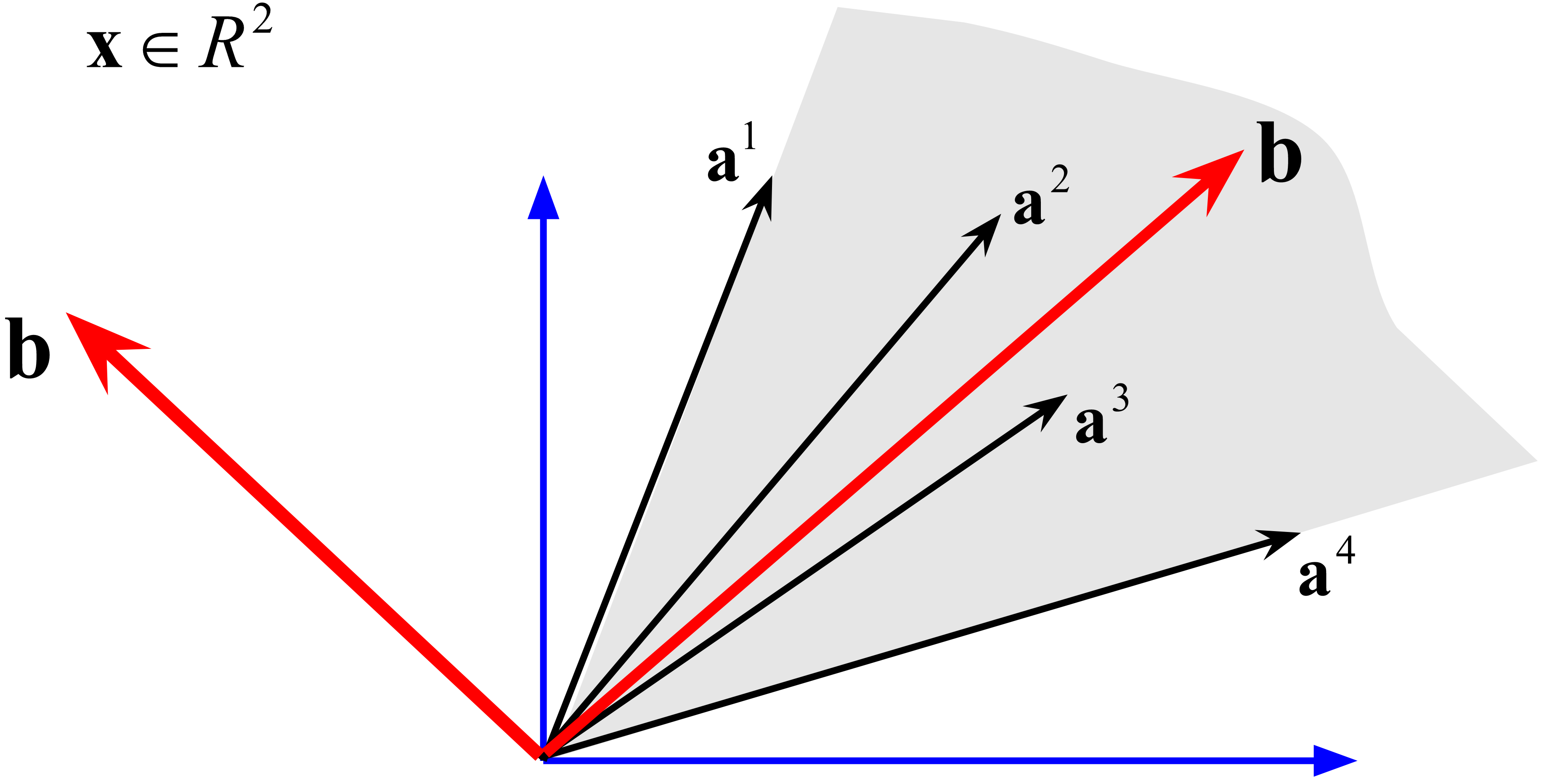
$\mathrm{Ax} = \mathrm{b}$ несовместна

существуют линейно-зависимые ограничения

Вторая геометрическая интерпретация ЗЛП 1

$$\mathbf{a}^1 x_1 + \mathbf{a}^2 x_2 + \cdots \ \mathbf{a}^j x_j + \cdots + \mathbf{a}^n x_n = \mathbf{b}$$

$\mathbf{x} \in R^2$



Базисный план 1

$$\beta = \{\mathbf{a}^{j_1}, \mathbf{a}^{j_2}, \ldots, \mathbf{a}^{j_m}\}$$

$$N(\beta) = \{j_1, j_2, \ldots, j_m\}$$

$$\mathbf{x}(\beta): \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(\beta) =$$

$$= \mathbf{a}^{j_1} \cdot x_{j_1} + \mathbf{a}^{j_2} \cdot x_{j_2} + \ldots + \mathbf{a}^{j_m} \cdot x_{j_m} = \mathbf{b}$$

Базисный план 2

☞ $\mathbf{x}(\beta)$ – базисный план

$$x_j(\beta) \geq 0, \qquad j \in N(\beta);$$

$$x_j(\beta) = 0, \qquad j \notin N(\beta).$$

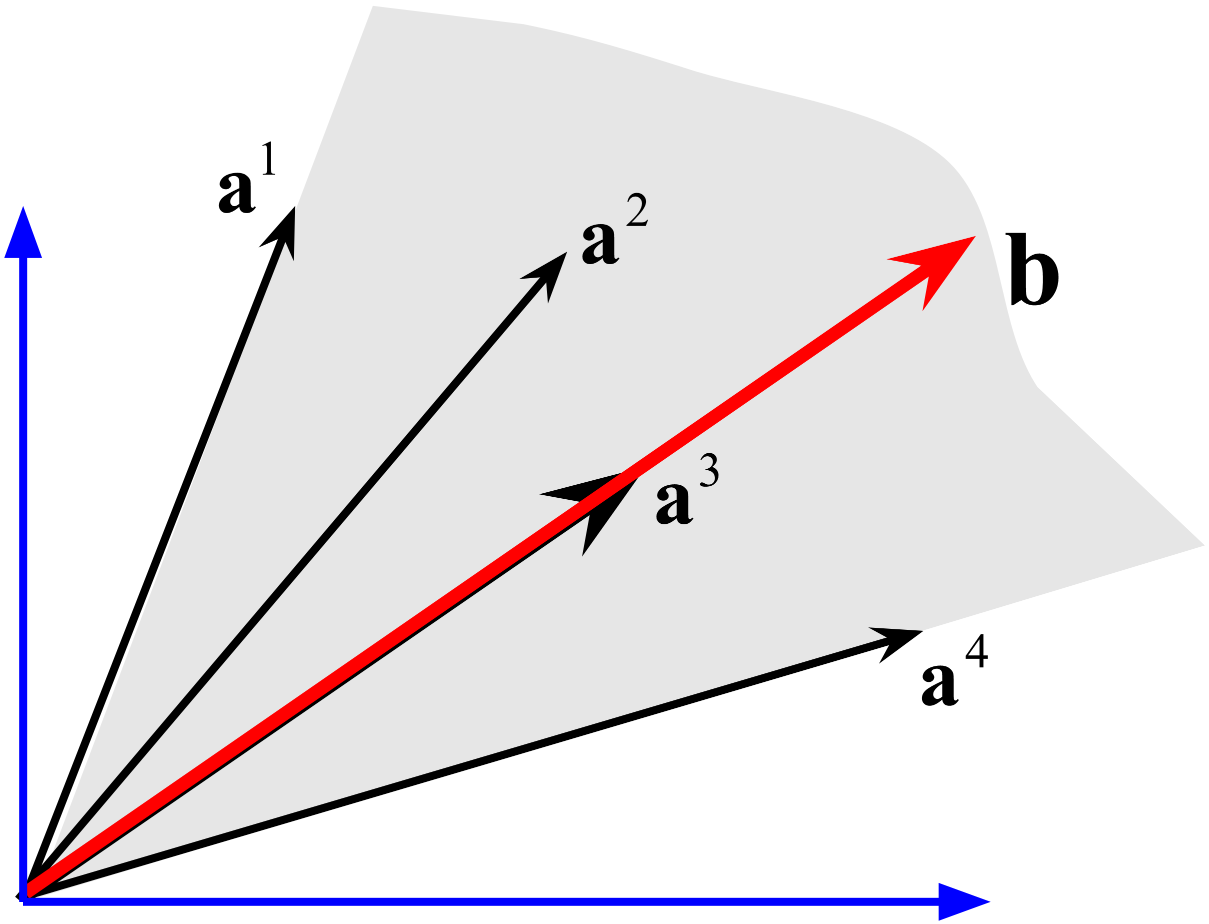
Базисный план 3

☞ **базисный план-<u>невырожденный</u>:**

$$x(\beta) > 0, \forall j \in N(\beta)$$

<u>вырожденный</u> – в противном случае.

Базисный план 4



Теоремы о свойствах базисных планов 1

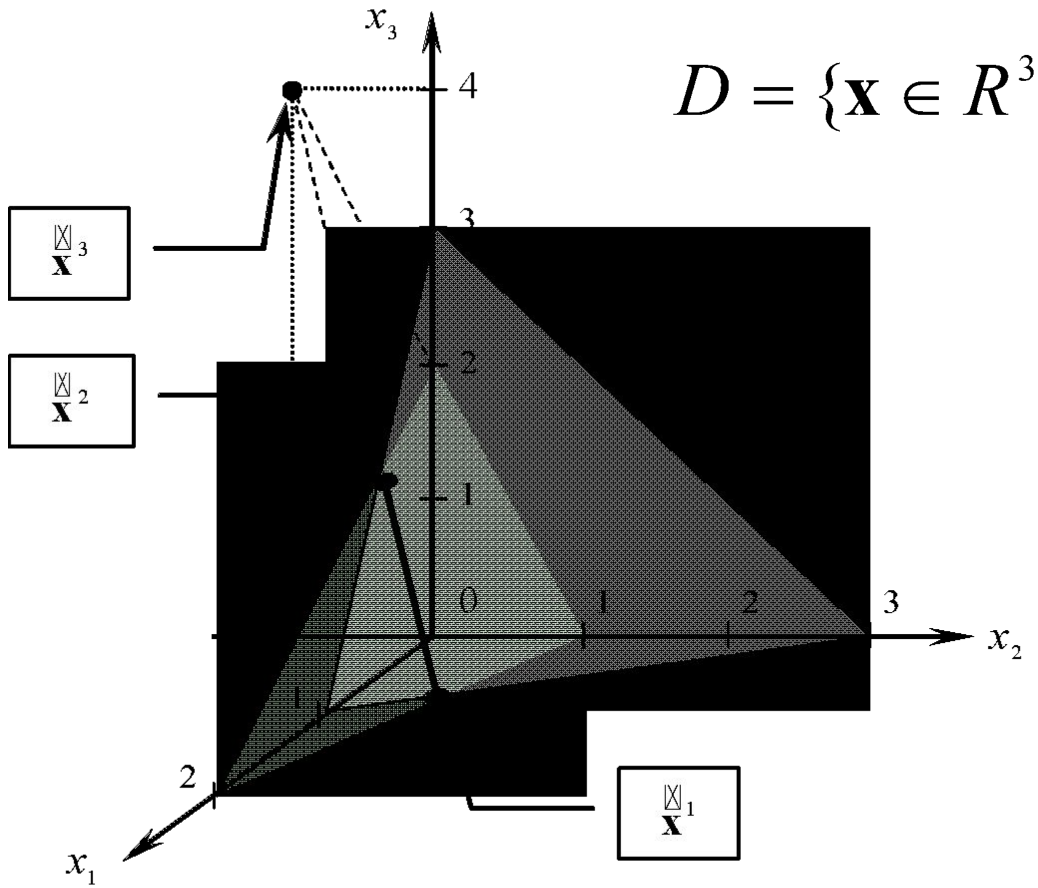
☝ **Теорема**

Каждый допустимый базисный план является угловой точкой множества допустимых планов

$\beta = \{a^1, a^2, \ldots, a^m\}$

Теоремы о свойствах базисных планов 2

Базисные планы (пример)



$$
D = \{\mathbf{x} \in R^3 \mid \quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= 3, \\ \mathbf{x} \geq 0 & \quad \}. \end{aligned}
$$

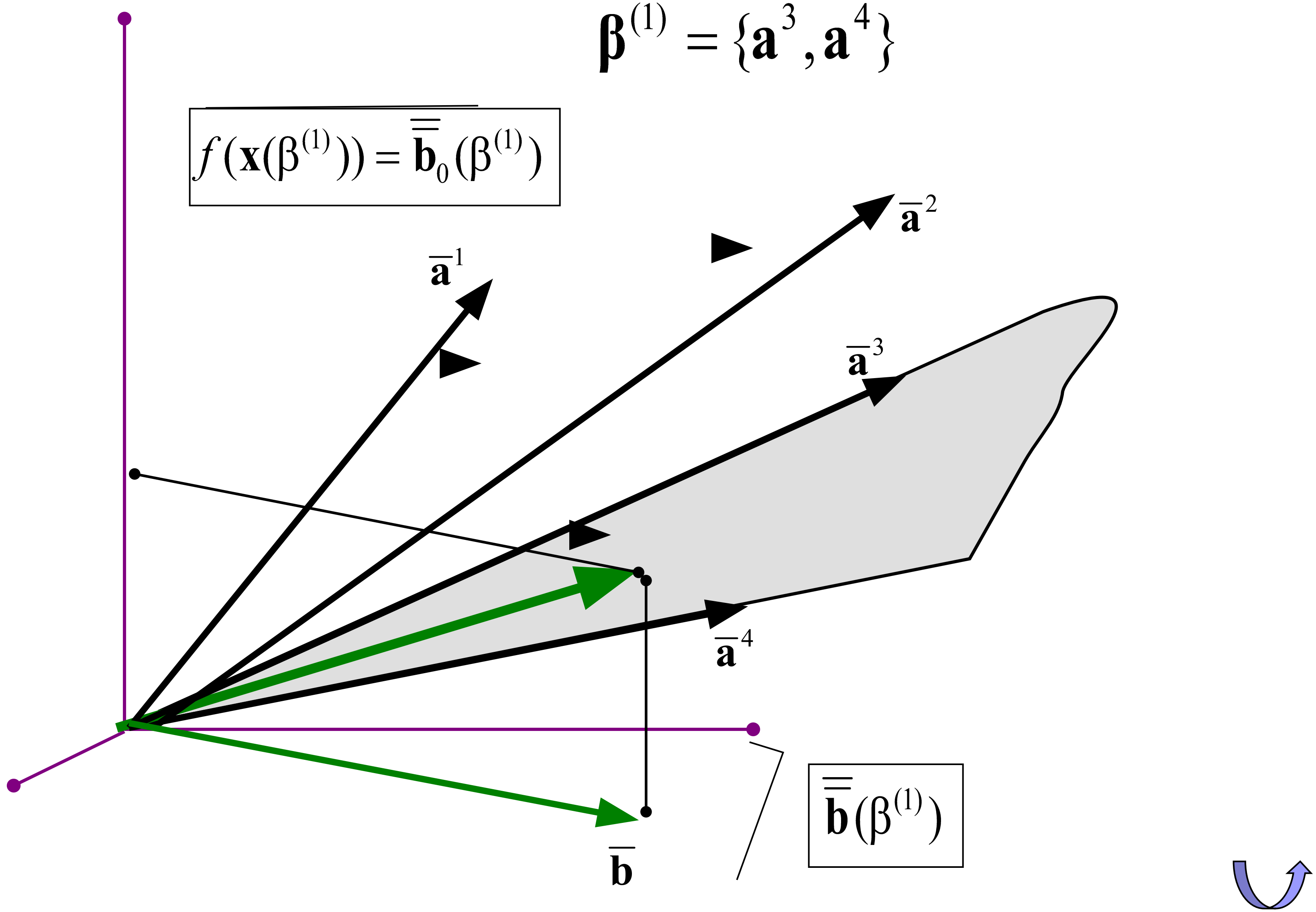
Симплекс-метод, историческая справка

Леонид Витальевич
Канторович
(1912–1986), 1939

Джордж Данциг
(1914–2005), 1947

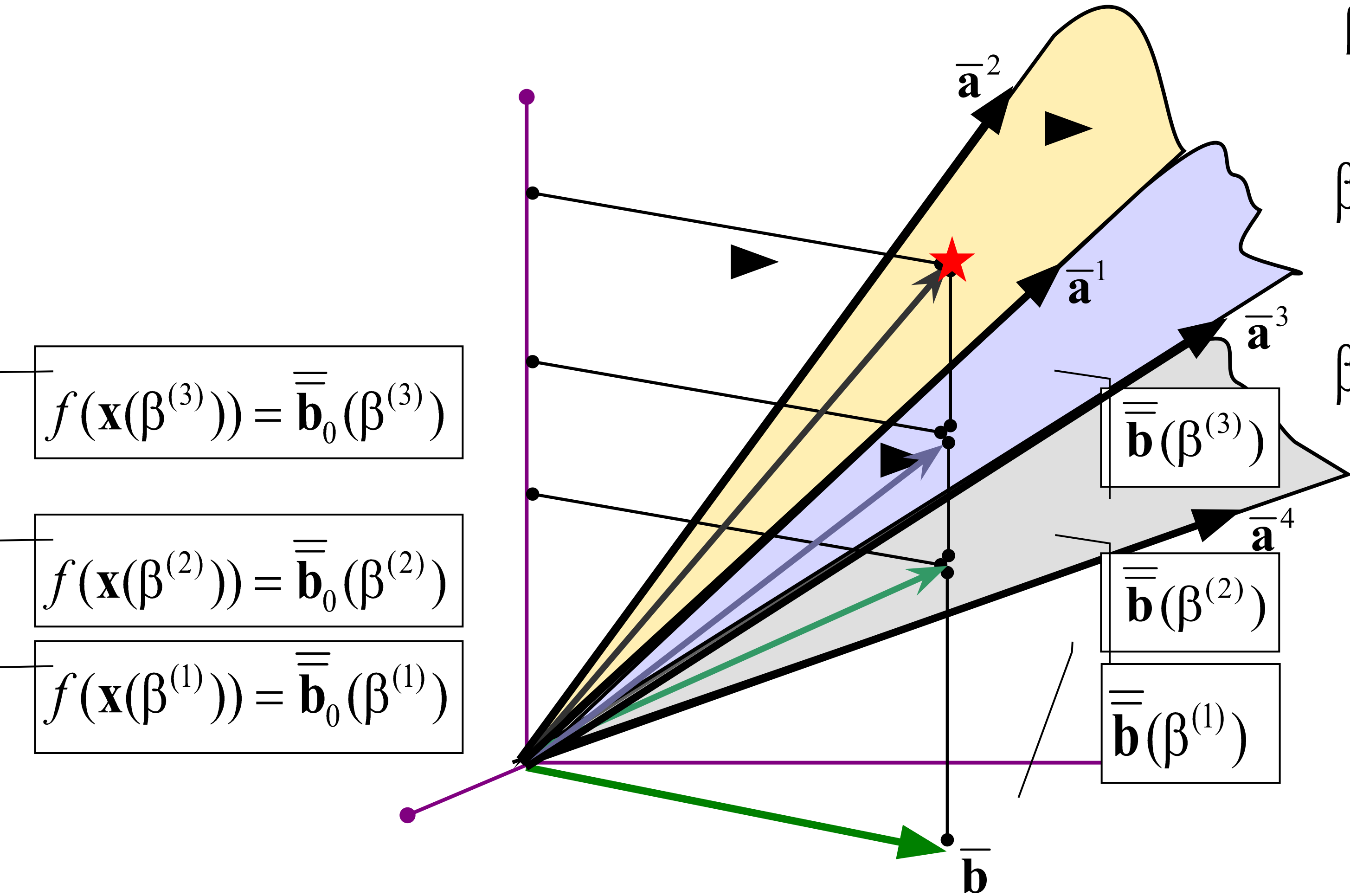
Симплекс-метод, геометр. интерпретация 1

$$\boldsymbol{\beta}^{(1)} = \{\mathbf{a}^3, \mathbf{a}^4\}$$



Симплекс-метод, геометр. интерпретация 2

Симплекс-метод, геометр. интерпретация 3



$$\boldsymbol{\beta}^{(1)} = \{\mathbf{a}^3, \mathbf{a}^4\}$$

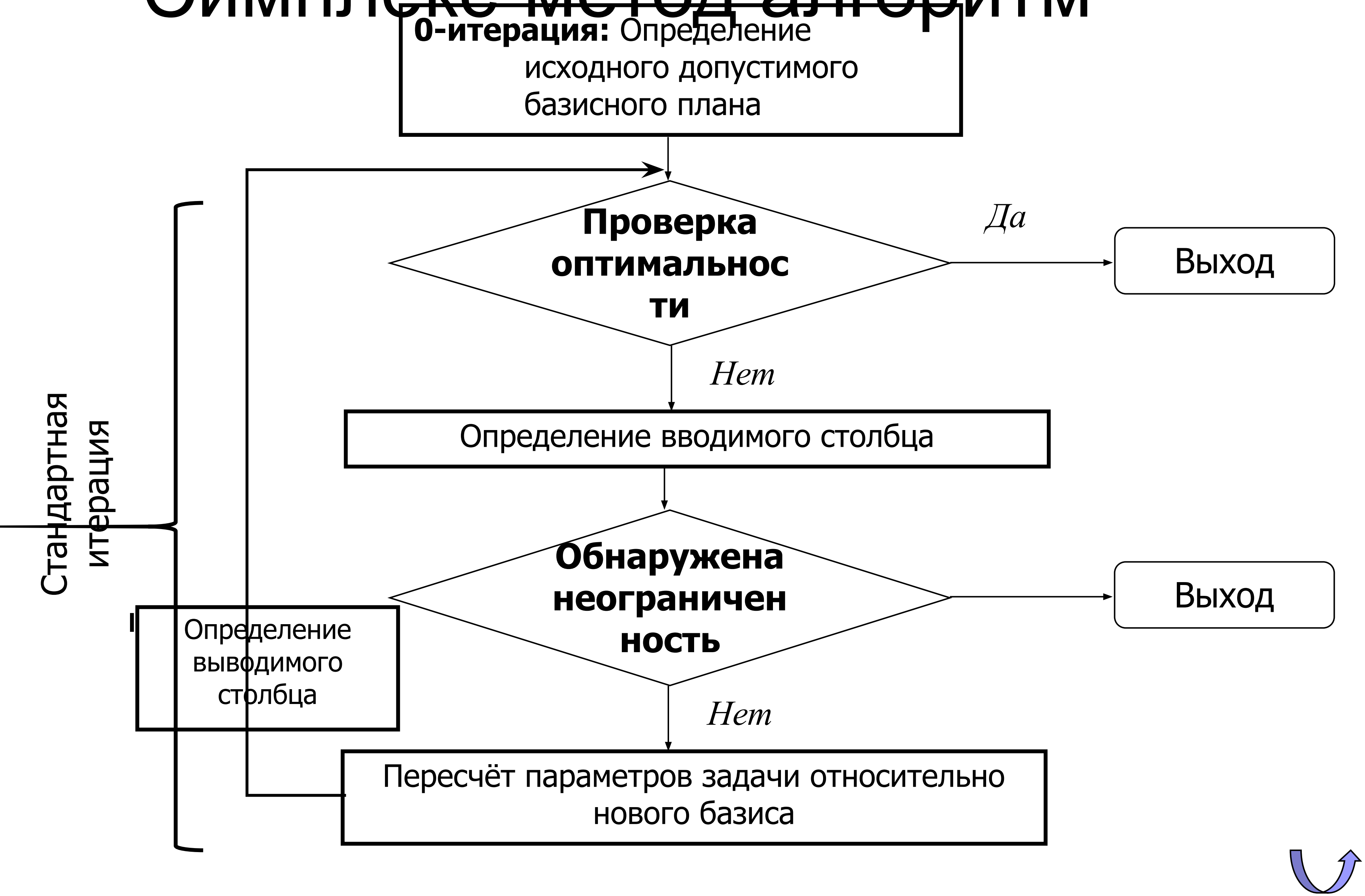
$$\Downarrow$$

$$\beta^{(2)} = \{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^3\}$$

$$\Downarrow$$

$$\beta^{(3)} = \{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2\}$$

Симплекс-метод алгоритм



Симплекс-метод критерий оптимальности

☝ *план является оптимальным, если для всех* $j \in 1..n$

$a_{0j}(\beta^{(q)}) \geq 0,$ *и неоптимальным в противном случае,*

т.е. если существует такое $l \in \{1..n\}$, *что* $a_{0l}(\beta^{(q)}) < 0.$

Значения $a_{0j}(\beta^{(q)})$ также называют *оценками столбцов матрицы* **A** относительно текущего базиса или *симплекс-разностями*.

Симплекс-метод
определение выводимого столбца

- *для столбца* $\mathbf{a}^l$*, претендующего на ввод в базис, и вектора ограничений* $\mathbf{b}$ *рассматриваются отношения*

Таким образом, если базис на q-й итерации включал столбцы с номерами

$$\lambda_i \equiv \frac{b_i(\beta^{(q)})}{a_{il}(\beta^{(q)})}, \text{ где } i \in \{1..m \mid a_{il}(\beta^{(q)}) > 0\},$$

$$N(\beta^{(q)}) = \{j_1, j_2, \ldots, j_{r-1}, j_r, j_{r+1}, \ldots, j_m\},$$

то базис на итерации $q+1$ будет состоять из столбцов с номерами:

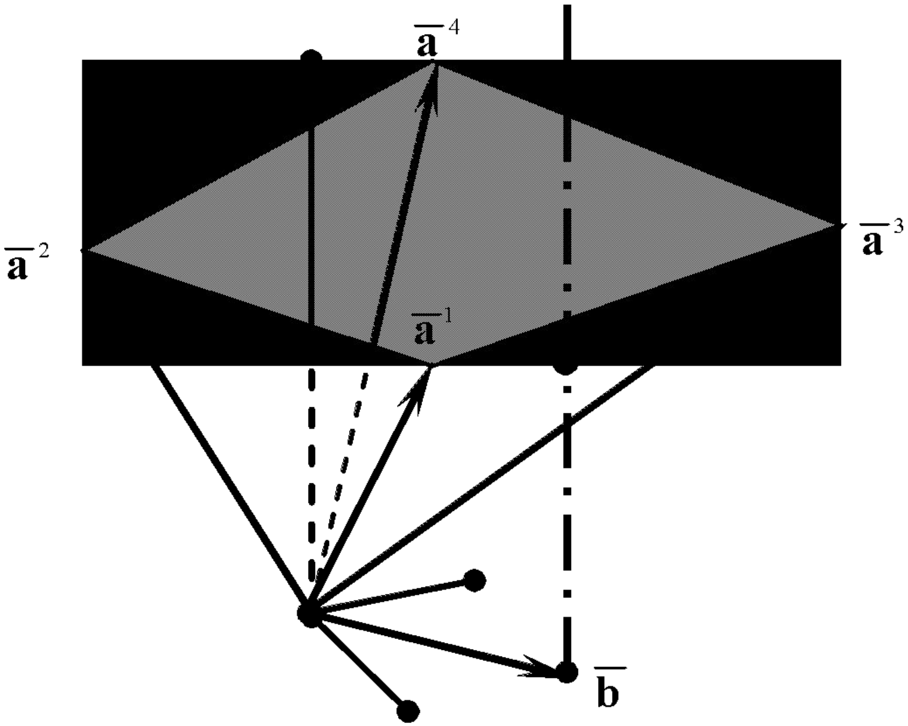
и определяется такая строка r*, что*

$$N(\beta^{(q+1)}) = \{j_1, j_2, \ldots, j_{r-1}, l, j_{r+1}, \ldots, j_m\}.$$

$$\lambda_r = \min_{i \in \{1..m \mid a_{il}(\beta^{(q)}) > 0\}} \{\lambda_i\}.$$

Полученный индекс r *определяет номер столбца в* $N(\beta^{(q)})$*, выводимого из базиса, а именно,* $j_r = N_r(\beta^{(q)})$.

Симплекс-метод, неограниченность



$$\exists l: \quad a_{0l}(\beta^{(q)})<0$$

$$\mathbf{a}^l(\beta^{(q)}) \leq 0$$

Симплекс-метод, симплекс-таблица

Номера базисных столбцов

Значение цел. функции на текущем плане

Строка «оценок»

$$T^{(q)} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & b_0(\beta^{(q)}) & \mathbf{a}_0(\beta^{(q)}) & \\ \hline N(\beta^{(q)}) & \mathbf{b}(\beta^{(q)}) & \mathbf{A}(\beta^{(q)}) & \lambda^{(q)} \\ \hline \end{array}$$

Столбец ограничений в текущем базисе

Матрица задачи в текущем базисе

Значения λ, рассч.при определен. выводимого столбца

Симплекс-метод, приме

Исходный допустимый базис

$$
\begin{array}{lllll}
4x_1 & +3x_2 & & & \to \max, \\
7x_1 & +5x_2 & +x_3 & & = 35, \\
x_1 & +2x_2 & & +x_4 & = 8,
\end{array}
$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0.$$

$$
\overline{\Delta}(\beta^{(1)}) = \left[\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \quad \Rightarrow \quad \overline{\Delta}^{-1}(\beta^{(1)}) = \left[\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right],
$$

Симплекс-метод, пример (1)

$$\bar{\mathbf{A}}(\beta^{(1)}) = (\Delta^{(1)})^{-1} \cdot \bar{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \times \left[\begin{array}{cccc} 4 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 7 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc} -4 & -3 & 0 & 0 \\ \hline 7 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\bar{\mathbf{b}}(\beta^{(1)}) = (\Delta^{(1)})^{-1} \cdot \bar{\mathbf{b}} = \left[\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \times \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline 35 \\ 8 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline 35 \\ 8 \end{array}\right]$$

	$b_0(\beta^{(q)})$	$\mathbf{a}_0(\beta^{(q)})$			
	0	−4	−3	0	0
$\mathbf{N}(\beta^{(q)})$	$\mathbf{b}(\beta^{(q)})$	$\mathbf{A}(\beta^{(q)})$			
3	35	7	5	1	0
4	8	1	2	0	1

Симплекс-метод, пример (2)

Разрешающий элемент

$$\mathbf{a}_0(\beta^{(1)}) + \frac{4}{7}\cdot\mathbf{a}_1(\beta^{(1)})$$

:7

$$\mathbf{a}_2(\beta^{(1)}) - \frac{1}{7}\mathbf{a}_1(\beta^{(1)})$$

$T^{(1)} =$

	0	−4	−3	0	0	
3	35	7	5	1	0	5
4	8	1	2	0	1	

35:7=5

8:1=8

Разрешающий элемент

5:5/7=7

$T^{(2)} =$

	20	0	−1/7	4/7	0	
1	5	1	5/7	1/7	0	7
4	3	0	9/7	−1/7	1	7/3

3:9/7=7/3

Симплекс-метод, пример (3)

План оптимальный !!!

$$T^{(3)} =$$

	61/3	0	0	5/9	1/9
1	10/3	1	0	2/9	–5/9
2	7/3	0	1	–1/9	7/9

$$\mathbf{x}^* = (\frac{10}{3}, \frac{7}{3}, 0, 0),$$

$$f^* = f(\mathbf{x}^*) = \frac{61}{3} = 20\frac{1}{3}.$$

Симплекс-метод, метод минимизации невязок

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{x}) &= c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n \to \max,\\
D = \{\mathbf{x} \in R^n \mid\ & a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1,\\
& \vdots\\
& a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n = b_m,\\
& x_1 \ge 0, \cdots, x_n \ge 0\ \}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}(\mathbf{x}) &= 0 \cdot x_1 + \cdots + 0 \cdot x_n - 1 \cdot x_{n+1} - \cdots - 1 \cdot x_{n+m} \to \max,\\
\tilde{D} = \{\mathbf{x} \in R^{n+m} \mid\ & a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n + 1 \cdot x_{n+1} + \cdots + 0 \cdot x_{n+m} = b_1,\\
& \vdots\\
& a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n + 0 \cdot x_{n+1} + \cdots + 1 \cdot x_{n+m} = b_m,\\
& x_1 \ge 0, \cdots, x_n \ge 0, x_{n+1} \ge 0, \cdots, x_{n+m} \ge 0\ \}.
\end{aligned}
$$

Обоснование симплекс-метода T1/1

Теорема 1. Если для плана $\mathbf{x}^*(\beta)$ выполняется условие $\mathbf{a}_0(\beta) \geq 0$, то данный план является оптимальным.

Рассмотрим произвольный план задачи $\mathbf{x} \in D$. Из допустимости $\mathbf{x}$ следует

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}^j x_j = \mathbf{b}.$$

Значение целевой функции задачи, достигаемое на плане $\mathbf{x}$, можно выразить как

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j.$$

При этом с учетом того, что $\forall\ j \in 1..n \quad a_{0,j}(\beta) = -c_j + \mathbf{c}(\beta) \cdot \mathbf{a}^j(\beta) \geq 0$ и, соответственно, $c_j \leq \mathbf{c}(\beta) \cdot \mathbf{a}^j(\beta)$, получаем

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{m} c_i(\beta) \cdot a_{ij}(\beta) \right] x_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\beta) \cdot x_j \right] c_i(\beta). \qquad \text{(T1.1)}$$

Обоснование симплекс-метода Т1/2

Выражения $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\beta) \cdot x_j$ представляют собой ничто иное, как «левые» части ограничений задачи, преобразованные относительно текущего базиса β, а, поскольку план $\mathbf{x}$ является допустимым, то для $\forall i$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\beta) \cdot x_j = b_i(\beta). \qquad (\text{T}1.2)$$

Подставив (Т1.1) в (Т1.2) получаем, что для произвольного $\mathbf{x} \in D$

$$f(\mathbf{x}) \le \sum_{i=1}^{m} b_i(\beta) \cdot c_i(\beta) = f(\mathbf{x}^*(\beta)),$$

что и означает оптимальность $\mathbf{x}^*(\beta)$. ✌

Обоснование симплекс-метода Т2/1

Теорема 2. В симплекс-алгоритме очередной план $\mathbf{x}(\beta^{(q+1)})$, получаемый на основе допустимого базисного плана $\mathbf{x}(\beta^{(q)})$, всегда является допустимым.

Базисный план $\mathbf{x}(\beta^{(q+1)})$, получаемый на очередной итерации $q+1$, связан с предшествующим ему планом $\mathbf{x}(\beta^{(q)})$ соотношениями

$$x_{N_i(\beta^{(q)})}(\beta^{(q+1)}) = x_{N_i(\beta^{(q)})}(\beta^{(q)}) - \lambda \cdot a_{il}(\beta^{(q)}) \quad \text{для } i = 1..m \ (j \in N(\beta^{(q)})),$$

$$x_l(\beta^{(q+1)}) = \lambda,$$

$$x_j(\beta^{(q+1)}) = 0 \qquad \text{для } j \notin \{N(\beta^{(q)}) \cup l\},$$

(T2.1)

где $x_{N_i(\beta^{(q)})}(\beta^{(q)}) = b_i(\beta^{(q)})$ для $i \in 1..m$.

Обоснование симплекс-метода   Т2/2

Тогда $\forall\lambda$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}(\beta^{(q+1)}) = \sum_{j=1}^{n}\mathbf{a}^{j}\cdot x_j(\beta^{(q+1)}) = \sum_{i=1}^{m}\mathbf{a}^{N_i(\beta^{(q)})}\cdot x_{N_i(\beta^{(q)})}(\beta^{(q+1)}) + \mathbf{a}^{l}\cdot x_l(\beta^{(q+1)}) =$$

$\sum_{i=1}^{m}\mathbf{a}^{N_i(\beta^{(q)})}\cdot b_i(\beta^{(q)}) = \mathbf{b}$ следует из допустимости плана $\mathbf{x}(\beta^{(q)})$

$$= \sum_{i=1}^{m}\mathbf{a}^{N_i(\beta^{(q)})}\cdot[b_i(\beta^{(q)}) - \lambda\cdot a_{il}(\beta^{(q)})] + \mathbf{a}^{l}\cdot\lambda =$$

$\sum_{i=1}^{m}\mathbf{a}^{N_i(\beta^{(q)})}\cdot a_{il}(\beta^{(q)}) = \mathbf{a}^{l}$ так как вектора $\mathbf{a}^{N_i(\beta^{(q)})}$ $(i\in 1..m)$ являются единичными в базисе $\beta^{(q)}$

$$= \sum_{i=1}^{m}\mathbf{a}^{N_i(\beta^{(q)})}\cdot b_i(\beta^{(q)}) - \lambda\sum_{i=1}^{m}\mathbf{a}^{N_i(\beta^{(q)})}\cdot a_{il}(\beta^{(q)}) + \mathbf{a}^{l}\cdot\lambda =$$

$$= \mathbf{b} - \lambda\mathbf{a}^{l} + \lambda\mathbf{a}^{l} = \mathbf{b}.$$

?

?

Обоснование симплекс-метода Т2/3

Таким образом, при формировании $\mathbf{x}(\beta^{(q+1)})$ согласно правилам (**Т2.1**) при $\forall\lambda$ он будет удовлетворять первой группе ограничений КЗЛП $(\mathbf{Ax}=\mathbf{b})$.

Если λ выбирается согласно правилам определения выводимого столбца: $\lambda=\lambda_r$ для $i\in\{1..m\,|\,a_{il}(\beta^{(q)})\le 0\}$ в силу неотрицательности λ_r имеем

$$x_{N_i(\beta^{(q)})}(\beta^{(q+1)})=x_{N_i(\beta^{(q)})}(\beta^{(q)})-\lambda\cdot a_{il}(\beta^{(q)})\ge 0.$$

Для $i\in\{1..m\,|\,a_{il}(\beta^{(q)})>0\}$ также будет выполняться условие

$$x_{N_i(\beta^{(q)})}(\beta^{(q+1)})=b_i(\beta^{(q)})-\lambda_r\cdot a_{il}(\beta^{(q)})=$$

$$=b_i(\beta^{(q)})-\min_{i:a_{il}(\beta^{(q)})>0}\{\frac{b_i(\beta^{(q)})}{a_{il}(\beta^{(q)})}\}\cdot a_{il}(\beta^{(q)})\ge 0.$$

Остальные компоненты $\mathbf{x}(\beta^{(q+1)})$ $(j\notin N(\beta^{(q)}))$ — неотрицательны по определению, т.е. план $\mathbf{x}(\beta^{(q+1)})\ge 0,$ что и означает его допустимость. ✌

Обоснование симплекс-метода   Т3/1

Теорема 3. В случае невырожденности ЗЛП при переходе к очередному базисному плану $\mathbf{x}(\beta^{(q+1)})$ происходит «улучшение» (возрастание) значения целевой функции: $f(\mathbf{x}(\beta^{(q+1)})) > f(\mathbf{x}(\beta^{(q)}))$.

С учетом (**Т2.1**) значение целевой функции в $\mathbf{x}(\beta^{(q+1)})$ может быть представлено как

$$f(\mathbf{x}(\beta^{(q+1)})) = \sum_{i=1}^{m} c_{N_i(\beta^{(q)})}\cdot x_{N_i(\beta^{(q)})}(\beta^{(q+1)}) + c_l\cdot x_l(\beta^{(q+1)}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_{N_i(\beta^{(q)})}\cdot[b_i(\beta^{(q)}) - \lambda_r\cdot a_{il}(\beta^{(q)})] + c_l\cdot\lambda_r =$$

$$= \sum_{i=1} c_{N_i(\beta^{(q)})}\cdot b_i(\beta^{(q)}) - \lambda_r\cdot\left[\sum_{i=1} c_{N_i(\beta^{(q)})}\cdot a_{il}(\beta^{(q)}) - c_l\right] =$$

$$= f(\mathbf{x}(\beta^{(q)})) - \lambda_r\cdot a_{0l}(\beta^{(q)}).$$

(Т3.1)

Таким образом, если $a_{0,l}(\beta^{(q)}) < 0$ (столбец l имеет отрицательную оценку), то $f(\mathbf{x}(\beta^{(q+1)})) > f(\mathbf{x}(\beta^{(q)}))$.

Обоснование симплекс-метода T4/1

Теорема 4. Если для текущего базисного плана $\mathbf{x}(\beta^{(q)})$ существует такое l, что $a_{0,l}(\beta^{(q)}) < 0$ и $\mathbf{a}^l(\beta^{(q)}) \le 0$, то целевая функция задачи не ограничена сверху.

В ходе доказательства теоремы 2 было показано, что базисный план $\mathbf{x}(\beta^{(q+1)})$, получаемый на очередной итерации $q+1$, если $\mathbf{a}^l(\beta^{(q)}) \le 0$, при любом $\lambda > 0$ всегда является допустимым.

Используя (**T3.1**), значение целевой функции для плана $\mathbf{x}(\beta^{(q+1)})$ можно выразить как

$$f(\mathbf{x}(\beta^{(q+1)})) = f(\mathbf{x}(\beta^{(q)})) - \lambda \cdot a_{0l}(\beta^{(q)}).$$

Тогда, с учетом того, что $a_{0l}(\beta^{(q)}) < 0$, устремив $\lambda \to +\infty$, мы получаем неограниченное возрастание целевой функции на множестве допустимых планов. ✌

Сходимость симплекс-метода и проблема вырожденности 1

Рассмотрим пример

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{x}) = \quad & x_1 + x_2 \to \max, \\
D = \{\mathbf{x} \in R^2 \mid \quad & x_1 + 2x_2 \le 8, \\
& 3x_1 + 2x_2 \le 12, \\
& 3x_1 - x_2 \le 3, \\
& \mathbf{x} \ge 0\}.
\end{aligned}
$$

Сходимость симплекс-метода и проблема вырожденности 2

$T^{(1)} =$

	0	-1	-1	0	0	0	
3	8	1	2	1	0	0	8
4	12	3	2	0	1	0	4
5	3	$\boxed{3}$	-1	0	0	1	1

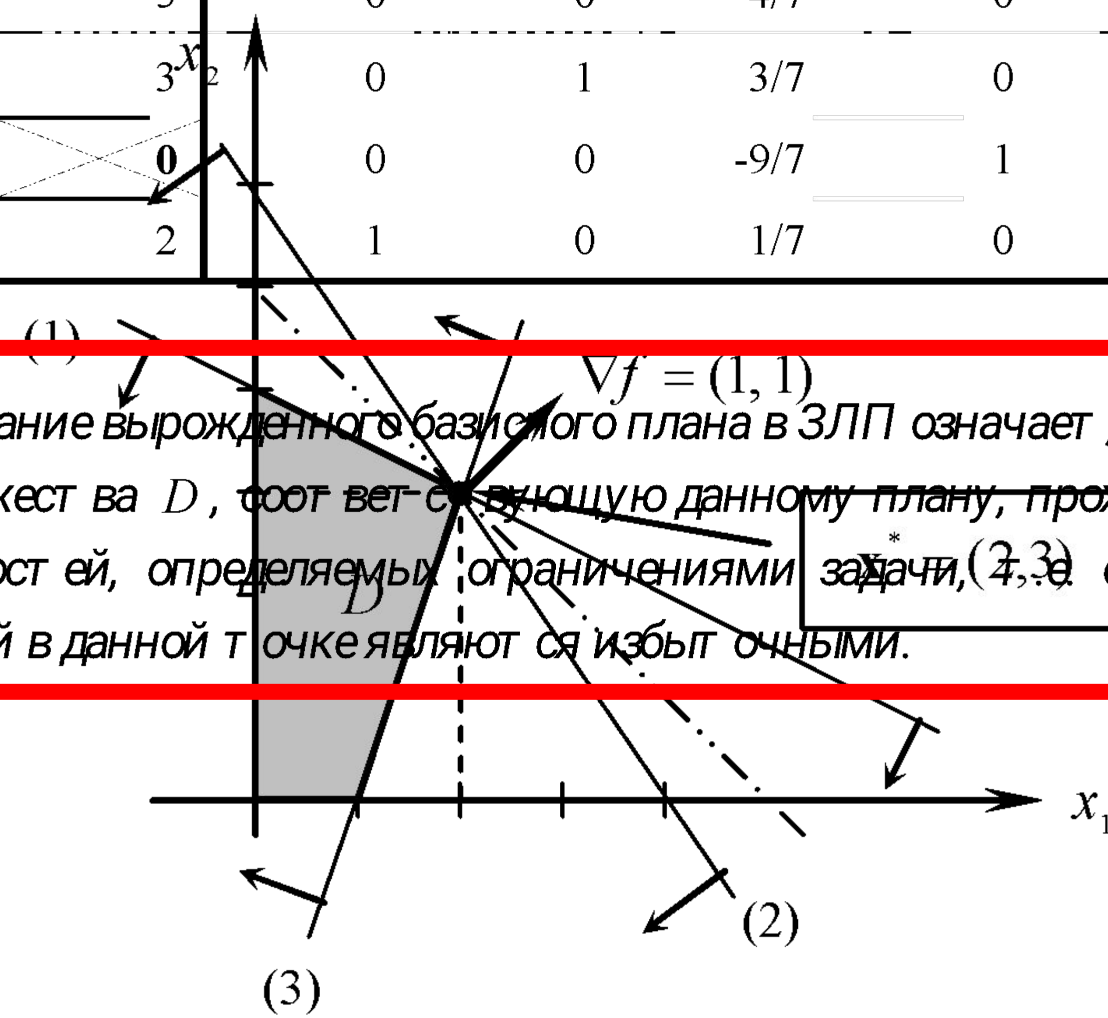
$T^{(2)} =$

	1	0	-4/3	0	0	1/3	
3	7	0	$\boxed{7/3}$	1	0	-1/3	**3**
4	9	0	3	0	1	-1	**3**
1	1	1	-1/3	0	0	1/3	—

Сходимость симплекс-метода и проблема вырожденности 3

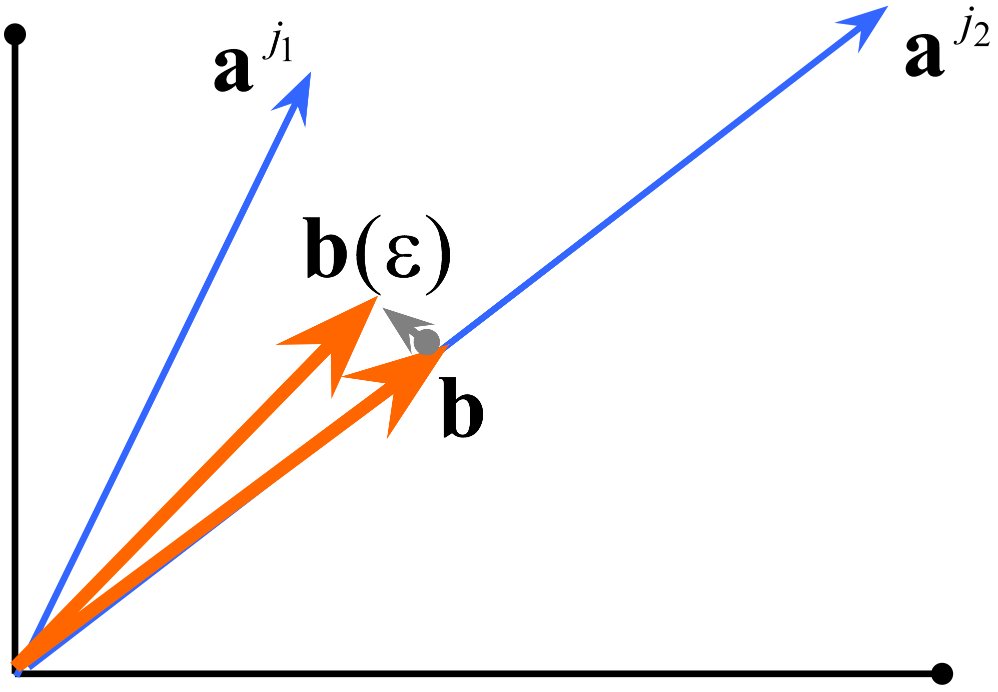
$$T^{(3)} =$$

	3	0	0	4/7	0	1/7
2	3	0	1	3/7	0	-1/7
4	**0**	0	0	-9/7	1	-4/7
1	2	1	0	1/7	0	2/7



☝ существование вырожденного базисного плана в ЗЛП означает, что через угловую точку множества D, соответствующую данному плану, проходит более чем m гиперплоскостей, определяемых ограничениями задачи, т.е. одно или несколько ограничений в данной точке являются избыточными.

Сходимость симплекс-метода и проблема вырожденности 4



Сходимость симплекс-метода и проблема вырожденности 5

(☝) Базовая идея: переход к «возмущённой» задаче

$$(D, f) \Rightarrow (D(\varepsilon), f)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}^j x_j = \mathbf{b} + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}^j \varepsilon^{\wedge j} = \mathbf{b}(\varepsilon) \qquad \textbf{(B.1)}$$

где ε — некоторый достаточно малый положительный параметр

($\varepsilon^{\wedge j}$ — j -я степень числа ε)

Сходимость симплекс-метода и проблема вырожденности 6

(☝) Теорема Чарнса

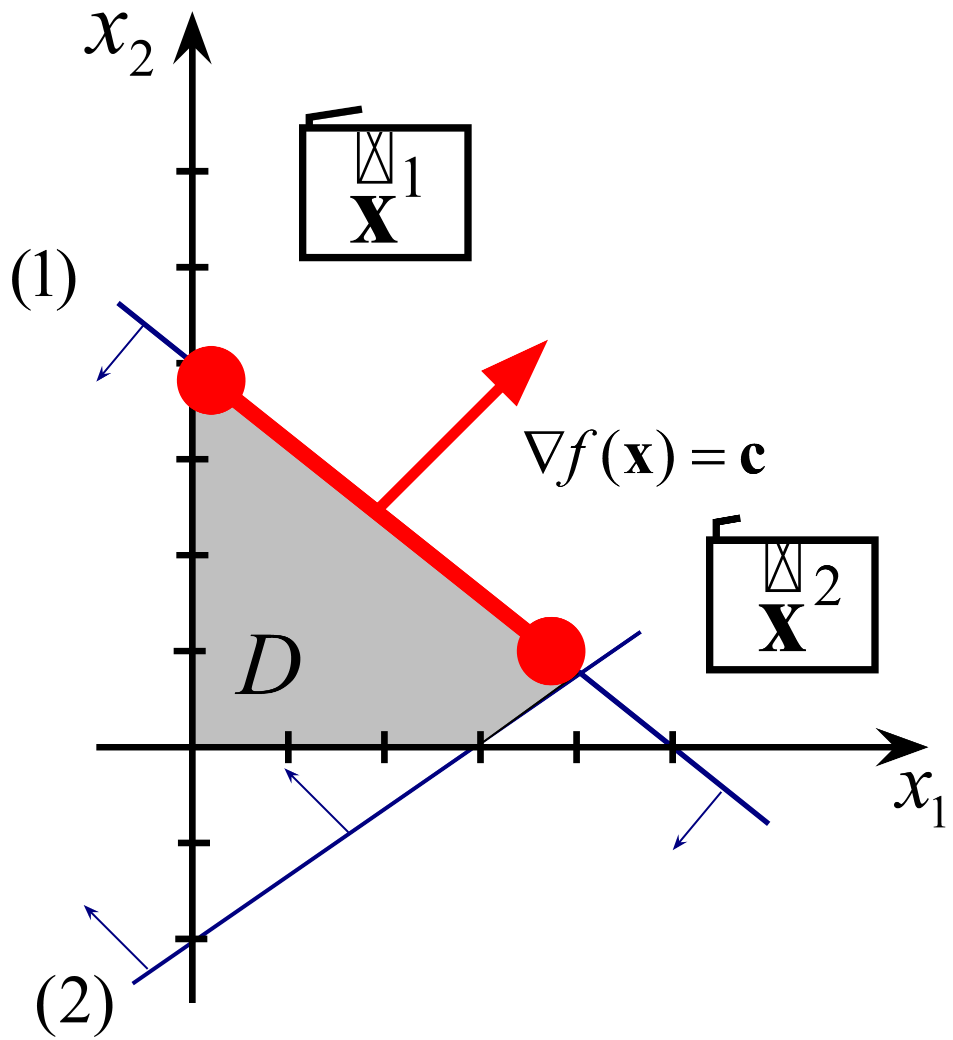
существует такое $\varepsilon' > 0$, что для $\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon'[$ задача $(D(\varepsilon), f)$, полученная в результате преобразования (B.1), будет невырожденной;
существует такое $\varepsilon'' > 0$, что для $\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon''[$ из допустимости базиса в задаче $(D(\varepsilon), f)$ будет следовать его допустимость в исходной задаче (а из оптимальности — оптимальность).

Альтернативные оптимальные планы 1

Рассмотрим пример

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{x}) = \quad & 8x_1 + 10x_2 \to \max, \\
D = \{\mathbf{x} \in R^2 \mid \quad & 4x_1 + 5x_2 \le 20, \\
& 2x_1 - 3x_2, \le 6, \\
& \mathbf{x} \ge 0\}.
\end{aligned}
$$

Альтернативные оптимальные планы 2



$\mathbf{x}^1 = (0, 4)$

$\mathbf{x}^2 = (45/11, 8/11)$

Альтернативные оптимальные планы 3

$$\mathbf{x}^* = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \mathbf{x}^i, \text{ где } \lambda_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{s} \lambda_i = 1$$

$T^{(1)} =$

	0	-8	-10	0	0	
3	20	4	5	1	0	4
4	6	2	-3	0	1	

$T^{(2)} =$

	40	0	0	2	0
2	4	4/5	1	1/5	0
4	18	22/5	0	3/5	1

$\hat{\mathbf{x}}^1$

$T^{(3)} =$

	40	0	0	2	0
2	8/11	0	1	1/11	-2/11
1	45/11	1	0	3/22	5/22

$\hat{\mathbf{x}}^2$

$$\mathbf{x}^* = \lambda \hat{\mathbf{x}}^1 + (1-\lambda)\hat{\mathbf{x}}^2 = \begin{pmatrix} -45/11 \cdot \lambda + 45/11 \\ 36/11 \cdot \lambda + 8/11 \end{pmatrix}$$

Модифицированный симплекс-метод 1

$$\beta^{(q)} \to \beta^{(q+1)}$$

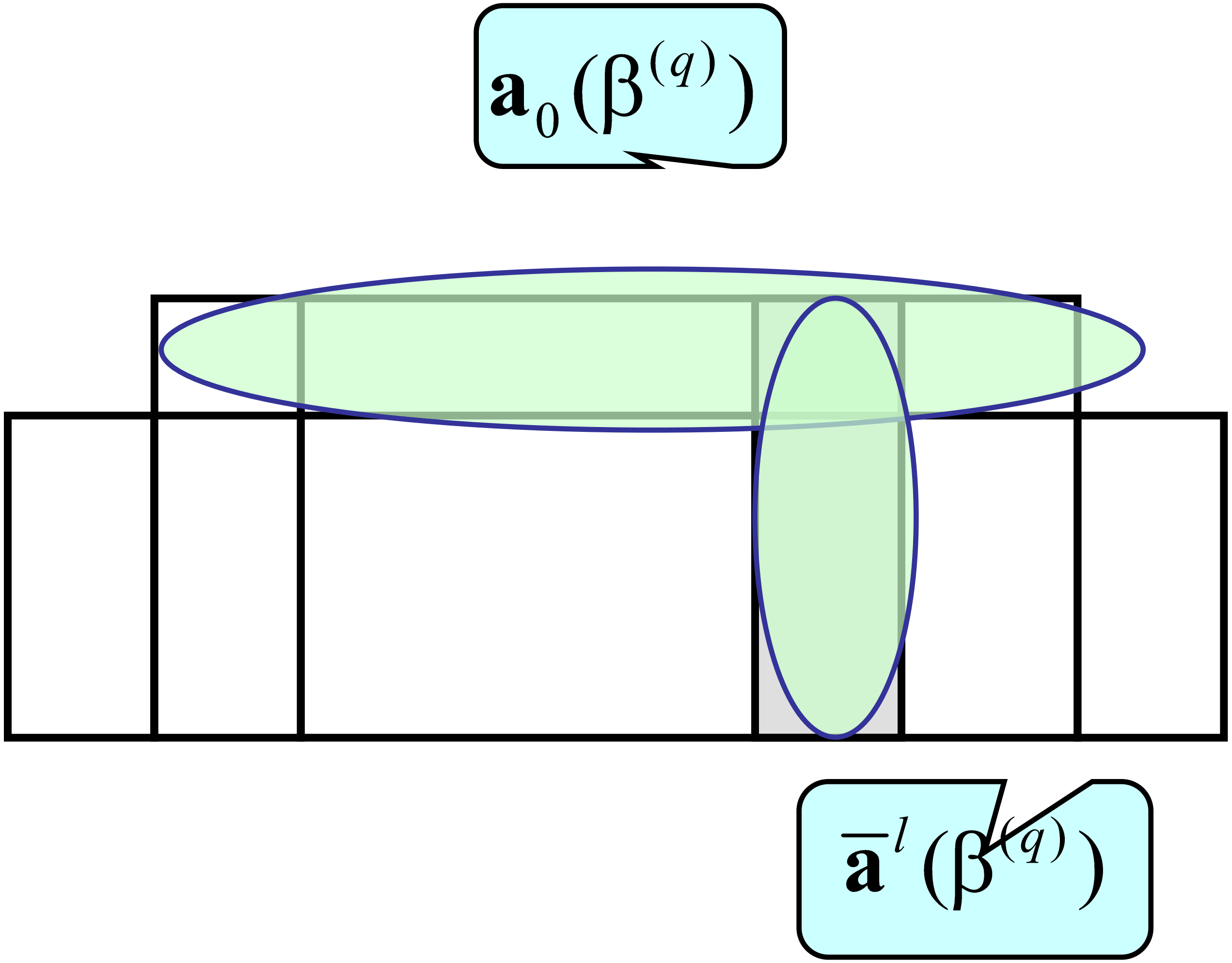
$$\overline{\mathbf{A}}(\beta^{(q)}) \to \overline{\mathbf{A}}(\beta^{(q+1)})$$

$$\overline{\mathbf{A}}(\beta^{(q)}) = \overline{\Delta}^{-1}(\beta^{(q)}) \cdot \overline{\mathbf{A}}$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{\Delta}^{-1}(\beta^{(q)}) \to \overline{\Delta}^{-1}(\beta^{(q+1)})$$

Модифицированный симплекс-метод 2



Модифицированный симплекс-метод, пример 1

$$4x_1 + 3x_2 \to \max,$$
$$7x_1 + 5x_2 + x_3 = 35,$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 8,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0.$$

$$\overline{\Delta}(\beta^{(1)}) = \overline{\Delta}^{-1}(\beta^{(1)}) = \left[\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$\delta_0(\beta^{(1)})$, $\delta_0(\beta^{(q)})$, $\mathbf{A}$

-1	0	0	4	3	0	0	
			7	5	1	0	
			1	2	0	1	
			-4	0	0	0	

$\mathbf{a}_0(\beta^{(1)})$, $\mathbf{a}_0(\beta^{(q)})$, $b_0(\beta^{(q)})$

	0	-1	0	0	4	-4	
3	35	0	1	0	7		5
4	8	0	0	1	1		8

$N(\beta^{(q)})$, $\mathbf{b}(\beta^{(q)})$, $\overline{\Delta}^{-1}(\beta^{(q)})$, $\overline{\mathbf{a}}^l$, $\overline{\mathbf{a}}^l(\beta^{(q)})$, $\lambda^{(q)}$

Модифицированный симплекс-метод, пример 2

$T_1 =$

–1	0	0	4	3	0	0
–1	4/7	0	7	5	1	0
–1	5/9	1/9	1	2	0	1
			–4	–3	0	0
			0	–1/7	4/7	0
			0	0	5/9	1/9

Модифицированный симплекс-метод, пример 3

$T_2^{(2)} =$

	20	–1	4/7	0	3	–1/7	
1	5	0	1/7	0	5	5/7	7
4	3	0	–1/7	1	2	9/7	7/3

$T_2^{(3)} =$

	61/3	–1	5/9	1/9			
1	10/3	0	2/9	–5/9			
2	7/3	0	–1/9	7/9			

Модифицированный симплекс-метод, мультипликативная форма 3

$$\Delta^{-1}(\beta^{(q+1)}) = \mathbf{E}^{(q)} \cdot \Delta^{-1}(\beta^{(q)})$$

r-й столбец:

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{a_{1l}(\beta^{(q)})}{a_{rl}(\beta^{(q)})} \\ -\dfrac{a_{2l}(\beta^{(q)})}{a_{rl}(\beta^{(q)})} \\ \vdots \\ \dfrac{1}{a_{rl}(\beta^{(q)})} \\ \vdots \\ -\dfrac{a_{ml}(\beta^{(q)})}{a_{rl}(\beta^{(q)})} \end{bmatrix}$$

Мультипликативная форма

$$\cdot\Delta^{-1}(\beta^{(q)}) = \mathbf{E}^{(q-1)} \cdot \mathbf{E}^{(q-2)} \cdot \cdots \cdot \mathbf{E}^{(1)} \cdot \Delta^{-1}(\beta^{(1)})$$