

Математические методы исследования операций

глава 2.

Линейное программирование

(часть **1**)

Курс для студентов
экономико-математических
специальностей

Линейное программирование 1

- ❖ **Определение задачи ЛП**
- ❖ **КЗЛП и построение канонической формы**
- ❖ **Первая геометрическая интерпретация и графический метод решения**
- ❖ **Основные теоремы ЛП**
- ❖ **Вторая геометрическая интерпретация и базисные планы**
- ❖ **Теоремы о базисных планах**

Линейное программирование 2

- ❖ **Симплекс-метод, алгоритм**
- ❖ **Симплекс-метод, обоснование**
- ❖ **Метод минимизации невязок**
- ❖ **Проблема вырожденности**
- ❖ **Альтернативные оптимальные планы**
- ❖ **Модифицированный симплекс-метод**

Общая задача линейного программирования

Общая задача линейного программирования (ОЗЛП)

$$f(\mathbf{x}) = c_1 x_1 + c_2 x_2 \quad \boxtimes \quad + c_l x_l + c_{l+1} x_{l+1} \quad \boxtimes \quad + c_n x_n \rightarrow \max$$

$$a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 \quad \boxtimes \quad + a_{1,l} x_l + a_{1,l+1} x_{l+1} \quad \boxtimes \quad + a_{1,n} x_n \leq b_1,$$

$$a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 \quad \boxtimes \quad + a_{2,l} x_l + a_{2,l+1} x_{l+1} \quad \boxtimes \quad + a_{2,n} x_n \leq b_2,$$

$$\boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes$$

$$a_{r,1} x_1 + a_{r,2} x_2 \quad \boxtimes \quad + a_{r,l} x_l + a_{r,l+1} x_{l+1} \quad \boxtimes \quad + a_{r,n} x_n \leq b_r,$$

$$a_{r+1,1} x_1 + a_{r+1,2} x_2 \quad \boxtimes \quad + a_{r+1,l} x_l + a_{r+1,l+1} x_{l+1} \quad \boxtimes \quad + a_{r+1,n} x_n = b_{r+1},$$

$$\boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes$$

$$a_{m,1} x_1 + a_{m,2} x_2 \quad \boxtimes \quad + a_{m,l} x_l + a_{m,l+1} x_{l+1} \quad \boxtimes \quad + a_{m,n} x_n = b_m,$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad \boxtimes \quad x_l \geq 0.$$



Каноническая задача линейного программирования 2

Каноническая задача линейного программирования (ОЗЛП)

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}\mathbf{x} \rightarrow \max, D = \{\mathbf{x} \in R^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}.$$



Построение канонической формы 1

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}\mathbf{x} \rightarrow \max, D = \{\mathbf{x} \in R^n \mid \begin{array}{ll} a_i x_i \leq b_i, & i \in I_n; \\ a_i x_i = b_i, & i \in I_e; \\ x_j \geq 0, & j \in J \} \end{array}$$



Построение канонической формы 2

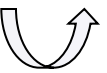
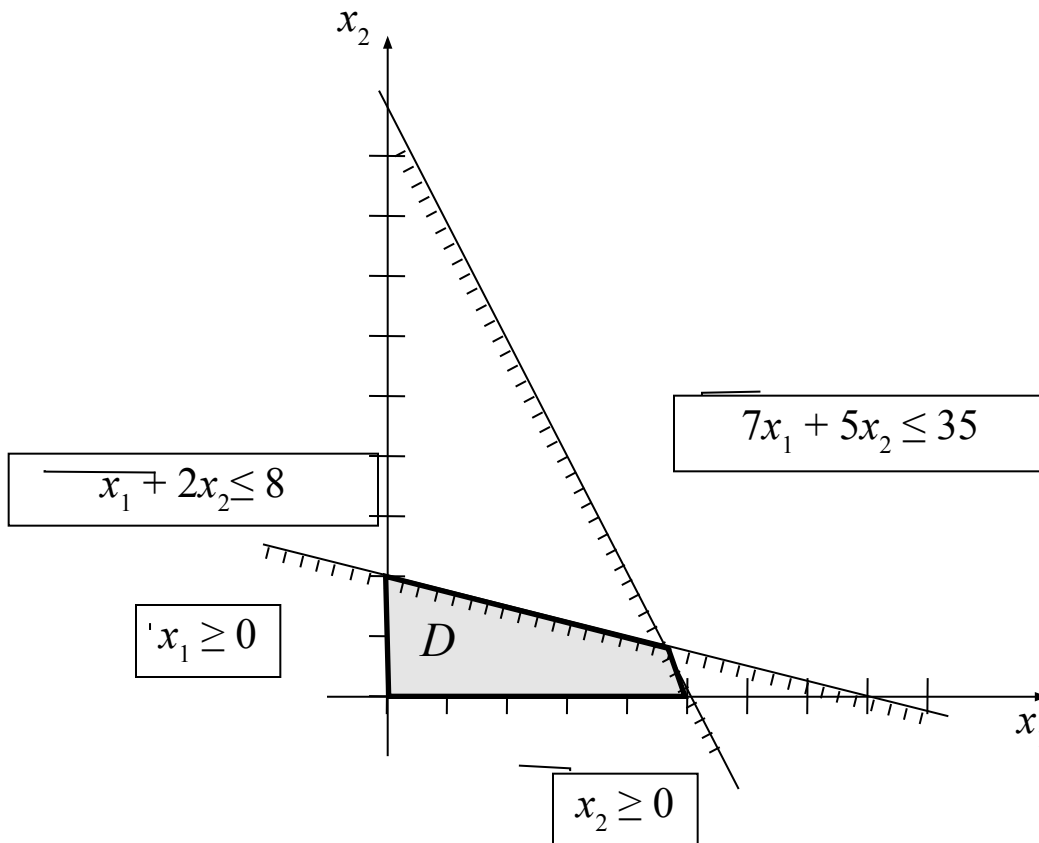
- ограничения, имеющие форму неравенств ($i \in I_n$), преобразуются в уравнения за счет добавления фиктивных неотрицательных переменных y_{n+i} ($i \in I_n$), которые одновременно входят в целевую функцию с коэффициентом 0, т.е. не оказывают влияния на ее значение;
- переменные ОЗЛП, на которые *наложено условие неотрицательности* ($j \in J$), формально (без каких-либо изменений) трансформируются в соответствующие переменные канонической формы: $y_j = x_j$;
- переменные, на которые не наложено условие неотрицательности ($j \notin J$), представляются в виде разности двух новых неотрицательных переменных y_j^+ и y_j^- , где, таких что:

$$x_j = y_j^+ - y_j^-.$$



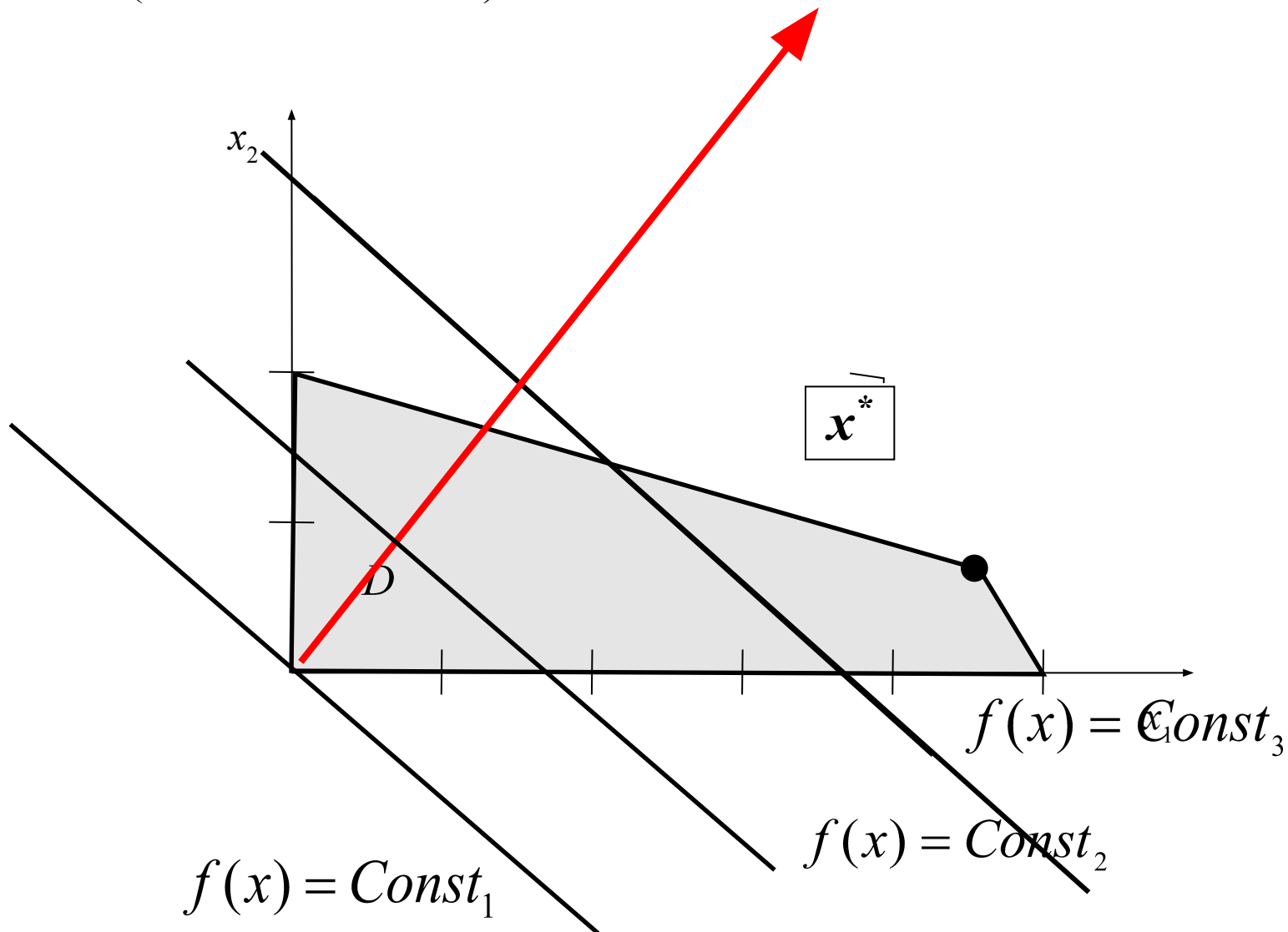
Первая геометрическая интерпретация ЗЛП

Рассмотрим задачу-базовый пример



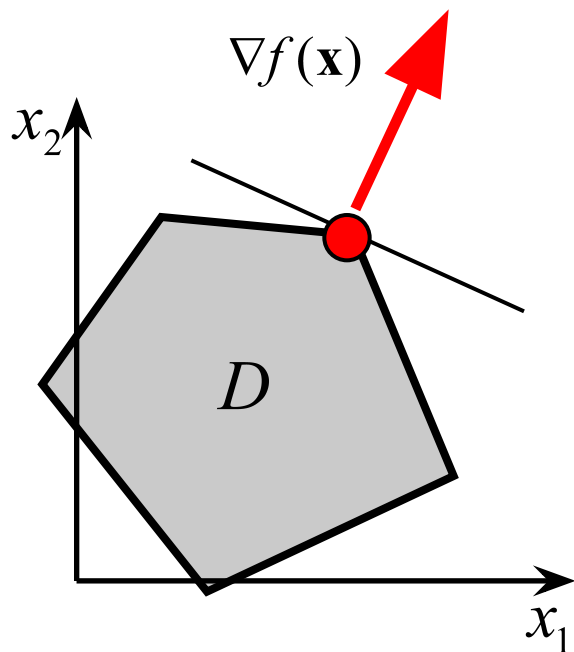
Графический метод решения ЗЛП 1

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right) = (c_1, c_2, \dots, c_n) = \mathbf{c}$$



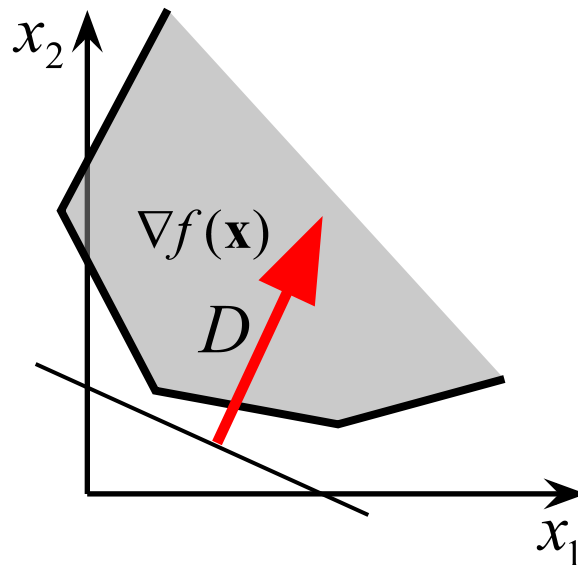
Принципиальные ситуации, возможные при решении задачи линейного программирования

Решение достигается в угловой точке



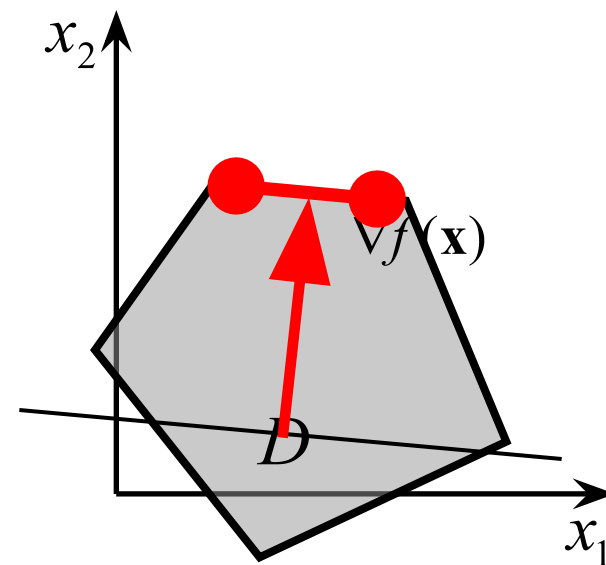
(a)

Целевая функция не ограничена



(b)

Бесконечное множество решений



(c)

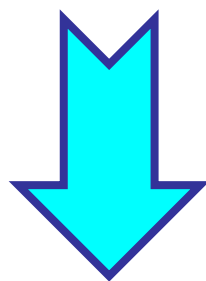


Графический метод решения ЗЛП 2

Рассмотрим задачу

$$f(\mathbf{x}) \rightarrow \max, D = \{\mathbf{x} \in R^n \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b}; x_j \geq 0, j \in J\},$$

$$n - m \leq 2 \quad \Rightarrow \quad x_{j_1}, x_{j_2} \quad \boxtimes \quad x_j = \varphi_j(x_{j_1}, x_{j_2})$$



$$\mathbf{cx} = \sum_{j=1}^n \varphi_j(x_{j_1}, x_{j_2}) \rightarrow \max,$$

$$D = \{(x_{j_1}, x_{j_2}) \in R^2 \mid \varphi_j(x_{j_1}, x_{j_2}) \geq 0, j \in J\}$$



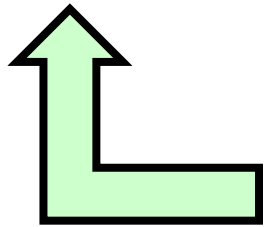
Основные теоремы ЛП 1



Теорема

Если целевая функция f принимает максимальное значение в некоторой точке множества допустимых планов D , то она принимает это значение и в некоторой угловой точке данного множества.

Доказательство

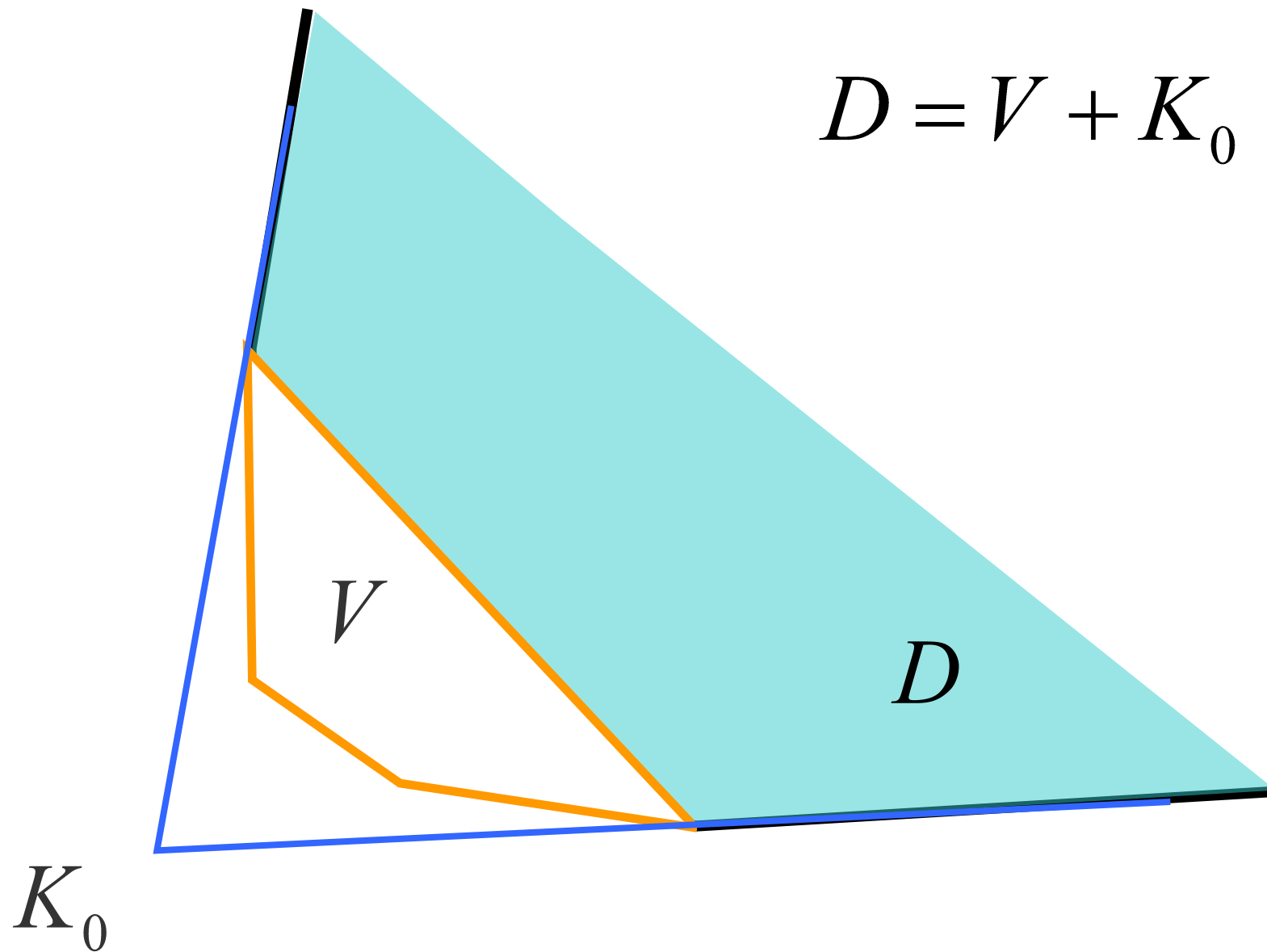


Теорема о представлении многогранного выпуклого множества

если D — многогранное выпуклое множество, то существуют такие выпуклый многогранник V и многогранный выпуклый конус K_0 с вершиной в нуле, что $D = V + K_0$.



Основные теоремы ЛП 2



Основные теоремы ЛП 3

$$\mathbf{x}^* = \arg \max_{\mathbf{x} \in D} \{f(\mathbf{x})\} : \quad \forall \mathbf{x} \in D : \mathbf{c}\mathbf{x}^* \geq \mathbf{c}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{x}^* = \sum_{k=1}^s \lambda_k \mathbf{x}^k + \sum_{l=1}^p \mu_l \mathbf{x}^l$$

$$\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^s, \mathbf{x}^k$$

- угловые точки

$$\sum_{k=1}^s \lambda_k = 1 \quad \lambda_k \geq 0, \quad k \in 1..s;$$

Основные теоремы ЛП 4

$\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^l, \mathbf{x}^p$ - направляющие вектора конуса

(!) рассуждения «от противного»

$$\exists \mu_l > 0: \quad \forall \mu \in [0, +\infty[$$

$$\mu_l \geq 0, l \in 1..p$$

$$f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{c}\mathbf{x}^* = \sum_{k=1}^s \lambda_k (\mathbf{c}\mathbf{x}^k) + \sum_{l \neq l_0} \mu_l (\mathbf{c}\mathbf{x}^l) + \mu_{l_0} (\mathbf{c}\mathbf{x}^{l_0})$$

Основные теоремы ЛП 5

По свойствам многогранного выпуклого конуса:

$$\forall \mu \in [0, +\infty[$$

$$\mathbf{x}(\mu) = \sum_{k=1}^s \lambda_k \mathbf{x}^k + \sum_{l \neq l_0} \mu_l \mathbf{x}^l + \mu \mathbf{x}^{l_0} \in D$$

В зависимости от знака $\mathbf{c}\mathbf{x}^{l_0}$

$$(1) \quad \mathbf{c}\mathbf{x}^{l_0} > 0 \quad \forall \mu > \mu_{l_0} :$$

$$f(\mathbf{x}(\mu)) = \sum_{k=1}^s \lambda_k (\mathbf{c}\mathbf{x}^k) + \sum_{l \neq l_0} \mu_l (\mathbf{c}\mathbf{x}^l) + \mu (\mathbf{c}\mathbf{x}^{l_0}) > f(\mathbf{x}^*)$$

Основные теоремы ЛП 5

$$(2) \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x}^{l_0} < 0 \quad \forall \mu \in [0, \mu_{l_0}[: f(\mathbf{x}(\mu)) > f(\mathbf{x}^*)$$

$$(3) \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x}^{l_0} = 0 \quad \forall \mu \geq 0$$

Вторая геометрическая интерпретация ЗЛП 1

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}\mathbf{x} \rightarrow \max, D = \{\mathbf{x} \in R^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}.$$

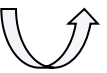
(!) без ограничения общности

$$m \leq n$$

$$m > n$$

$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$
несовместна

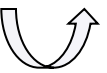
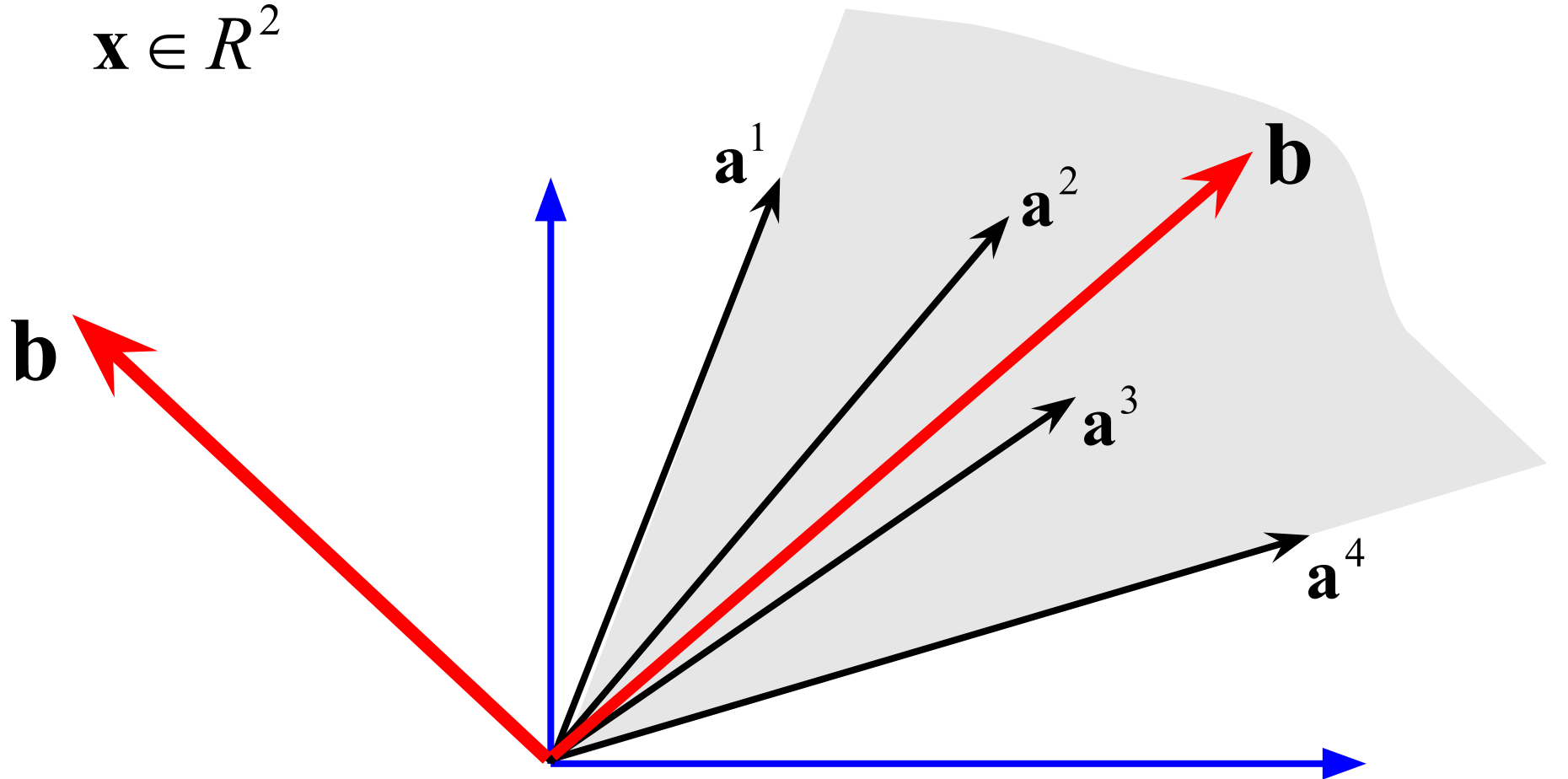
существуют
линейно-зависимые
ограничения



Вторая геометрическая интерпретация ЗЛП 1

$$\mathbf{a}^1 x_1 + \mathbf{a}^2 x_2 + \dots + \mathbf{a}^j x_j + \dots + \mathbf{a}^n x_n = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \in R^2$$



Базисный план 1

$$\beta = \{ \mathbf{a}^{j_1}, \mathbf{a}^{j_2}, \square, \mathbf{a}^{j_m} \}$$

$$N(\beta) = \{ j_1, j_2, \square, j_m \}$$

$$\mathbf{x}(\beta) : \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(\beta) =$$

$$= \mathbf{a}^{j_1} \cdot x_{j_1} + \mathbf{a}^{j_2} \cdot x_{j_2} + \square + \mathbf{a}^{j_m} \cdot x_{j_m} = \mathbf{b}$$

Базисный план 2

 **Х(β)базисный план**

$$x_j(\beta) \geq 0, \quad j \in N(\beta);$$

$$x_j(\beta) = 0, \quad j \notin N(\beta).$$

Базисный план 3

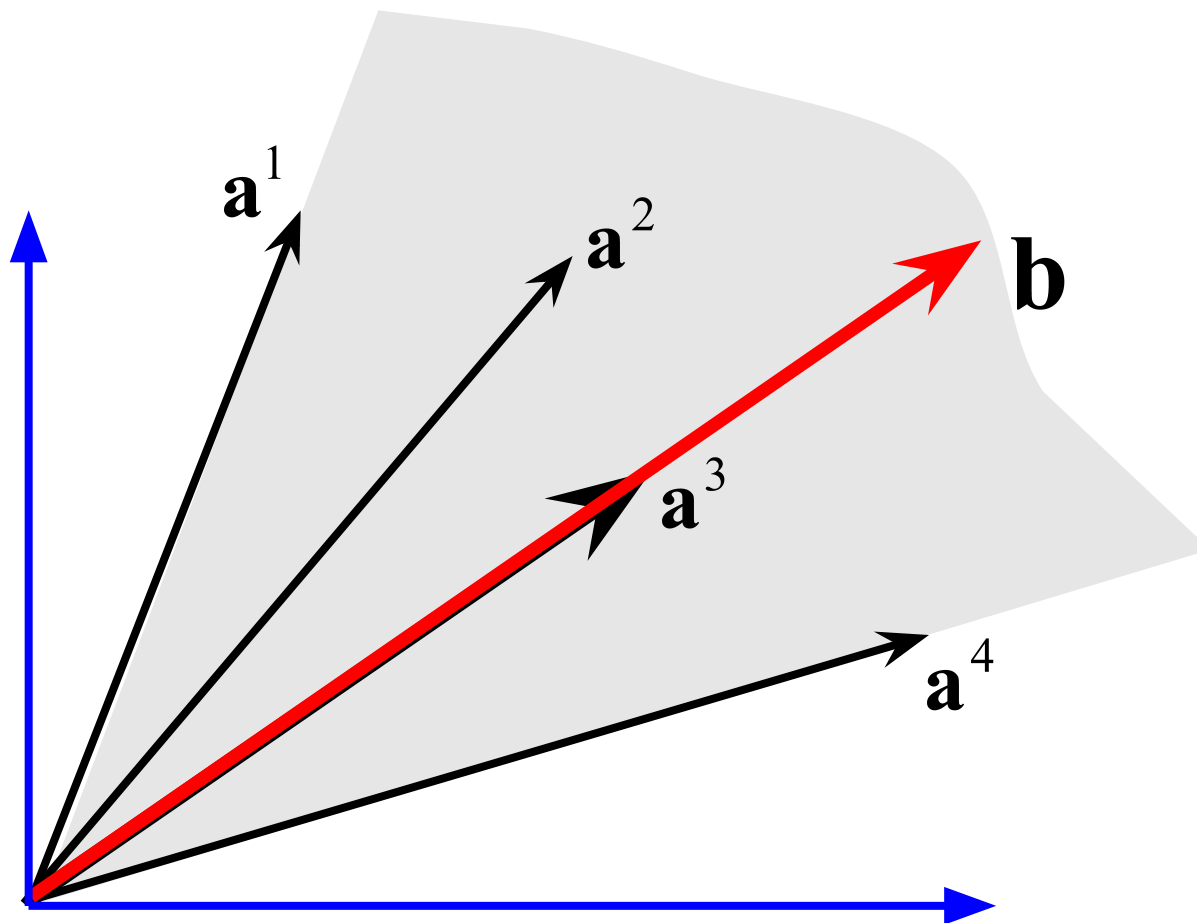


базисный план-невырожденный:

$$x(\beta) > 0, \forall j \in N(\beta)$$

вырожденный – в противном случае.

Базисный план 4



Теоремы о свойствах базисных планов 1



Теорема

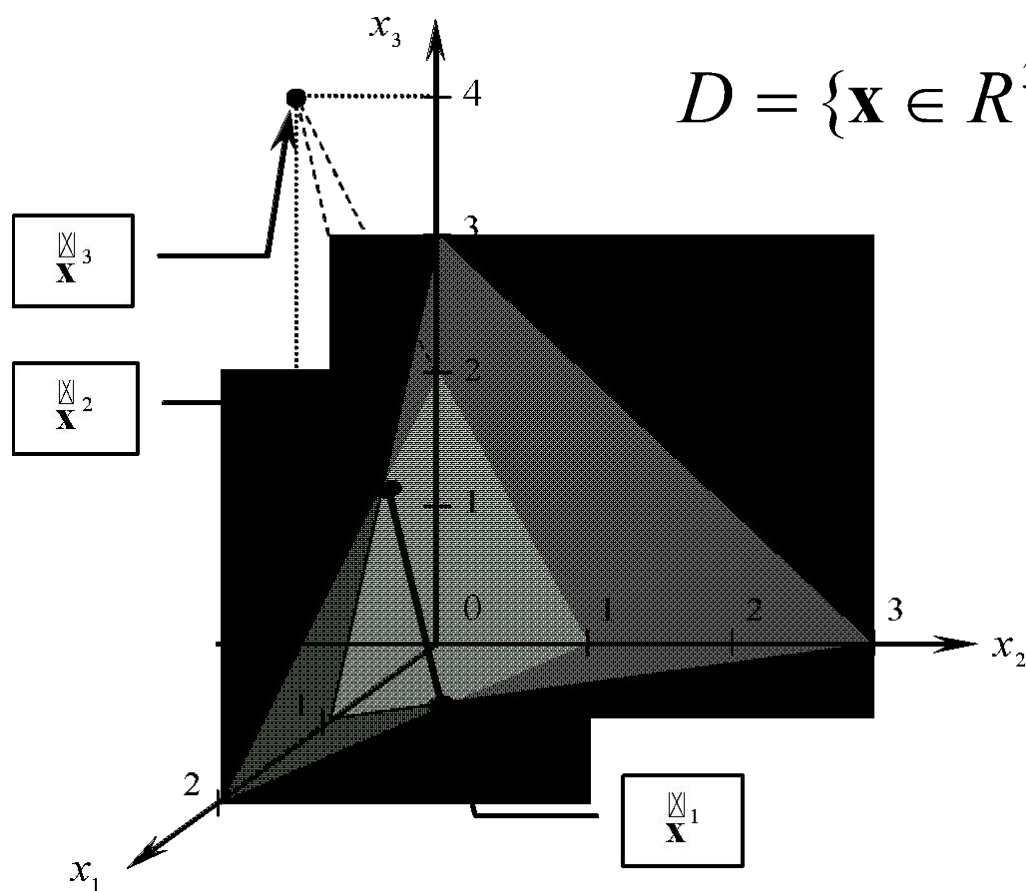
Каждый допустимый базисный план является угловой точкой множества допустимых планов

$$\beta = \{a^1, a^2, \dots, a^m\}$$



Теоремы о свойствах базисных планов 2

Базисные планы (пример)



$$D = \{ \mathbf{x} \in R^3 \mid \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{array} \}.$$

Симплекс-метод, историческая справка



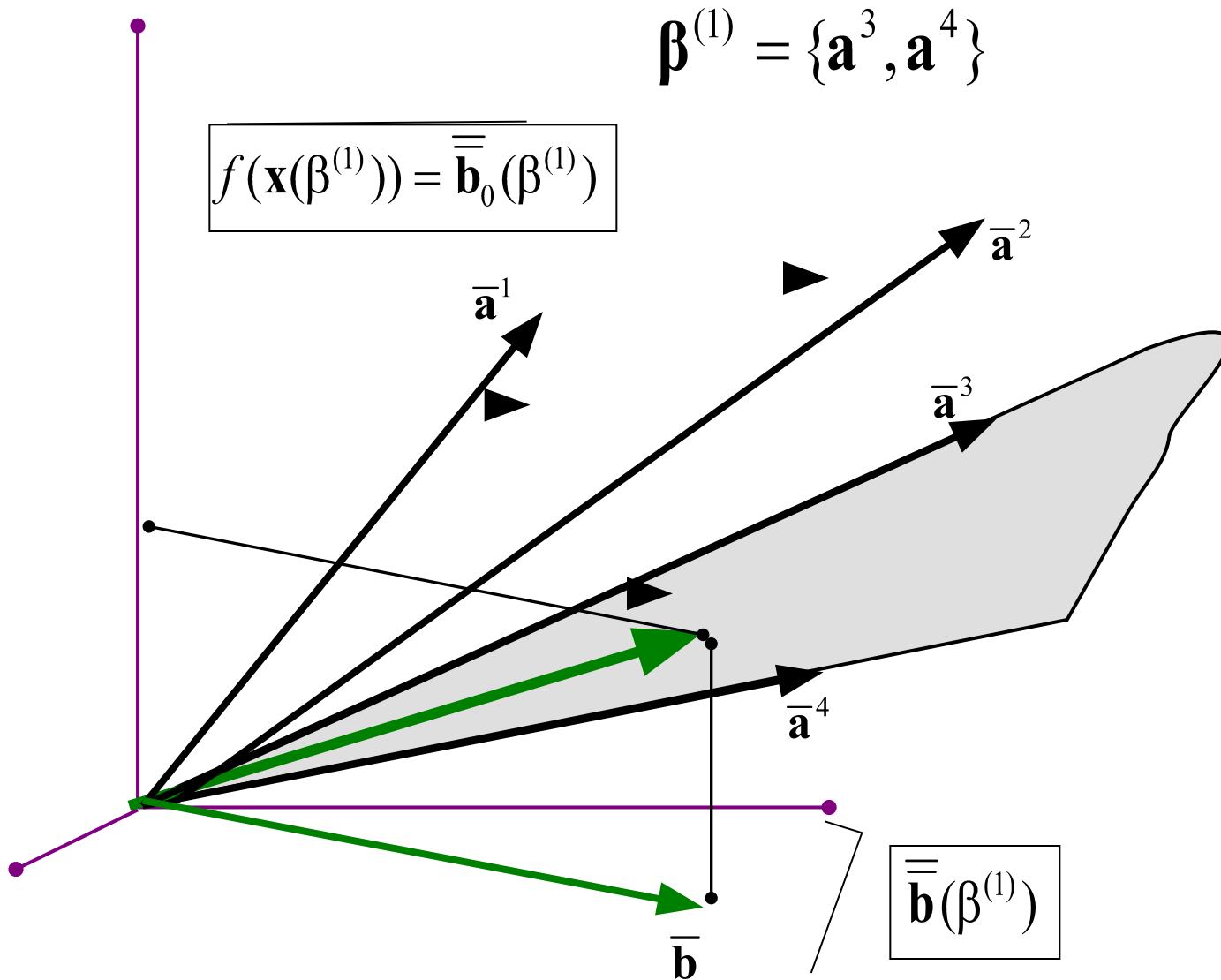
**Леонид Витальевич
Канторович
(1912–1986) , 1939**



**Джордж Данциг
(1914–2005) , 1947**



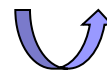
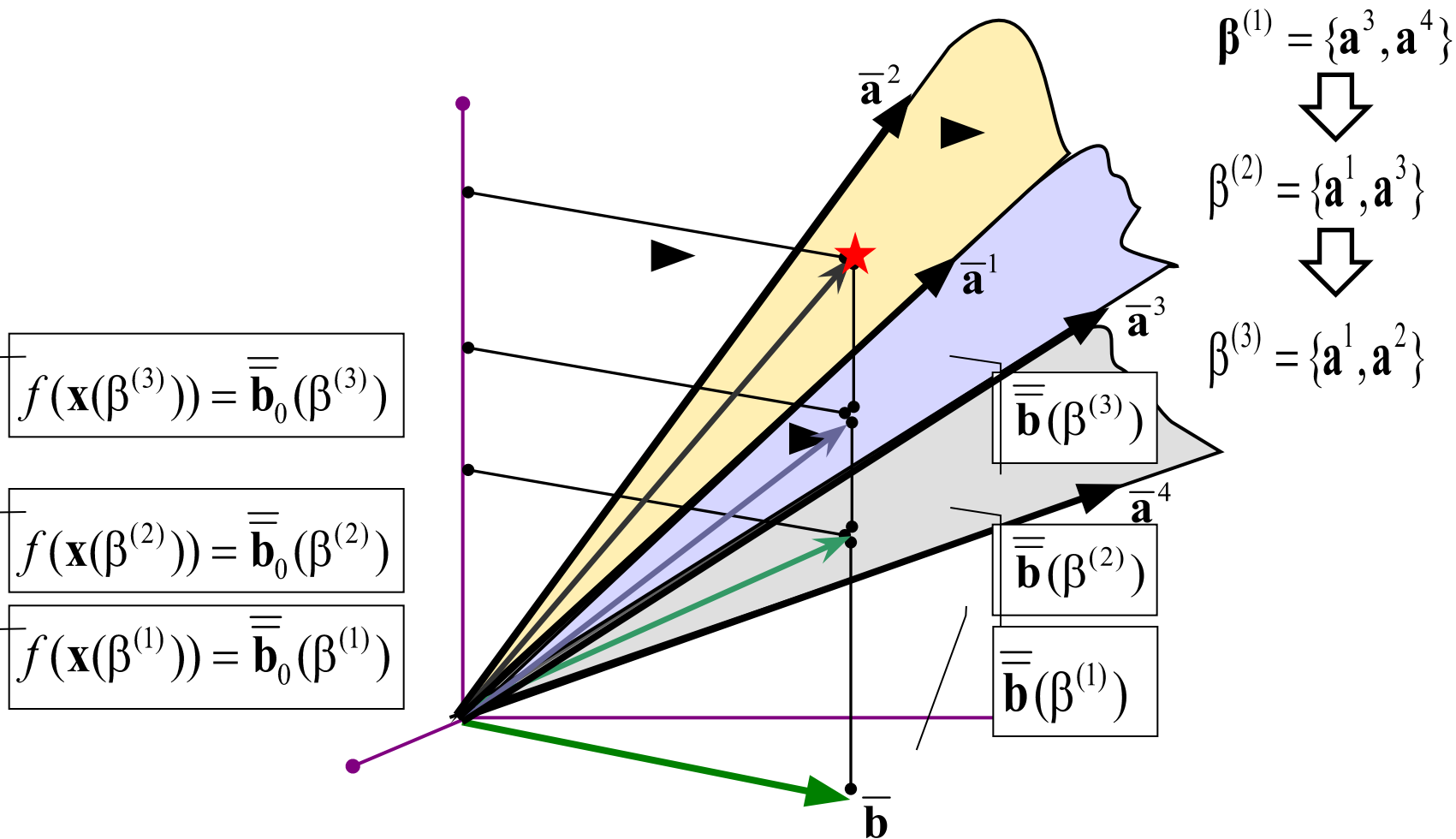
Симплекс-метод, геометр. интерпретация 1



Симплекс-метод, геометр. интерпретация 2



Симплекс-метод, геометр. интерпретация 3



Симплекс-метод алгоритм

0-итерация: Определение
исходного допустимого
базисного плана

Стандартная
итерация

Проверка
оптимальнос
ти

Да

Выход

Нет

Определение вводимого столбца

Обнаружена
неограничен
ность

Выход


Нет

Определение
выводимого
столбца

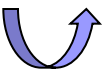
Пересчёт параметров задачи относительно
нового базиса



Симплекс-метод критерий оптимальности

 план является оптимальным, если для всех $j \in 1..n$
 $a_{0j}(\beta^{(q)}) \geq 0$, и неоптимальным в противном случае,
т.е. если существует такое $l \in \{1..n\}$, что $a_{0l}(\beta^{(q)}) < 0$.

Значения $a_{0j}(\beta^{(q)})$ также называют оценками столбцов матрицы A относительно текущего базиса или симплекс-разностями.



Симплекс-метод

определение выводимого столбца

☝ для столбца a^i , претендующего на ввод в базис, и вектора ограничений b рассматриваются отношения

Таким образом, если базис на q -й итерации включал столбцы с номерами

$$N(\beta^{(q)}) \equiv \left\{ \frac{b_i(\beta^{(q)})}{a_{il}(\beta^{(q)})} \mid j_{r-1}, j_r, j_{r+1}, \dots, j_m \right\},$$

то базис на итерации $q+1$ будет состоять из столбцов с номерами:

и определяется такая строка r , что

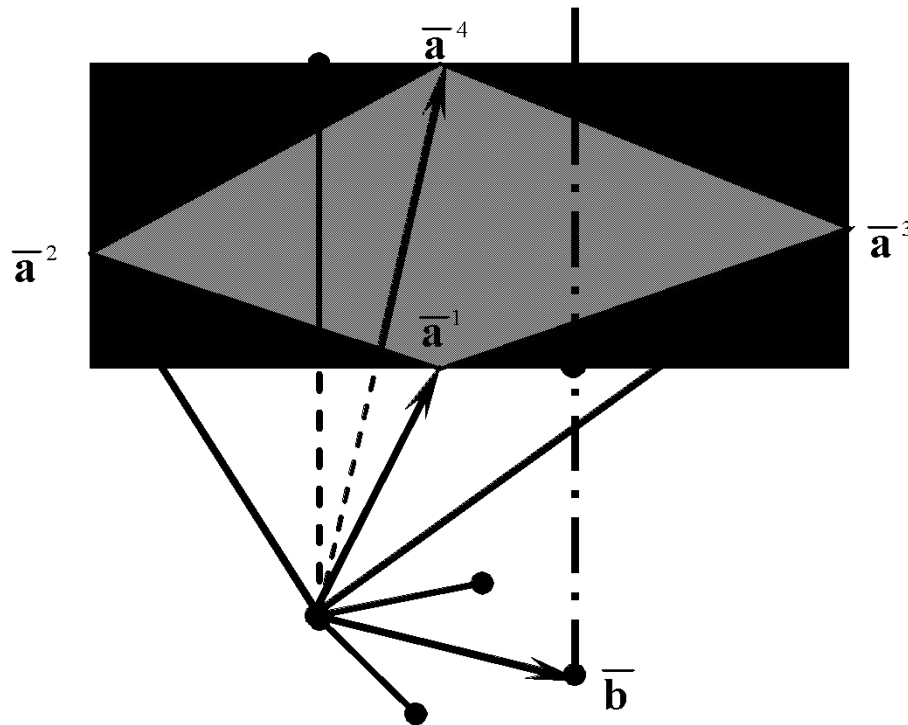
$$\lambda_r = \min_{i \in \{1..m \mid a_{il}(\beta^{(q)}) > 0\}} \{\lambda_i\}.$$

Полученный индекс r определяет номер столбца в $N(\beta^{(q)})$,

выводимого из базиса, а именно, $j_r = N_r(\beta^{(q)})$.



Симплекс-метод, неограниченность



$$\exists l : a_{0l}(\beta^{(q)}) < 0$$

$$\mathbf{a}^l(\beta^{(q)}) \leq 0$$



Симплекс-метод, симплекс-таблица

Номера базисных столбцов

Значение цел. функции на текущем плане

Строка «оценок»

$T^{(q)} =$

	$b_0(\beta^{(q)})$	$a_0(\beta^{(q)})$	
$N(\beta^{(q)})$	$b(\beta^{(q)})$	$A(\beta^{(q)})$	$\lambda^{(q)}$

Столбец ограничений в текущем базисе

Матрица задачи в текущем базисе

Значения λ ,
рассч. при
определен.
выводимого
столбца



Симплекс-метод, приме

Исходный
допустимый
базис

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 &\rightarrow \max, \\ 7x_1 + 5x_2 + x_3 &= 35, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 &= 8, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

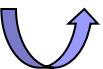
$$\bar{\Delta}(\beta^{(1)}) = \left[\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \quad \bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(1)}) = \left[\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right],$$



Симплекс-метод, пример (1)

$$\bar{\mathbf{A}}(\beta) \mathbf{b}(\beta) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -0 & 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 7 & 0 & 5 & 3 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 35 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

	$b_0(\beta^{(q)})$				
	0	-4	-3	0	0
3	35	7	5	1	0
$N(\beta^{(q)})$	$\mathbf{b}(\beta^{(q)})$		$\mathbf{A}(\beta^{(q)})$		
4	8	1	2	0	1



Разрешающий элемент

Симплекс-метод, пример (2)

$$a_0(\beta^{(1)}) + \frac{4}{7} \cdot a_1(\beta^{(1)})$$

$$T^{(1)} =$$

	0	-4	-3	0	0
3	35	7	5	1	0
4	8	1	2	0	1

$$35 : 7 = 5$$

$$8 : 1 = 8$$

$$a_2(\beta^{(1)}) - \frac{1}{7} a_1(\beta^{(1)})$$

$$T^{(2)} =$$

	20	0	-1/7	4/7	0
1	5	1	5/7	1/7	0
4	3	0	9/7	-1/7	1

Разрешающий элемент

$$5 : 5/7 = 7$$

$$3 : 9/7 = 7/3$$



Симплекс-метод. пример (3)

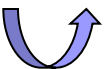
План оптимальный !!!

$$T^{(3)} =$$

	61/3	0	0	5/9	1/9
1	10/3	1	0	2/9	-5/9
2	7/3	0	1	-1/9	7/9

$$\mathbf{x}^* = \left(\frac{10}{3}, \frac{7}{3}, 0, 0\right),$$

$$f^* = f(\mathbf{x}^*) = \frac{61}{3} = 20\frac{1}{3}.$$



Симплекс-метод, метод минимизации невязок

$$f(\mathbf{x}) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \rightarrow \max,$$

$$D = \{\mathbf{x} \in R^n \mid a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = b_1,$$

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) = 0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_n - 1 \cdot x_{n+1} - 1 \cdot x_{n+m} \rightarrow \max,$$

$$\tilde{D} = \{\mathbf{x} \in R^{n+m} \mid a_{11} x_1 + \dots + a_{m1} x_1 + \dots + a_{1n} x_n + \dots + a_{mn} x_n + 0 \cdot x_{n+1} + \dots + 1 \cdot x_{n+m} = b_m,$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \\ x_{n+1} \geq 0, \dots, x_{n+m} \geq 0 \end{array} \right\}$$

$$a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n + 0 \cdot x_{n+1} + \dots + 1 \cdot x_{n+m} = b_m,$$

$$x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, x_{n+1} \geq 0, \dots, x_{n+m} \geq 0 \}.$$



Обоснование симплекс-метода T1/1

Теорема 1. Если для плана $\mathbf{x}^*(\beta)$ выполняется условие $\mathbf{a}_0(\beta) \geq 0$, то данный план является оптимальным.

Рассмотрим произвольный план задачи $\mathbf{x} \in D$. Из допустимости \mathbf{x} следует

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{a}^j x_j = \mathbf{b}.$$

Значение целевой функции задачи, достигаемое на плане \mathbf{x} , можно выразить как

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j.$$

При этом с учетом того, что $\forall j \in 1..n \quad a_{0,j}(\beta) = -c_j + \mathbf{c}(\beta) \cdot \mathbf{a}^j(\beta) \geq 0$ и, соответственно, $c_j \leq \mathbf{c}(\beta) \cdot \mathbf{a}^j(\beta)$, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n c_j x_j &\leq \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^m c_i(\beta) \cdot a_{ij}(\beta) \right] x_j = \\ &= \sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^n a_{ij}(\beta) \cdot x_j \right] c_i(\beta). \end{aligned}$$

(T1.1)



Обоснование симплекс-метода T1/2

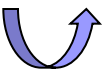
Выражения $\sum_{j=1}^n a_{ij}(\beta) \cdot x_j$ представляют собой ничто иное, как «левые» части ограничений задачи, преобразованные относительно текущего базиса β , а, поскольку план \mathbf{x} является допустимым, то для $\forall i$:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}(\beta) \cdot x_j = b_i(\beta). \quad (\text{T1.2})$$

Подставив (T1.1) в (T1.2) получаем, что для произвольного $\mathbf{x} \in D$

$$f(\mathbf{x}) \leq \sum_{i=1}^m b_i(\beta) \cdot c_i(\beta) = f(\mathbf{x}^*(\beta)),$$

что и означает оптимальность $\mathbf{x}^*(\beta)$. ✌



Обоснование симплекс-метода T2/1

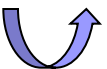
Теорема 2. В симплекс-алгоритме очередной план $\mathbf{x}(\beta^{(q+1)})$, получаемый на основе допустимого базисного плана $\mathbf{x}(\beta^{(q)})$, всегда является допустимым.

Базисный план $\mathbf{x}(\beta^{(q+1)})$, получаемый на очередной итерации $q+1$, связан с предшествующим ему планом $\mathbf{x}(\beta^{(q)})$ соотношениями

$$\begin{aligned}x_{N_i(\beta^{(q)})}(\beta^{(q+1)}) &= x_{N_i(\beta^{(q)})}(\beta^{(q)}) - \lambda \cdot a_{il}(\beta^{(q)}) \quad \text{для } i = 1..m \ (j \in N(\beta^{(q)})), \\x_l(\beta^{(q+1)}) &= \lambda, \\x_j(\beta^{(q+1)}) &= 0 \quad \text{для } j \notin \{N(\beta^{(q)}) \cup l\},\end{aligned}$$

(T2.1)

где $x_{N_i(\beta^{(q)})}(\beta^{(q)}) = b_i(\beta^{(q)})$ для $i \in 1..m$.



Обоснование симплекс-метода T2/2

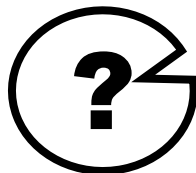
Тогда $\forall \lambda$

$$\sum_{i=1}^m \mathbf{a}^{N_i(\beta^{(q+1)})} \cdot b_i(\beta^{(q+1)}) - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}^j \cdot x_j(\beta^{(q+1)}) = \sum_{i=1}^m \mathbf{a}^{N_i(\beta^{(q)})} \cdot b_i(\beta^{(q)}) - \sum_{i=1}^m \mathbf{a}^l \cdot x_i(\beta^{(q+1)})$$

$$\sum_{i=1}^m \mathbf{a}^{N_i(\beta^{(q)})} \cdot a_{il}(\beta^{(q)}) \cdot \sum_{i=1}^m \mathbf{a}^{N_i(\beta^{(q)})} \cdot [b_i(\beta^{(q)}) - \lambda \cdot a_{il}(\beta^{(q)})] + \mathbf{a}^l \cdot \lambda \quad (i \in \bar{1..m})$$

единичными (в базисе $\beta^{(q)}$) $\lambda \sum_{i=1}^m \mathbf{a}^{N_i(\beta^{(q)})} \cdot a_{il}(\beta^{(q)}) + \mathbf{a}^l \cdot \lambda =$

$$= \mathbf{b} - \lambda \mathbf{a}^l + \lambda \mathbf{a}^l = \mathbf{b}.$$



Обоснование симплекс-метода T2/3

Таким образом, при формировании $\mathbf{x}(\beta^{(q+1)})$ согласно правилам (T2.1) при $\forall \lambda$ он будет удовлетворять первой группе ограничений КЗЛП ($\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$).

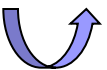
Если λ выбирается согласно правилам определения выводимого столбца: $\lambda = \lambda_r$ для $i \in \{1..m \mid a_{il}(\beta^{(q)}) \leq 0\}$ в силу неотрицательности λ_r имеем

$$x_{N_i(\beta^{(q)})}(\beta^{(q+1)}) = x_{N_i(\beta^{(q)})}(\beta^{(q)}) - \lambda \cdot a_{il}(\beta^{(q)}) \geq 0.$$

Для $i \in \{1..m \mid a_{il}(\beta^{(q)}) > 0\}$ также будет выполняться условие

$$\begin{aligned} x_{N_i(\beta^{(q)})}(\beta^{(q+1)}) &= b_i(\beta^{(q)}) - \lambda_r \cdot a_{il}(\beta^{(q)}) = \\ &= b_i(\beta^{(q)}) - \min_{i:a_{il}(\beta^{(q)})>0} \left\{ \frac{b_i(\beta^{(q)})}{a_{il}(\beta^{(q)})} \right\} \cdot a_{il}(\beta^{(q)}) \geq 0. \end{aligned}$$

Остальные компоненты $\mathbf{x}(\beta^{(q+1)})$ ($j \notin N(\beta^{(q)})$) — неотрицательны по определению, т.е. план $\mathbf{x}(\beta^{(q+1)}) \geq 0$, что и означает его допустимость. ✌



Обоснование симплекс-метода T3/1

Теорема 3. В случае невырожденности ЗЛП при переходе к очередному базисному плану $\mathbf{x}(\beta^{(q+1)})$ происходит «улучшение» (возрастание) значения целевой функции: $f(\mathbf{x}(\beta^{(q+1)})) > f(\mathbf{x}(\beta^{(q)}))$.

С учетом (T2.1) значение целевой функции в $\mathbf{x}(\beta^{(q+1)})$ может быть представлено как

$$f(\mathbf{x}(\beta^{(q+1)})) = \sum_{i=1}^m c_{N_i(\beta^{(q)})} \cdot x_{N_i(\beta^{(q)})}(\beta^{(q+1)}) + c_l \cdot x_l(\beta^{(q+1)}) =$$

Таким образом, если $\sum_{i=1}^m c_{N_i(\beta^{(q)})} \cdot a_{0l}(\beta^{(q)}) < 0$ (столбец l имеет отрицательную оценку), то $f(\mathbf{x}(\beta^{(q+1)})) > f(\mathbf{x}(\beta^{(q)}))$.

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^m c_{N_i(\beta^{(q)})} \cdot [b_i(\beta^{(q)}) - \lambda_r \cdot a_{il}(\beta^{(q)})] + c_l \cdot \lambda_r = \\ &= \sum_{i=1}^m c_{N_i(\beta^{(q)})} \cdot b_i(\beta^{(q)}) - \lambda_r \cdot \left[\sum_{i=1}^m c_{N_i(\beta^{(q)})} \cdot a_{il}(\beta^{(q)}) - c_l \right] = \\ &= f(\mathbf{x}(\beta^{(q)})) - \lambda_r \cdot a_{0l}(\beta^{(q)}). \end{aligned}$$

(T3.1)



Обоснование симплекс-метода T4/1

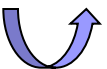
Теорема 4. Если для текущего базисного плана $\mathbf{x}(\beta^{(q)})$ существует такое l , что $a_{0,l}(\beta^{(q)}) < 0$ и $\mathbf{a}^l(\beta^{(q)}) \leq 0$, то целевая функция задачи не ограничена сверху.

В ходе доказательства теоремы 2 было показано, что базисный план $\mathbf{x}(\beta^{(q+1)})$, получаемый на очередной итерации $q + 1$, если $\mathbf{a}^l(\beta^{(q)}) \leq 0$, при любом $\lambda > 0$ всегда является допустимым.

Используя (ТЗ.1), значение целевой функции для плана $\mathbf{x}(\beta^{(q+1)})$ можно выразить как

$$f(\mathbf{x}(\beta^{(q+1)})) = f(\mathbf{x}(\beta^{(q)})) - \lambda \cdot a_{0l}(\beta^{(q)}).$$

Тогда, с учетом того, что $a_{0l}(\beta^{(q)}) < 0$, устремив $\lambda \rightarrow +\infty$, мы получаем неограниченное возрастание целевой функции на множестве допустимых планов. ✌️



Сходимость симплекс-метода и проблема вырожденности 1

Рассмотрим пример

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) = & x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ D = \{\mathbf{x} \in R^2 \mid & x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ & 3x_1 - x_2 \leq 3, \\ & \mathbf{x} \geq 0\}. \end{aligned}$$



Сходимость симплекс-метода и проблема вырожденности 2

$$T^{(1)} =$$

		0	-1	-1	0	0	0	
3	8	1	2	1	0	0	8	
4	12	3	2	0	1	0	4	
5	3	3	-1	0	0	1	1	

$$T^{(2)} =$$

		1	0	-4/3	0	0	1/3	
3	7	0	7/3	1	0	-1/3	3	
4	9	0	3	0	1	-1	3	
1	1	1	-1/3	0	0	1/3	—	

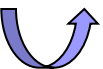
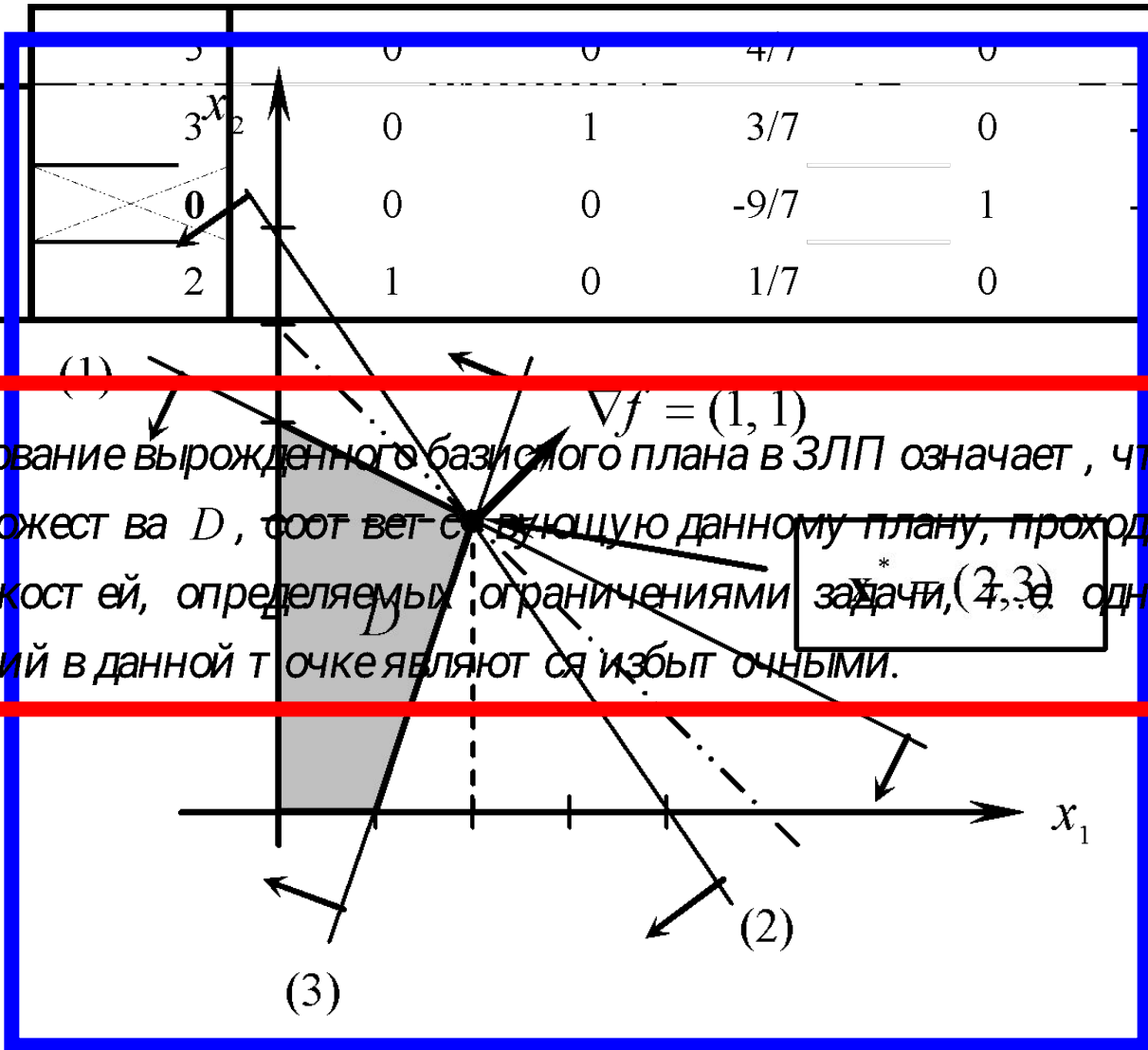


Сходимость симплекс-метода и проблема вырожденности 3

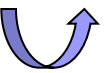
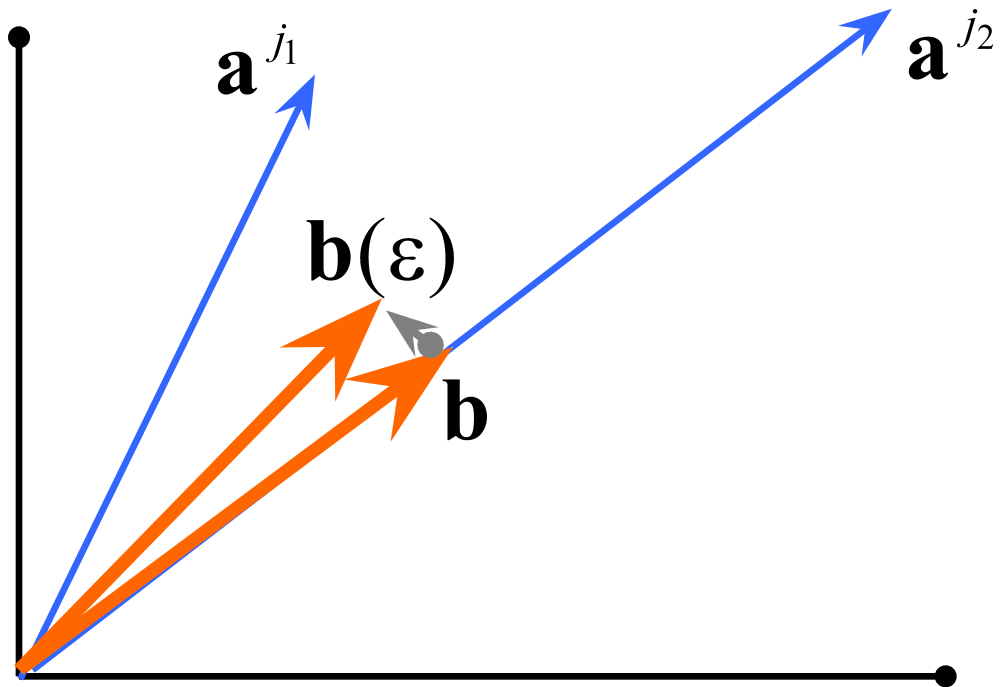
$T^{(3)} =$

	3	0	0	4/7	0	1/7
2	$3x_2$	0	1	3/7	0	-1/7
4	0	0	0	-9/7	1	-4/7
1	2	1	0	1/7	0	2/7

существование вырожденного базисного плана в ЗЛП означает, что через угловую точку множества D , соответствующую данному плану, проходит более чем m гиперплоскость ей, определяемых ограничениями задачи, $(2, 3)$ одно или несколько ограничений в данной точке являются избыточными.



Сходимость симплекс-метода и проблема вырожденности 4



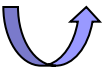
Сходимость симплекс-метода и проблема вырожденности 5

(👉) Базовая идея: переход к «возмущённой» задаче

$$(D, f) \quad \Rightarrow \quad (D(\varepsilon), f)$$

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{a}^j x_j = \mathbf{b} + \sum_{j=1}^n \mathbf{a}^j \varepsilon^j = \mathbf{b}(\varepsilon) \quad (\mathbf{B.1})$$

где ε — некоторый достаточно малый положительный параметр
(ε^j — j -я степень числа ε)

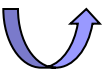


Сходимость симплекс-метода и проблема вырожденности 6

(👉) Теорема Чарнса

существует такое $\varepsilon' > 0$, что для $\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon'[$ задача $(D(\varepsilon), f)$, полученная в результате преобразования (B.1), будет невырожденной;

существует такое $\varepsilon'' > 0$, что для $\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon''[$ из допустимости базиса в задаче $(D(\varepsilon), f)$ будет следовать его допустимость в исходной задаче (а из оптимальности — оптимальность).

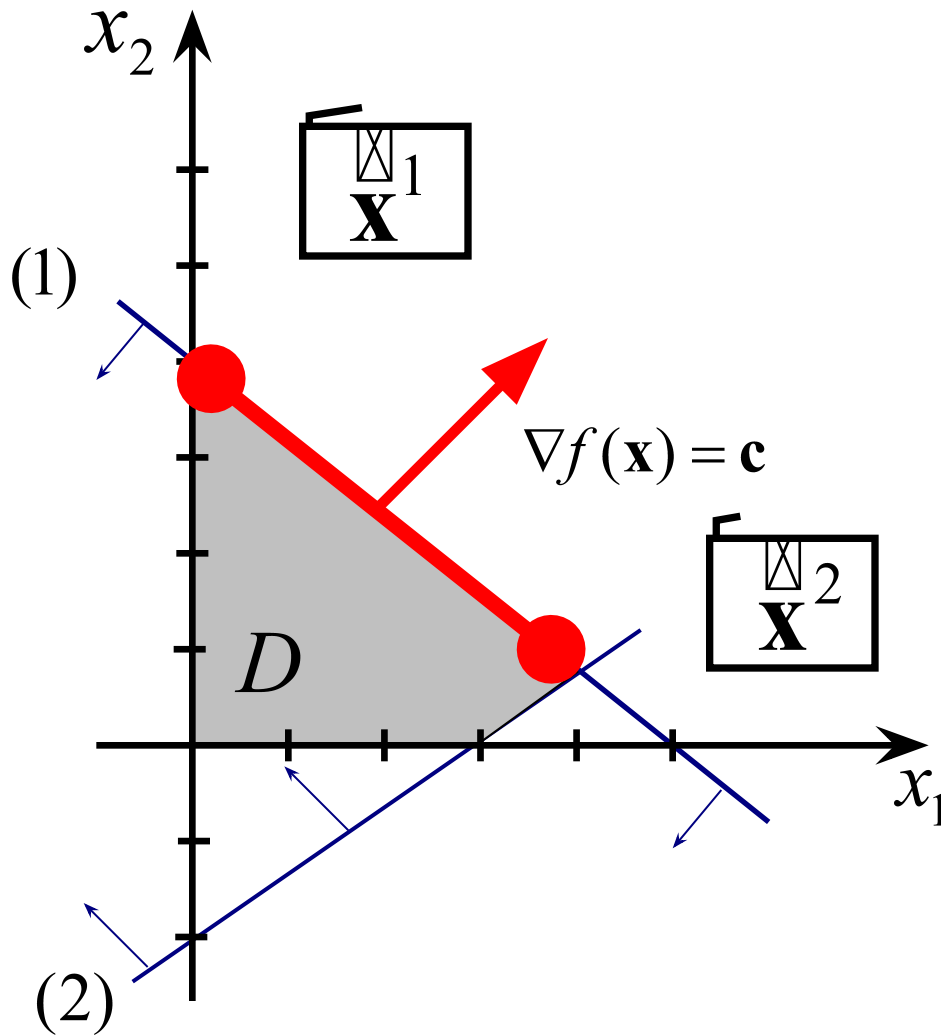


Альтернативные оптимальные планы 1

Рассмотрим пример

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) = & 8x_1 + 10x_2 \rightarrow \max, \\ D = \{\mathbf{x} \in R^2 \mid & 4x_1 + 5x_2 \leq 20, \\ & 2x_1 - 3x_2, \leq 6, \\ & \mathbf{x} \geq 0\}. \end{aligned}$$

Альтернативные оптимальные планы 2



$$\mathbf{x}^1 = (0, 4)$$

$$\mathbf{x}^2 = (45/11, 8/11)$$

Альтернативные оптимальные планы 3

$T^{(1)} =$

	0	-8	-10	0	0
3	s	20	4	5	1
4					s
					0
					4

 $\mathbf{x}^* = \sum_{i=1}^6 \lambda_i \mathbf{x}^i$, где $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^6 \lambda_i = 1$

$T^{(2)} =$

	40	0	0	2	0
2	4	4/5	1	1/5	0
4	18	22/5	0	3/5	1

$\mathbf{x}^* = \lambda \mathbf{x}^1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}^2 =$

	$45/11 \cdot \lambda + 45/11$				
	0	2	0		
2	$8/11$	0	1	$36/11 \cdot \lambda - 2/11$	$8/11$
1	$45/11$	1	0	$3/22$	$5/22$

$\hat{\mathbf{x}}^1$ and $\hat{\mathbf{x}}^2$ are indicated by green circles on the right side of the diagram.

Модифицированный симплекс-метод 1

$$\beta^{(q)} \rightarrow \beta^{(q+1)}$$

$$\bar{\mathbf{A}}(\beta^{(q)}) \rightarrow \bar{\mathbf{A}}(\beta^{(q+1)})$$

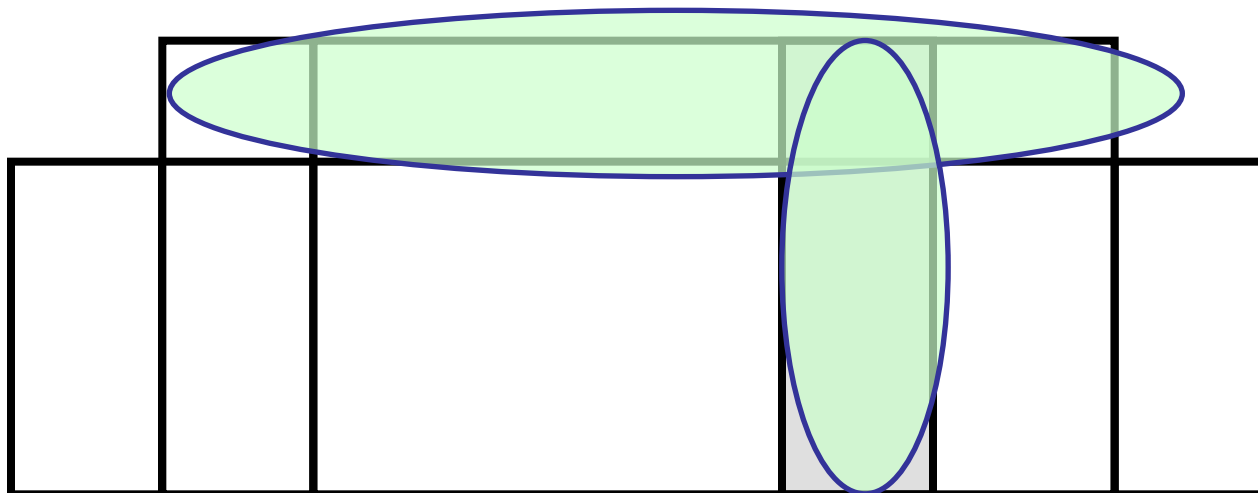
$$\bar{\mathbf{A}}(\beta^{(q)}) = \bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(q)}) \cdot \bar{\mathbf{A}}$$



$$\bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(q)}) \rightarrow \bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(q+1)})$$

Модифицированный симплекс-метод 2

$$\mathbf{a}_0(\beta^{(q)})$$



$$\bar{\mathbf{a}}^l(\beta^{(q)})$$

Модифицированный симплекс-метод, пример 1

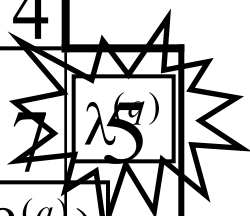
$-\delta_0(\beta^{(1)})$	0	4	3	0	0
\mathbb{X}		7	5	1	0
$\delta_0(\beta^{(q)})$		1	2	0	1

$$\Delta(\beta^{(1)}) = \bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(1)}) = \left[\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$b_0(\beta^{(q)})$		-4	$a_0(\beta^{(1)})$	0	$4x_0$	$+3x_2$					
		\mathbb{X}	\mathbb{X}		$7x_1$	$+5x_2$	$+x_3$				$\rightarrow \max,$
		$a_0(\beta^{(q)})$			x_1	$+2x_2$	$+x_4$				$= 35,$
											$= 8,$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$

	0	-1	0	0	4	-4
$N(\beta^{(q)})$	35	0	0	0	7	7
$\bar{a}^l(\beta^{(q)})$	4	0	0	1	1	1
$\bar{a}^l(\beta^{(8)})$	8	0	0	1	1	1



Модифицированный симплекс-метод, пример 2

$$T_1 =$$

-1	0	0	4	3	0	0
-1	4/7	0	7	5	1	0
-1	5/9	1/9	1	2	0	1
			-4	-3	0	0
			0	-1/7	4/7	0
			0	0	5/9	1/9

Модифицированный симплекс-метод, пример 3

$$T_2^{(2)} =$$

		20	-1	4/7	0	3	-1/7	
1	5	0	1/7	0	5	5/7	7	
4	3	0	-1/7	1	2	9/7	7/3	

$$T_2^{(3)} =$$

		61/3	-1	5/9	1/9		
1	10/3	0	2/9	-5/9			
2	7/3	0	-1/9	7/9			

Модифицированный симплекс-метод, мультипликативная форма 3

$$\Delta^{-1}(\beta^{(q+1)}) = \mathbf{E}^{(q)} \cdot \Delta^{-1}(\beta^{(q)})$$

r -й столбец:

$$\left[\begin{array}{c} \frac{a_{1l}(\beta^{(q)})}{a_{rl}(\beta^{(q)})} \\ \frac{a_{2l}(\beta^{(q)})}{a_{rl}(\beta^{(q)})} \\ \vdots \\ \frac{1}{a_{rl}(\beta^{(q)})} \\ \vdots \\ \frac{a_{ml}(\beta^{(q)})}{a_{rl}(\beta^{(q)})} \end{array} \right]$$

Мультипликативная форма

$$\cdot \Delta^{-1}(\beta^{(q)}) = \mathbf{E}^{(q-1)} \cdot \mathbf{E}^{(q-2)} \cdot \dots \cdot \mathbf{E}^{(1)} \cdot \Delta^{-1}(\beta^{(1)})$$