Полиномиальный алгоритм проверки простоты числа

Комалёва Ольга

План семинара

- Постановка задачи
- Идея алгоритма
- Полиномиальный алгоритм
- Оценка времени работы алгоритма
- Доказательство корректности алгоритма

Постановка задачи

Дано натуральное число n. Необходимо проверить является ли оно простым за полиномиальное время от длины числа n в бинарной форме.

План семинара

- Постановка задачи
- Идея алгоритма
- Полиномиальный алгоритм
- Оценка времени работы алгоритма
- Доказательство корректности алгоритма

Основная идея алгоритма

Лемма 1.1.

Пусть $a \in \mathrm{Z}$, $n \in \mathrm{N}$, $n \geq 2$, $a \in \mathrm{Z}_n^*$. Тогда

n - простое $\Leftrightarrow (X+a)^n \equiv X^n + a (\mathrm{mod}\, n)$.

План семинара

- Постановка задачи
- Идея алгоритма
- Полиномиальный алгоритм
- Оценка времени работы алгоритма
- Доказательство корректности алгоритма

Алгоритм Agrawal

Input : integer $n > 1$

1. if $(\exists a,b > 1 : \ n = a^b)$ output COMPOSITE
2. $r \ = \min\{a : o_a(n) > \log^2 n\}$
3. if $(\exists \ a \le r: \ 1 < \gcd(a, n) < n)$ output COMPOSITE
4. if $(n \le r)$ output PRIME
5. for $a = 1$ to $\lfloor \sqrt{\varphi(r)} \log n \rfloor$ do

   if $((X + a)^n \ne X^n + a (\mathrm{mod}\ X^r - 1, n))$ output COMPOSITE
6. output PRIME

План семинара

- Постановка задачи
- Идея алгоритма
- Полиномиальный алгоритм
- Оценка времени работы алгоритма
- Доказательство корректности алгоритма

Время работы алгоритма

Лемма 2.1.

Пусть $LCM(m)$ - наименьшее общее кратное первых m чисел.Тогда, начиная с $m=7$, $LCM(m) \geq 2^m$.

Лемма 2.2.

Существует $r \leq \max\left(3, \left\lceil \log^5 n \right\rceil\right)$, и $o_r(n) > \log^2 n$.

Время работы алгоритма

Лемма 2.3.

Асимптотическая сложность алгоритма равна $O^{\sim}(\log^{21/2} n)$. Где $O^{\sim}(t(n))$ равносильно $O(t(n)poly(\log(t(n)))$.

Доказательство:

Шаг 1: $O^{\sim}(\log^3 n)$

Шаг 2-3: $O^{\sim}(r(\log^2 n \log r + \log n)) = O^{\sim}(\log^5 n)$

Шаг 4: $O^{\sim}(\log n)$

Шаг 5: $O^{\sim}((\sqrt{\varphi(r)}\log n) r \log^2 n) = O^{\sim}(\log^{21/2} n)$

Так как каждая проверка равенства требует $O(\log n)$ умножений полиномов степени r с коэффициентами размером $O(\log n)$.

Время работы алгоритма

Лемма 3.2.(Фоуври)

$P(n)$ - наибольший простой.делитель n.

$\pi(x)$ - число простых чисел $p \le x$,для которых

$P(p\text{-}1) > x^{2/3}$.Тогда $\exists\, c>0,\ n_0 \in N : \forall x \ge n_0 \quad \pi(x) \ge c\dfrac{x}{\log x}$.

Лемма 3.3.

Асимптотическая сложность алгоритма равна

$O^{\sim}(\log^{15/2} n)$.

План семинара

- Постановка задачи
- Идея алгоритма
- Полиномиальный алгоритм
- Оценка времени работы алгоритма
- Доказательство корректности алгоритма

Алгоритм Agrawal

Input : integer $n > 1$

1. if $(\exists a,b > 1 : \ n = a^b)$ output COMPOSITE
2. $r \ = \min\{a : o_a(n) > \log^2 n\}$
3. if $(\exists \ a \le r: \ 1 < \gcd(a, n) < n)$ output COMPOSITE
4. if $(n \le r)$ output PRIME
5. for $a = 1$ to $\lfloor \sqrt{\varphi(r)} \log n \rfloor$ do

   if $((X + a)^n \ne X^n + a (\mathrm{mod}\ X^r - 1, n))$ output COMPOSITE
6. output PRIME

Обозначения

$\varphi(r) = \left|Z_r^*\right|$ - ф. Эйлера

$o_m(n) = \min\{k : n^k \equiv 1 (\mathrm{mod}\, m)\}$

$LCM(m)$ - НОК всех $i \le m$

p - простое, $p|n$, $p>r$

$l = \left\lfloor \sqrt{\varphi(r)} \log n \right\rfloor$

$$I = \left\{ \left(\frac{n}{p}\right)^i p^j : i, j \ge 0 \right\}$$

$$P = \left\{ \Pi_{a=0}^{l} (X+a)^{e_a} : e_a \ge 0 \right\}$$

G подгруппа Z_r^*, порожденная I,

$t = \left|G\right| > \log^2 n$

$Q_r(X)$ - r-й циклотомический многочлен над F_p

$h(X)$ - неприводимый множитель $Q_r(X)$, $o_r(p) = \deg(h(X)) > 1$

$F = F_p[X]/(h(X))$ - кольцо вычетов по модулю p и $h(X)$

Γ подгруппа F, порожденная P

Доказательство корректности

Теорема 3.1.

Алгоритм возвращает PRIME $\Leftrightarrow$ n – простое.

Лемма 3.2.

Если n – простое, то алгоритм возвращает PRIME.

Доказательство корректности

Определение 3.3.

Пусть $f(X)$ – полином, $m \in N$.

m называется интроспективным к $f(X)$, если

$$[f(X)]^m = f(X^m) \pmod{X^r - 1, p}.$$

Лемма 3.4.

Если m_1 и m_2 интроспективные к $f(X)$ и $g(X)$, то

1. $m_1 m_2$ интроспективное к $f(X)$,
2. m_1 интроспективное к $f(X)g(X)$.

Доказательство корректности

Лемма 3.5.(Hendric Lenstra Jr.)

$$|\Gamma| \geq \binom{t+l}{t-1}$$

Лемма 3.6.

Если n не является степенью простого числа p, то $|\Gamma| \leq n^{\sqrt{t}}$

Лемма 3.7.

Если алгоритм возвращает PRIME, то n - простое.

Если не запомните ничего другого

- Существует полиномиальный алгоритм проверки простоты числа
- Идея алгоритма:

$$n \text{ - простое} \Leftrightarrow (X+a)^n \equiv X^n + a (\mathrm{mod}\, n)$$

- Доказано, что алгоритм работает корректно и за время $\tilde{O}(\log^{15/2} n)$

Источники

- M.Agrawal, N.Kayal, N.Saxena «PRIMES is in P»
- А.Черемушкин «Лекции по арифметическим алгоритмам в криптографии»
- П.Ноден, К.Китте «Алгебраическая алгоритмика»
- Т.Кормен, Ч.Лейзерсон, Р.Ривест «Алгоритмы: построение и анализ»