

Лекция 1. Математические методы планирования риска


Содержание лекции:

1. Функция полезности в условиях риска
2. Оптимальное планирование в условиях риска
3. Подготовка исходных данных о риске
4. Моделирование многоэтапного процесса принятия решений



Литература

- Моделирование рискованных ситуаций в экономике и бизнесе : Учеб. пособие / *А.М. Дубров, Б.А. Лагоша, Е.Ю. Хрусталёв, Т.П. Барановская*; Под ред. *Б.А. Лагоши*. - 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2003.
- Управление фирмой / Под ред. *Л.Л. Разумновой*. М.: МАКС Пресс, 2009. — Часть 2, с. 6-11.
- *Баумоль У.* Экономическая теория и исследование операций. М.: Прогресс, 1965.
- *Нейман Дж., Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1970.
- *Фридмен М., Сэвидж Л.Дж.* Анализ полезности при выборе среди альтернатив, предполагающих риск // Теория потребительского поведения и спроса: Вехи экономической мысли: Вып. 1. СПб.: Экономическая школа, 1993. – с. 208-249.
- *Светлов Н.М., Светлова Г.Н.* Построение и решение оптимизационных моделей средствами программ MS Excel и XA: Методические указания для студентов экономического факультета / РГАУ – МСХА имени К. А. Тимирязева. М., 2005. http://svetlov.timacad.ru/umk1/xa_1.doc
- *Arrow K.J.* Essays in the theory of risk-bearing. Chicago: Markham, 1971.
- *Pratt J.W.* Risk aversion in the small and in the large // *Econometrica*, 1964, v.32, p.122-136.



1.1. Функция полезности в условиях риска

Пусть имеется три варианта ведения бизнеса:

	Прибыль		
	Исход 1	Исход 2	Исход 3
Вариант A	100	100	100
Вариант B	300	150	-150
Вариант C	450	100	-200

Какой вариант предпочесть?
(предположим, что исходы равновероятны)



1.1.

- Наименьший возможный убыток – вариант **A** (безубыточен, прибыль не менее 100 ед.)
- Наибольшая возможная прибыль – вариант **C** (450 ед.)
- Наибольшее математическое ожидание прибыли – вариант **C** (117 ед.)
- Наибольшее математическое ожидание прибыли при условии безубыточности – вариант **A** (100 ед.)



1.1.

Существует ли общее правило выбора?

- Ответ Дж. фон Неймана и О. Morgenштерна: **Да.**

Пусть вариант выбора описывается парой векторов $(\$,\mathbf{p})$, где $\$$ — значения прибыли (убытка), \mathbf{p} — их вероятности

Тогда общее правило выбора в условиях риска может быть построено на следующих пяти аксиомах:

1. *Предпочтения между вариантами обладают полнотой и транзитивностью:*
 - для любых $(\$,\mathbf{p})_1$ и $(\$,\mathbf{p})_2$ непременно имеет место одно из следующего: $(\$,\mathbf{p})_1 \succ (\$,\mathbf{p})_2$; $(\$,\mathbf{p})_1 \prec (\$,\mathbf{p})_2$; $(\$,\mathbf{p})_1 \sim (\$,\mathbf{p})_2$;
 - если $(\$,\mathbf{p})_1 \succ (\$,\mathbf{p})_2$ и $(\$,\mathbf{p})_2 \succ (\$,\mathbf{p})_3$, то $(\$,\mathbf{p})_1 \succ (\$,\mathbf{p})_3$; для \prec и \sim аналогично



1.1.

2. *Для рискового выбора существует безрисковый эквивалент:*
Пусть $\$1 > \$2 > \$3$. Тогда существует такая вероятность p , что $((\$1, \$3), (p, 1-p)) \sim \$2$
3. *Если два выбора равноценны, то любой выбор между этими двумя выборами равноценен каждому из них:*
Пусть $(\$1, p_1) \sim (\$2, p_2)$. Тогда для любой p_0 имеет место
 $((\$1, p_1), (\$2, p_2), (p_0, 1-p_0)) \sim (\$1, p_1)$
4. *Если два выбора приносят одинаковые прибыли при вероятных исходах, предпочтительнее тот, в котором исход с большей прибылью вероятнее:*
Для любых $A = ((\$1, \$2), (p_1, 1-p_1))$ и $B = ((\$1, \$2), (p_2, 1-p_2))$, где $\$1 > \2 , предпочтение $A \succ B$ имеет место только тогда, когда $p_1 > p_2$.



1.1.

5. Существует правило задания выбора, равноценного любому выбору между выборами:

Пусть даны $A_1 = (\$1, \mathbf{p}_1)$, $A_2 = (\$2, \mathbf{p}_2)$, ..., $A_n = (\$n, \mathbf{p}_n)$ и $A_0 = ((A_1 \dots A_n), (p_{01} \dots p_{0n}))$.

Положим, что

$B = ((\$1 | \$2 | \dots | \$n), (p_{01} \mathbf{p}_1 | p_{02} \mathbf{p}_2 | \dots | p_{0n} \mathbf{p}_n))$.

Тогда $A_0 \sim B$.



1.1.

Аксиомам Неймана-Моргенштерна отвечает правило принятия решения следующего вида:

$(\$_1, p_1) \succ (\$_2, p_2)$, если $f(\$_1)p_1 > f(\$_2)p_2$,
где $f(\$)$ – функция отношения индивида к риску (функция полезности).

В экономических приложениях $f(\$)$ возрастающая и выпуклая:

- ♦ возрастание обозначает, что большая прибыль предпочтительнее малой;
- ♦ выпуклость обозначает, что меньший риск предпочтительнее большего риска



1.1.

Функция $u(\cdot)$ выпукла, если из $\alpha \in (0,1)$ следует

$$u(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geq \alpha u(x_1) + (1-\alpha)u(x_2).$$



1.1.

Неприятие риска
(*risk aversion*):

$$-\frac{d^2f(\$)}{d\$^2} \cdot \frac{df(\$)}{d\$}$$



1.1.

Примеры подходящих $f(\$)$:	
Функция	Неприятие риска
$\log_n(\$)$	$1/\$$
$\$^{(1-k)} / (1-k)$	$k/\$,$ где $k \neq 1$
$\sqrt{\$}$	$1/(2\$)$
$\ln(1+\$/k)$ (функция Бернулли)	$1/(k+\$)$
$\$$	0
$-(1/k)^{\$}+1$	$\ln(k)$ (не зависит от $\$$)



1.1.

	Прибыль		
	Исход 1	Исход 2	Исход 3
Вариант А	100	100	100
Вариант В	300	150	-150
Вариант С	450	100	-200

Пусть $f(\$) = -(1/k)^{\$} + 1$,

т.е. неприятие риска не зависит от \$.

Тогда ЛПР, неприятие риска которого выше, чем 0.00047, выберет вариант А

ЛПР с неприятием риска ниже этой величины выберет вариант С

Вариант В не выберет ни один субъект с возрастающей выпуклой функцией полезности

(желающие могут попробовать это доказать, основываясь на аксиомах Неймана-Моргенштерна)

1.2. Оптимальное планирование в условиях риска

	Пушки	Масло	
			Всего
Бюджет	20	5	10000
			Вероятность
Прибыль, мир	-2	2	0.95
Прибыль, война	10	1	0.05

Найти оптимальный план производства пушек и масла, основываясь на данных, приведённых в таблице. Неприятие риска не зависит от прибыли.

Решение: $\max(0.95f(\$_1) + 0.05f(\$_2) \mid \$_1 = -2x_1 + 2x_2; \$_2 = 10x_1 + 1x_2; 20x_1 + 5x_2 \leq 10000)$, где $f(\$) = -(1/e^r)^\$ + 1$ (решение следует получить при всех r , т.к. о них в условии не сказано).

Ответ: при любом неприятии риска (т.е. r) пушки производить не следует, масло выпускается в количестве 2000 ед.



1.2.

	Пушки	Масло	
			Всего
Бюджет	20	5	10000
			Вероятность
Прибыль, мир	-2	2	0.05
Прибыль, война	10	1	0.95

Решение: $\max(0.05f(\$_1) + .95f(\$_2) \mid \$_1 = -2x_1 + 2x_2; \$_2 = 10x_1 + 1x_2; 20x_1 + 5x_2 \leq 10000)$, где $f(\$) = -(1/e^r)^{\$} + 1$ (решение следует получить при всех r , т.к. о них в условии не сказано).

Ответ при $r = 0,01$: пушек 0 ед., масла 2000 ед.

Ответ при $r = 0,003$: пушек 175,7 ед., масла 1297,2 ед.


Ответ при $r = 0,001$: пушек 277,1 ед., масла 891,6 ед.

Ответ при $r = 0,0006$: пушек 378,5 ед., масла 486,0 ед.

Ответ при $r = 0,00042$: пушек 487,1 ед., масла 51,4 ед.


Ответ при $r = 0,0004$: пушек 500 ед., масла 0 ед.

Ответ при $r = 0,0001$: пушек 500 ед., масла 0 ед.




1.3. Подготовка исходных данных о риске

- Вероятность исходов
 - ◆ Статистика
 - ◆ В скольких процентах случаев при реализации коммерческих проектов цены на продукцию оказывались ниже ожидаемых на 20 и более процентов
 - ◆ Теоретические модели исследуемого процесса
 - ◆ Вероятность того, что запросы на поставку прокатных станов поступят одновременно от 3 и более компаний, так что некоторым из них придётся отказать, подчиняется распределению Пуассона
 - ◆ Опрос экспертов
 - ◆ Если другие способы не работают
- Функция полезности
- Неприятие риска




1.3. Подготовка исходных данных о риске

- Вероятность исходов
- Функция полезности
 - ◆ Форму функции полезности почти никогда не удаётся определить эмпирически
 - ⇒ Поэтому обычно используют функцию с постоянным абсолютным или относительным неприятием риска
 - ⇒ Таким способом можно моделировать выбор только *в окрестности фактического состояния* моделируемой системы
- Неприятие риска



1.3. Подготовка исходных данных о риске

- Вероятность исходов
- Функция полезности
- Неприятие риска
 - ◆ Анкетирование ЛПР
 - ◆ В анкете представлены пары ситуаций вида $((\$_1, \$_2), (p_1, p_2))$, из которых ЛПР выбирает те, которые ему представляются более привлекательными
 - ◆ На основе данных анкетирования подбираются параметры функции полезности
 - метод наименьших квадратов (OLS)
 - ◆ Исключение убытка
 - ◆ функция полезности не требуется
 - ◆ не всегда возможно



1.4. Моделирование многоэтапного процесса принятия решений

Туроператор располагает 200 тыс.у.е. инвестиционных ресурсов, которые может вложить в развитие инфраструктуры горнолыжного курорта в Альпах или гостиницы на Гавайях.

Потоки туристов зависят от погоды в Альпах: если снег опять не выпадет до января (вероятность 50%), на отдых в Альпах будет 1 тыс. заявок, иначе – 3 тыс.; на Гавайях, соответственно, - 2,5 тыс. и 1,5 тыс.

Имеется 2 тыс. мест в Альпах и 1 тыс. мест на Гавайях. Создание одного места в Альпах требует 90 у.е., на Гавайях – 110 у.е. **Приведённый** доход от 1 клиента в расчёте на один год в Альпах – 45 у.е. при горнолыжной погоде и 30 у.е. при обычной, на Гавайях – 40 у.е.


Если места в Альпах кончились, клиент соглашается на отдых на Гавайях при снижении дохода вдвое против «альпийского», и наоборот.

Горизонт планирования – 3 года.

Найти:

- ♦ план распределения инвестиционных ресурсов;
- ♦ план расселения клиентов по курортам в зависимости от погоды,

максимизирующий приведённый доход туроператора за вычетом инвестиций.



Решаем задачу.

1.4.

1. Переменные:

- Априорное решение (когда погода неизвестна):
 - инвестиции в гостиничные места на Альпах (у.е.) – x_{01}
 - инвестиции в гостиничные места на Гавайях (у.е.) – x_{02}
- Апостериорные решения (для «нелыжной» и «лыжной» погоды)
 - клиенты, подавшие заявки на Альпы, чел.:
 - попавшие в Альпы – x_{11} и x_{21}
 - переведённые на Гавайи – x_{12} и x_{22}
 - клиенты, подавшие заявки на Гавайи, чел.:
 - попавшие на Гавайи – x_{13} и x_{23}
 - переведённые в Альпы – x_{14} и x_{24}

2. Ограничения:

- Общий объём инвестиций, у.е.: $x_{01} + x_{02} \leq 200\,000$
- «Нелыжная» погода:
 - мест на Альпах должно хватить всем (чел.): $x_{11} + x_{14} \leq 2000 + x_{01} / 90$
 - мест на Гавайях должно хватить всем (чел.): $x_{12} + x_{13} \leq 1000 + x_{02} / 110$
 - всех подавших заявки на Альпы необходимо обслужить (чел.):
 $x_{11} + x_{12} = 1000$
 - всех подавших заявки на Гавайи необходимо обслужить (чел.):
 $x_{13} + x_{14} = 2500$
- «Лыжная» погода:
 - составляется аналогично, только цифры другие и переменные апостериорного решения относятся к другому исходу.



1.4.

Решаем задачу (cont.)

3. Целевая функция:

- максимум *математического ожидания* дохода, у.е.:
$$3 \cdot (0,5 \cdot (30x_{11} + (30/2)x_{12} + 40x_{13} + (40/2)x_{14}) + \\ + 0,5 \cdot (45x_{21} + (45/2)x_{22} + 40x_{23} + (40/2)x_{24})) - \\ - (x_{01} + x_{02})$$

- NB: *здесь принято нулевое неприятие риска*; в противном случае:

- $$0,5 \cdot f(3 \cdot (30x_{11} + (30/2)x_{12} + 40x_{13} + (40/2)x_{14}) - (x_{01} + x_{02})) + \\ + 0,5 \cdot f(3 \cdot (45x_{21} + (45/2)x_{22} + 40x_{23} + (40/2)x_{24}) - (x_{01} + x_{02}))$$

$f(\cdot)$ – функция полезности

Задача в этом случае становится нелинейной.

Решаем задачу (cont.)

1.4.

I
этап

(незави-
симо от
погоды)

II
этап

(когда
станет
известно,
какая
погода)

- Результат (для случая нулевого неприятия риска):
 - ◆ 90 тыс. у.е. вкладываем в Альпы (строим 1000 мест)
 - ◆ 55 тыс. у.е. вкладываем в Гавайи (строим 500 мест)
 - ◆ 55 тыс. у.е. инвестиционных ресурсов остаются неизрасходованными при «нелыжной» погоде:
 - ◆ всех желающих ехать в Альпы размещаем в Альпах (1000 чел.);
 - ◆ из 2500 желающих отдыхать на Гавайях 1500 (по числу мест) отправляем на Гавайи, остальные 1000 едут с огромными скидками на Альпы дышать свежим воздухом;
 - ◆ при «лыжной» погоде:
 - ◆ все желающие ехать в Альпы (3000 чел.) едут в Альпы;
 - ◆ все желающие ехать на Гавайи (1500 чел.) едут на Гавайи
 - ◆ математическое ожидание дохода (за вычетом инвестиций) составляет 312,5 тыс. у.е.

Если бы туроператор не боялся потерять клиентскую базу и отказал части клиентов в «лыжную» погоду, доход за вычетом инвестиций мог бы стать ещё больше (335 тыс. у.е.). В этом случае инвестируется только 55 тыс. у.е. в гостиницы на Гавайях.

Планы для других вероятностей «лыжной» погоды предлагаю составить самостоятельно.