Лекция 1. **Математические методы планирования риска**

Содержание лекции:

1. Функция полезности в условиях риска
2. Оптимальное планирование в условиях риска
3. Подготовка исходных данных о риске
4. Моделирование многоэтапного процесса принятия решений

Литература

- Моделирование рисковых ситуаций в экономике и бизнесе : Учеб. пособие / *А.М. Дубров, Б.А. Лагоша, Е.Ю. Хрусталёв, Т.П. Барановская*; Под ред. *Б.А. Лагоши*. - 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2003.
- Управление фирмой / Под ред. *Л.Л. Разумновой*. М.: МАКС Пресс, 2009. — Часть 2, с. 6-11.
- *Баумоль У.* Экономическая теория и исследование операций. М.: Прогресс, 1965.
- *Нейман Дж., Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1970.
- *Фридмен М., Сэвидж Л.Дж.* Анализ полезности при выборе среди альтернатив, предполагающих риск // Теория потребительского поведения и спроса: Вехи экономической мысли: Вып. 1. СПб.: Экономическая школа, 1993. – с. 208-249.
- *Светлов Н.М., Светлова Г.Н.* Построение и решение оптимизационных моделей средствами программ MS Excel и XA: Методические указания для студентов экономического факультета / РГАУ – МСХА имени К. А. Тимирязева. М., 2005. http://svetlov.timacad.ru/umk1/xa_1.doc
- *Arrow K.J.* Essays in the theory of risk-bearing. Chicago: Markham, 1971.
- *Pratt J.W.* Risk aversion in the small and in the large // Econometrica, 1964, v.32, p.122-136.

1.1. Функция полезности в условиях риска

Пусть имеется три варианта ведения бизнеса:

	Прибыль		
	Исход **1**	Исход **2**	Исход **3**
Вариант A	100	100	100
Вариант B	300	150	-150
Вариант C	450	100	-200

Какой вариант предпочесть?

(предположим, что исходы равновероятны)

1.1.

- Наименьший возможный убыток – вариант A (безубыточен, прибыль не менее 100 ед.)
- Наибольшая возможная прибыль – вариант C (450 ед.)
- Наибольшее математическое ожидание прибыли – вариант C (117 ед.)
- Набольшее математическое ожидание прибыли при условии безубыточности – вариант A (100 ед.)

1.1. Существует ли общее правило выбора?

- Ответ Дж. фон Неймана и О. Моргенштерна: **Да.**

Пусть вариант выбора описывается парой векторов (**$**,**p**), где **$** — значения прибыли (убытка), **p** — их вероятности

Тогда общее правило выбора в условиях риска может быть построено на следующих пяти аксиомах:

1. *Предпочтения между вариантами обладают полнотой и транзитивностью*:
– для любых $(\$,p)_1$ и $(\$,p)_2$ непременно имеет место одно из следующего: $(\$,p)_1 \succ (\$,p)_2$; $(\$,p)_1 \prec (\$,p)_2$; $(\$,p)_1 \sim (\$,p)_2$;
– если $(\$,p)_1 \succ (\$,p)_2$ и $(\$,p)_2 \succ (\$,p)_3$, то $(\$,p)_1 \succ (\$,p)_3$; для $\prec$ и ~ аналогично

1.1.

2. *Для рискового выбора существует безрисковый эквивалент*:
   Пусть $\$_1 > \$_2 > \$_3$. Тогда существует такая вероятность p, что $((\$_1,\$_3),(p,1-p)) \sim \$_2$
3. *Если два выбора равноценны, то любой выбор между этими двумя выборами равноценен каждому из них*:
   Пусть $(\mathbf{\$}_1,\mathbf{p}_1) \sim (\mathbf{\$}_2,\mathbf{p}_2)$. Тогда для любой p_0 имеет место
   $(((\mathbf{\$}_1,\mathbf{p}_1),(\mathbf{\$}_2,\mathbf{p}_2)),(p_0,1-p_0)) \sim (\mathbf{\$}_1,\mathbf{p}_1)$
4. *Если два выбора приносят одинаковые прибыли при вероятных исходах, предпочтительнее тот, в котором исход с большей прибылью вероятнее:*
   Для любых $A = ((\$_1,\$_2),(p_1,1-p_1))$ и $B = ((\$_1,\$_2), (p_2,1-p_2))$, где $\$_1 > \$_2$, предпочтение $A \succ B$ имеет место только тогда, когда $p_1 > p_2$.

1.1.

5. *Существует правило задания выбора, равноценного любому выбору между выборами*:
Пусть даны $A_1 = (\mathbf{\$}_1,\mathbf{p}_1)$, $A_2 = (\mathbf{\$}_2,\mathbf{p}_2)$, …, $A_n = (\mathbf{\$}_n,\mathbf{p}_n)$ и $A_0 = ((A_1 \ldots A_n), (p_{01} \ldots p_{0n}))$.
Положим, что
$B = ((\mathbf{\$}_1|\mathbf{\$}_2|\ldots|\mathbf{\$}_n), (p_{01}\mathbf{p}_1|p_{02}\mathbf{p}_2|\ldots|p_{0n}\mathbf{p}_n))$.
Тогда $A_0 \sim B$.

1.1.

Аксиомам Неймана-Моргенштерна отвечает правило принятия решения следующего вида:

$(\$_1, \mathbf{p}_1) \succ (\$_2, \mathbf{p}_2)$, если $f(\$_1)\mathbf{p}_1 > f(\$_2)\mathbf{p}_2$, где $f(\$)$ – функция отношения индивида к риску (функция полезности).

В экономических приложениях $f(\$)$ возрастающая и выпуклая:

- возрастание обозначает, что большая прибыль предпочтительнее малой;
- выпуклость обозначает, что меньший риск предпочтительнее большего риска

1.1.

Функция u (.) выпукла, если из α O (0,1) следует

$$u\,(\alpha x\breve{y} + (1-\alpha)x\breve{y}\breve{y}) \geq \alpha u\,(x\breve{y}) + (1-\alpha)\,u\,(x\breve{y}\breve{y}).$$

1.1.

Неприятие риска (*risk aversion*):

$$-\frac{d^2 f(\$)}{d\$^2} : \frac{df(\$)}{d\$}$$

1.1.

Примеры подходящих $f(\$)$:	
Функция	Неприятие риска
$\log_n(\$)$	$1/\$$
$\$^{(1-k)}/(1-k)$	$k/\$$, где $k \neq 1$
$\sqrt{\$}$	$1/(2\$)$
$\ln(1+\$/k)$ (функция Бернулли)	$1/(k+\$)$
$\$$	0
$-(1/k)^{\$}+1$	$\ln(k)$ (не зависит от $\$$)

1.1.

	Прибыль		
	Исход **1**	Исход **2**	Исход **3**
Вариант A	100	100	100
Вариант B	300	150	-150
Вариант C	450	100	-200

- Пусть $f(\$) = -(1/k)^{\$}+1$,
  - т.е. неприятие риска не зависит от $\$$.
- Тогда ЛПР, неприятие риска которого выше, чем 0.00047, выберет вариант A
- ЛПР с неприятием риска ниже этой величины выберет вариант C
- Вариант B не выберет ни один субъект с возрастающей выпуклой функцией полезности
  - (желающие могут попробовать это доказать, основываясь на аксиомах Неймана-Моргенштерна)

1.2. Оптимальное планирование в условиях риска

	Пушки	Масло	
			Всего
Бюджет	20	5	10000
			Вероятность
Прибыль, мир	-2	2	0.95
Прибыль, война	10	1	0.05

Найти оптимальный план производства пушек и масла, основываясь на данных, приведённых в таблице. Неприятие риска не зависит от прибыли.

Решение: $\max(0.95f(\$_1)+.05f(\$_2) \mid \$_1=-2x_1+2x_2;\ \$_2=10x_1+1x_2;\ 20x_1+5x_2 \le 10000)$, где $f(\$) = -(1/e^{r})^{\$}+1$ (решение следует получить при всех r, т.к. о них в условии не сказано).

Ответ: при любом неприятии риска (т.е. r) пушки производить не следует, масло выпускается в количестве 2000 ед.

1.2.

	Пушки	Масло	
			Всего
Бюджет	20	5	10000
			Вероятность
Прибыль, мир	-2	2	0.05
Прибыль, война	10	1	0.95

Решение: $\max(0.05f(\$_1)+.95f(\$_2) \mid \$_1=-2x_1+2x_2;\ \$_2=10x_1+1x_2;\ 20x_1+5x_2 \le 10000)$, где $f(\$) = -(1/e^{r})^{\$}+1$ (решение следует получить при всех r, т.к. о них в условии не сказано).

Ответ при r = 0,01: пушек 0 ед., масла 2000 ед.

Ответ при r = 0,003: пушек 175,7 ед., масла 1297,2 ед.

Ответ при r = 0,001: пушек 277,1 ед., масла 891,6 ед.

Ответ при r = 0,0006: пушек 378,5 ед., масла 486,0 ед.

Ответ при r = 0,00042: пушек 487,1 ед., масла 51,4 ед.

Ответ при r = 0,0004: пушек 500 ед., масла 0 ед.

Ответ при r = 0,0001: пушек 500 ед., масла 0 ед.

1.3. Подготовка исходных данных о риске

- Вероятность исходов
  - Статистика
    - В скольких процентах случаев при реализации коммерческих проектов цены на продукцию оказывались ниже ожидаемых на 20 и более процентов
  - Теоретические модели исследуемого процесса
    - Вероятность того, что запросы на поставку прокатных станов поступят одновременно от 3 и более компаний, так что некоторым из них придётся отказать, подчиняется распределению Пуассона
  - Опрос экспертов
    - Если другие способы не работают
- Функция полезности
- Неприятие риска

1.3. Подготовка исходных данных о риске

- Вероятность исходов
- Функция полезности
  - Форму функции полезности почти никогда не удаётся определить эмпирически
    - ⇒ Поэтому обычно используют функцию с постоянным абсолютным или относительным неприятием риска
    - ⇒ Таким способом можно моделировать выбор только *в окрестности фактического состояния* моделируемой системы
- Неприятие риска

1.3. Подготовка исходных данных о риске

- Вероятность исходов
- Функция полезности
- Неприятие риска
  - Анкетирование ЛПР
    - В анкете представлены пары ситуаций вида (($\$_1$,$\$_2$),($p_1$,$p_2$)), из которых ЛПР выбирает те, которые ему представляются более привлекательными
    - На основе данных анкетирования подбираются параметры функции полезности
      - метод наименьших квадратов (OLS)
  - Исключение убытка
    - функция полезности не требуется
    - не всегда возможно

1.4. Моделирование многоэтапного процесса принятия решений

Туроператор располагает 200 тыс.у.е. инвестиционных ресурсов, которые может вложить в развитие инфраструктуры горнолыжного курорта в Альпах или гостиницы на Гавайях.

Потоки туристов зависят от погоды в Альпах: если снег опять не выпадет до января (вероятность 50%), на отдых в Альпах будет 1 тыс. заявок, иначе – 3 тыс.; на Гавайях, соответственно, - 2,5 тыс. и 1,5 тыс.

Имеется 2 тыс. мест в Альпах и 1 тыс. мест на Гавайях. Создание одного места в Альпах требует 90 у.е., на Гавайях – 110 у.е. **Приведённый** доход от 1 клиента в расчёте на один год в Альпах – 45 у.е. при горнолыжной погоде и 30 у.е. при обычной, на Гавайях – 40 у.е.

Если места в Альпах кончились, клиент соглашается на отдых на Гавайях при снижении дохода вдвое против «альпийского», и наоборот.

Горизонт планирования – 3 года.

Найти:

- план распределения инвестиционных ресурсов;
- план расселения клиентов по курортам в зависимости от погоды,

максимизирующий приведённый доход туроператора за вычетом инвестиций.

1.4.

Решаем задачу.

1. Переменные:
   - Априорное решение (когда погода неизвестна):
     - инвестиции в гостиничные места на Альпах (у.е.) – x_{01}
     - инвестиции в гостиничные места на Гавайях (у.е.) – x_{02}
   - Апостериорные решения (для «нелыжной» и «лыжной» погоды)
     - клиенты, подавшие заявки на Альпы, чел.:
       - попавшие в Альпы – x_{11} и x_{21}
       - переведённые на Гавайи – x_{12} и x_{22}
     - клиенты, подавшие заявки на Гавайи, чел.:
       - попавшие на Гавайи – x_{13} и x_{23}
       - переведённые в Альпы – x_{14} и x_{24}
2. Ограничения:
   - Общий объём инвестиций, у.е.: $x_{01} + x_{02} \leq 200\,000$
   - «Нелыжная» погода:
     - мест на Альпах должно хватить всем (чел.): $x_{11} + x_{14} \leq 2000 + x_{01} / 90$
     - мест на Гавайях должно хватить всем (чел.): $x_{12} + x_{13} \leq 1000 + x_{02} / 110$
     - всех подавших заявки на Альпы необходимо обслужить (чел.): $x_{11} + x_{12} = 1000$
     - всех подавших заявки на Гавайи необходимо обслужить (чел.): $x_{13} + x_{14} = 2500$
   - «Лыжная» погода:
     - составляется аналогично, только цифры другие и переменные апостериорного решения относятся к другому исходу.

1.4.

Решаем задачу (cont.)

3. Целевая функция:
   - максимум *математического ожидания* дохода, у.е.:
     $3\cdot(\ 0{,}5\cdot(30x_{11} + (30/2)x_{12} + 40x_{13} + (40/2)x_{14}) +$
     $+0{,}5\cdot(45x_{21} + (45/2)x_{22} + 40x_{23} + (40/2)x_{24})\ ) -$
     $-(x_{01} + x_{02})$
   - NB: *здесь принято нулевое неприятие риска*; в противном случае:
     - $0{,}5\cdot f(3\cdot(30x_{11} + (30/2)x_{12} + 40x_{13} + (40/2)x_{14}) - (x_{01} + x_{02})) +$
       $+0{,}5\cdot f(3\cdot(45x_{21} + (45/2)x_{22} + 40x_{23} + (40/2)x_{24}) - (x_{01} + x_{02}))$

       $f(\cdot)$ – функция полезности

     Задача в этом случае становится нелинейной.

1.4.

I этап (независимо от погоды)

II этап (когда станет известно, какая погода)

Решаем задачу (cont.)

- Результат (для случая нулевого неприятия риска):
  - 90 тыс. у.е. вкладываем в Альпы (строим 1000 мест)
  - 55 тыс. у.е. вкладываем в Гавайи (строим 500 мест)
  - 55 тыс. у.е. инвестиционных ресурсов остаются неизрасходованными
  - при «нелыжной» погоде:
    - всех желающих ехать в Альпы размещаем в Альпах (1000 чел.);
    - из 2500 желающих отдыхать на Гавайях 1500 (по числу мест) отправляем на Гавайи, остальные 1000 едут с огромными скидками на Альпы дышать свежим воздухом;
  - при «лыжной» погоде:
    - все желающие ехать в Альпы (3000 чел.) едут в Альпы;
    - все желающие ехать на Гавайи (1500 чел.) едут на Гавайи
  - математическое ожидание дохода (за вычетом инвестиций) составляет 312,5 тыс. у.е.

Если бы туроператор не боялся потерять клиентскую базу и отказал части клиентов в «лыжную» погоду, доход за вычетом инвестиций мог бы стать ещё больше (335 тыс. у.е.). В этом случае инвестируется только 55 тыс. у.е. в гостиницы на Гавайях.

Планы для других вероятностей «лыжной» погоды предлагаю составить самостоятельно.