$$I_{\varphi} = A_0^2 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2$$

Найдем max и min I_φ

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad 2\frac{\sin\alpha}{\alpha}\left(\frac{\cos\alpha}{\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\alpha^2}\right) = 0$$

1. условие min:

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 0 \quad , \qquad \alpha \neq 0$$

2. условие max:

$$tg\alpha = \alpha$$

Итак, выражение для I_φ имеет:

1. Ряд эквидистантных min $I_\varphi = 0$ при $\alpha = m\pi,\ m = 1,2,3\ldots$

$$b \sin\varphi = m\lambda$$

2. Главный max $I_{max} = A_0^2$ при $\alpha = 0$

3. Вторичные max при α_m, являющихся корнями уравнения

$$tg\alpha = \alpha$$

Найдем эти корни:

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha_1 = 1{,}43\pi \\ \alpha_2 = 2{,}46\pi \\ \alpha_3 = 3{,}47\pi \\ \alpha_4 = 4{,}47\pi \ldots\end{array}\right\} \rightarrow \alpha_m = \frac{2m+1}{2}\pi$$

$$b \sin\varphi = (2m+1)\frac{\lambda}{2}$$

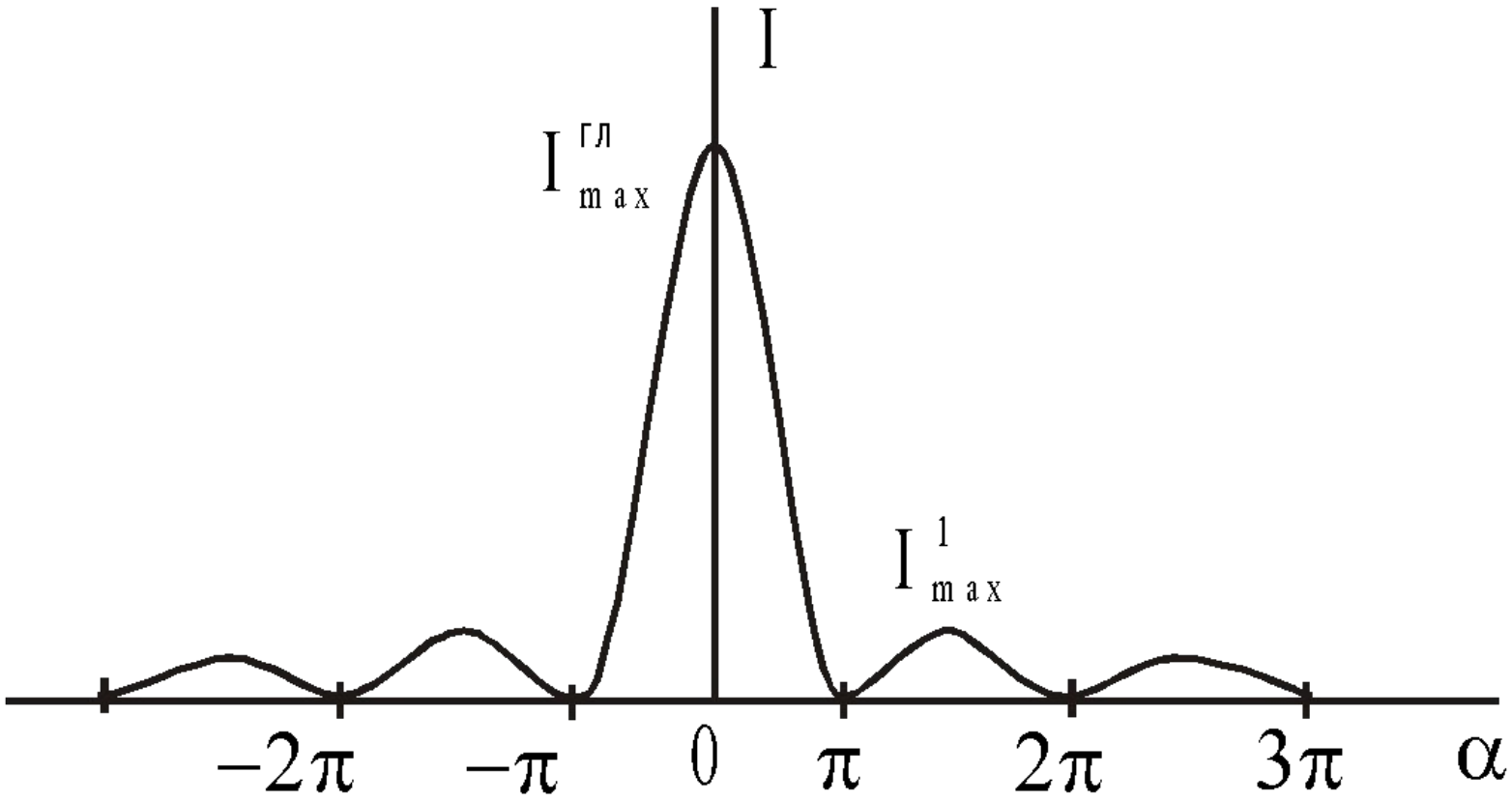
Таким образом, оба метода - аналитический и зон Френеля - дают практически один и тот же результат.

Найдем значения вторичных <u>max</u>

$$I_\varphi = A_0^2\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2$$ условие <u>max</u> $$\alpha = \left(m+\frac{1}{2}\right)\pi$$

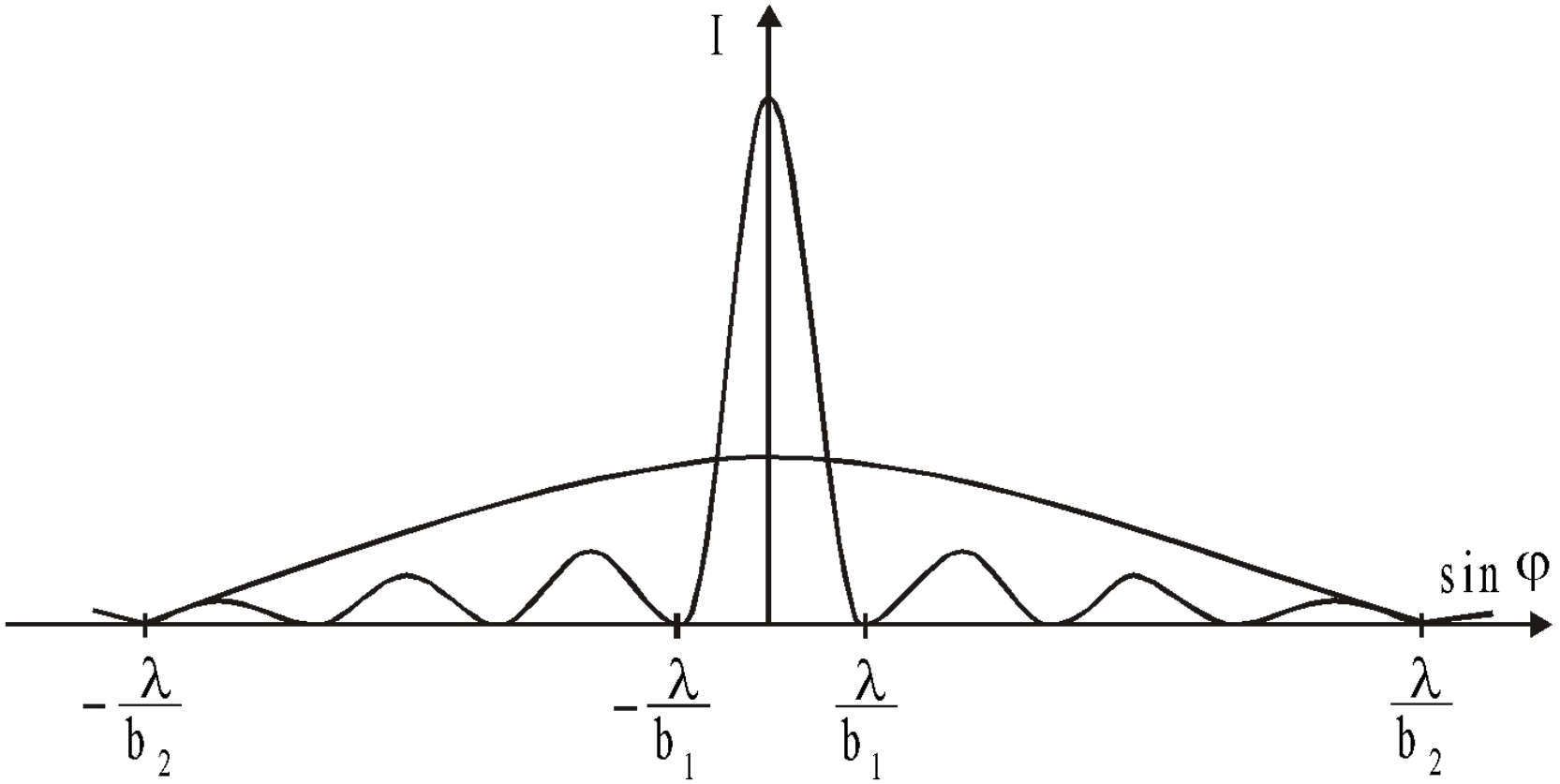
$$\sin\alpha = 1 \quad \rightarrow \quad I_{max}^{\text{втор}} = A_0^2\,\frac{1}{\alpha^2} = A_0^2\,\frac{4}{(2m+1)^2\pi^2} \quad \rightarrow \quad \frac{I_{max}^{\text{втор}}}{I_{max}^{\text{гл}}} = \frac{4}{(2m+1)^2\pi^2}$$

Пример: $$\frac{I_{max}^{1}}{I_{max}^{\text{гл}}} = \frac{1}{21}$$



Распределение интенсивности в дифракционной картине

Влияние ширины щели на дифракционную картину



$$sin\,\varphi_1 = \frac{\lambda}{b}$$

I.

$$b \le \lambda, \quad b = \lambda, \varphi_1 \to \frac{\pi}{2}$$

т.е. *min* в ∞ . (Это не совсем верно, т.к. при $b \le \lambda$ влияют края экрана. Представленная теория плохо работает).

II.

$b > \lambda$, $b \sim 10\lambda$

дифракционная картина отчетлива….

III.

$$b >> \lambda \;,\; sin\varphi = m\frac{\lambda}{b} \rightarrow \varphi \approx 0$$

Тогда *m* должно быть большим для получения дифракционной картины.

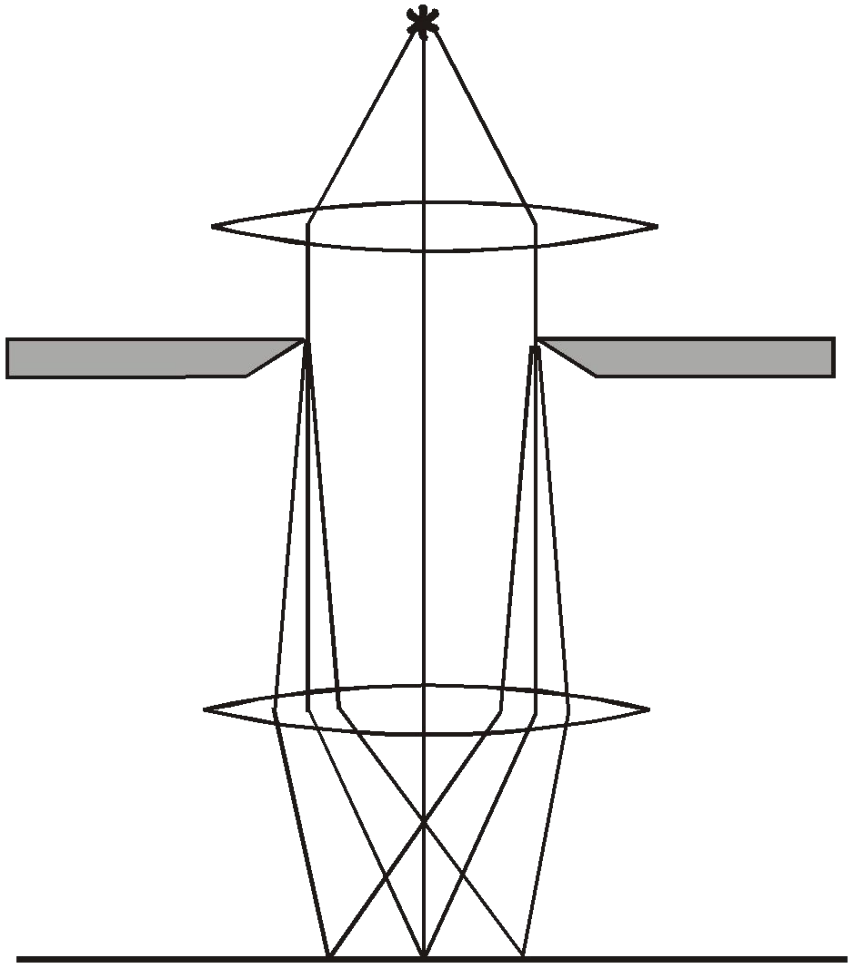
В этом случае могут наблюдаться только *max* высоких порядков, но их интенсивность ничтожна, т.е. дифракционная картина незаметна, наблюдается резкое изображение линейного источника

Дифракция Фраунгофера на круглом отверстии

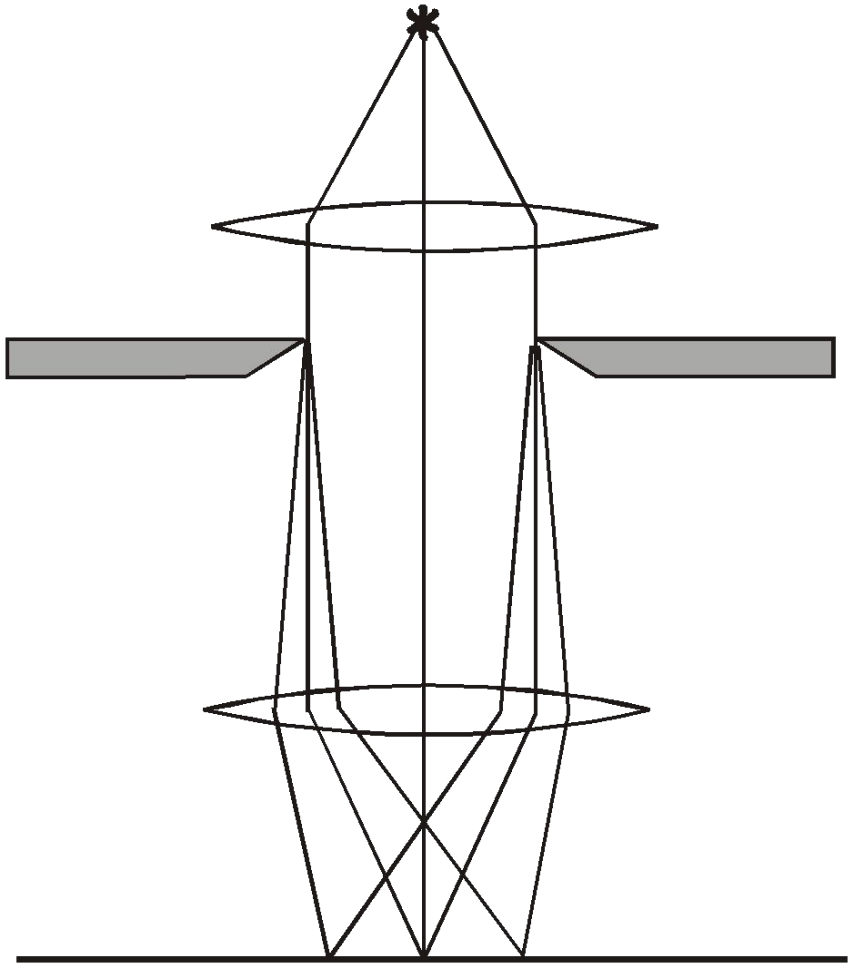
Имеет вид центрального светлого пятна, окрашенного чередующимися темными и светлыми кольцами. Первый *min* находится на угловом расстоянии от центра, равном:

$$sin\,\varphi_1 = 1{,}22\frac{\lambda}{D}$$

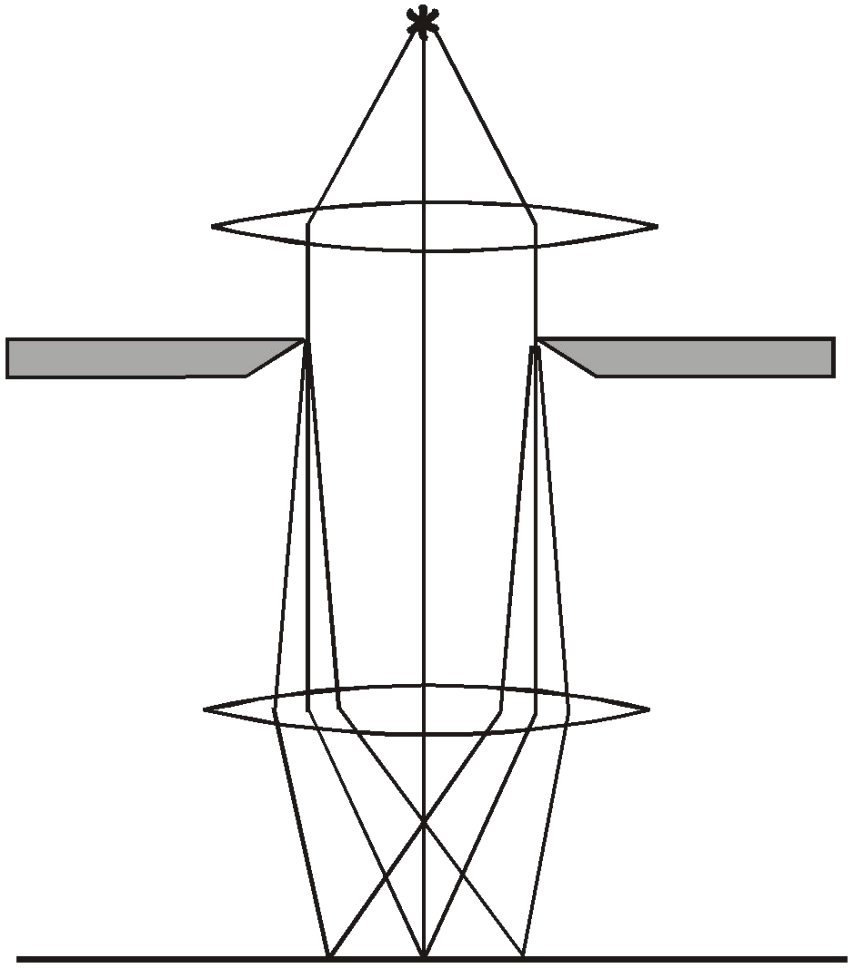
D - диаметр отверстия



При дифракции Фраунгофера в фокальной плоскости получаем не точечное изображение

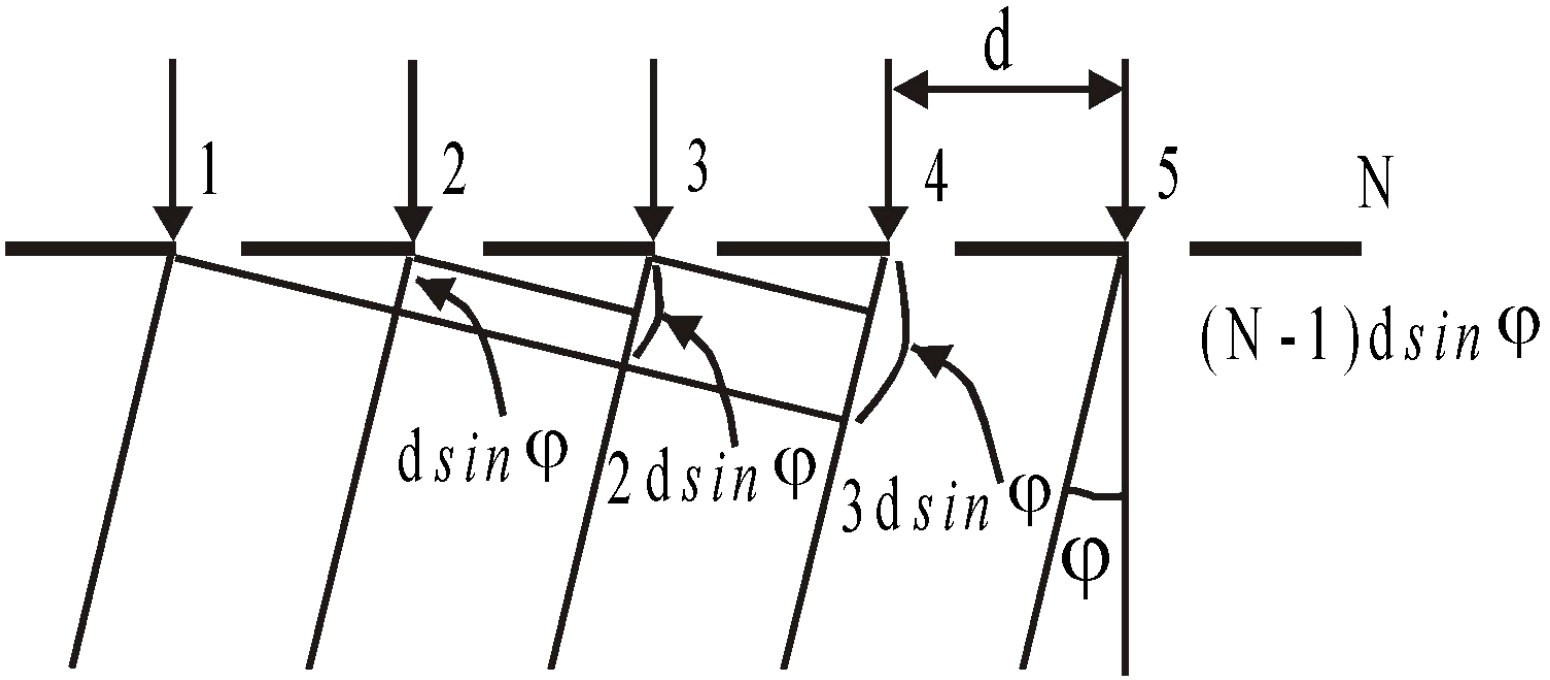


При $D \sim \lambda$ изображение точки расплывается по всему экрану.



При $D >> \lambda$ изображение близко к точечному.

Дифракционная решетка



Разность хода между крайними лучами щелей:

1-ой и 2-ой $\rightarrow d \sin\varphi$

1-ой и 3-ей $\rightarrow 2d \sin\varphi$

1-ой и 4-ой $\rightarrow 3d \sin\varphi$

1-ой и N-ой $\rightarrow (N-1)d \sin\varphi$

Поле, создаваемое 1-ым пучком, представим в виде:

$$E_1 = A_0 \frac{\sin\alpha}{\alpha} e^{-i\omega t}$$

Поля, создаваемые последующими пучками, будут иметь фазы, отличные от ωt

$$E_2 = A_0 \frac{\sin\alpha}{\alpha} e^{-i(\omega t - kd\sin\varphi)}$$

$$E_3 = A_0 \frac{\sin\alpha}{\alpha} e^{-i(\omega t - k\,2d\,\sin\varphi)}$$

. . . . . .

$$E_N = A_0 \frac{\sin\alpha}{\alpha} e^{-i[\omega t - k(N-1)d\,\sin\varphi]}$$

Интерференция пучков с одинаковой амплитудой, следовательно, для получения суммарного поля от всех щелей мы должны вычислить сумму

$$E = A_0 \frac{\sin\alpha}{\alpha} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i(\omega t - nkd\sin\varphi)} = A_0 \frac{\sin\alpha}{\alpha} e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{N-1} e^{in2\beta}$$

сумма геометр. прогрессии

где $kd\sin\varphi = 2\beta$

$$E = A_0 \frac{\sin\alpha}{\alpha} \frac{a_1\left(1-q^N\right)}{1-q} e^{-i\omega t} = A_0 \frac{\sin\alpha}{\alpha} \cdot \frac{1-e^{i2N\beta}}{1-e^{i2\beta}} e^{-i\omega t}$$

$$I = EE^* = A_0^2 \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \frac{1-e^{i2N\beta}}{1-e^{i2\beta}} \cdot \frac{1-e^{-i2N\beta}}{1-e^{-i2\beta}} = A_0^2 \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \frac{2-\left(e^{i2N\beta}+e^{-i2N\beta}\right)}{2-\left(e^{i2\beta}+e^{-i2\beta}\right)} =$$

$$= A_0^2 \left(\frac{sin\,\alpha}{\alpha}\right)^2 \cdot \frac{2-2\,cos\,2N\beta}{2-2\,cos\,2\beta} = A_0^2 \left(\frac{sin\,\alpha}{\alpha}\right)^2 \left(\frac{sin\,N\beta}{sin\,\beta}\right)^2 = I_1 \cdot I_2$$

$$I_1 \cdot I_2 = A_0^2 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \left(\frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \right)^2$$

где $$I_1 = A_0^2 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2$$

$$I_2 = \left(\frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \right)^2$$

$$\alpha = \frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda}$$

$$\beta = \frac{\pi d \sin \varphi}{\lambda}$$

Рассмотрим зависимости $I_1(\varphi)$ и $I_2(\varphi)$

Множитель $I_1(\varphi)$ совпадает с выражением для распределения интенсивности при дифракции на одной щели.

I_1 имеет главный *max* $I_{1max}^{\text{гл}} = A_0^2$ при $\alpha = 0$ т.е. $\varphi = 0$

I_1 имеет ряд эквидистантных *min* при $\alpha = \pm m\pi$ т.е. при

$$b \sin\varphi = \pm m\lambda \qquad I_{1min} = 0$$

I_1 имеет ряд побочных *max* при $\alpha = \pm\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi$ т.е. при

$$b \sin\varphi = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \qquad I_{1max}^{\text{побочн}} = \frac{A_0^2}{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2}$$

Рассмотрим $I_2(\varphi)$, определим *max* и *min*

$$\frac{d}{d\beta}\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad 2\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)\left(\frac{N\cos N\beta}{\sin\beta} - \frac{\sin N\beta\cos\beta}{\sin^2\beta}\right) = 0 \quad \rightarrow$$

либо $\sin N\beta = 0$ при $\sin\beta \neq 0$ (положение *min*),

либо $tgN\beta = Ntg\beta$ (положение *max*)

Уравнение $tgN\beta = Ntg\beta$

имеет алгебраический корень $\beta = \pm m\pi$,

где $m = 0,1,2,3...$

т.е. $d \sin\varphi = m\lambda$, т.к.

$\beta = \frac{\pi d \sin\varphi}{\lambda}$, $\rightarrow$ определяет

положение главных *max*.

Величина главных *max* $I_2 = \left(\frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \right)^2$

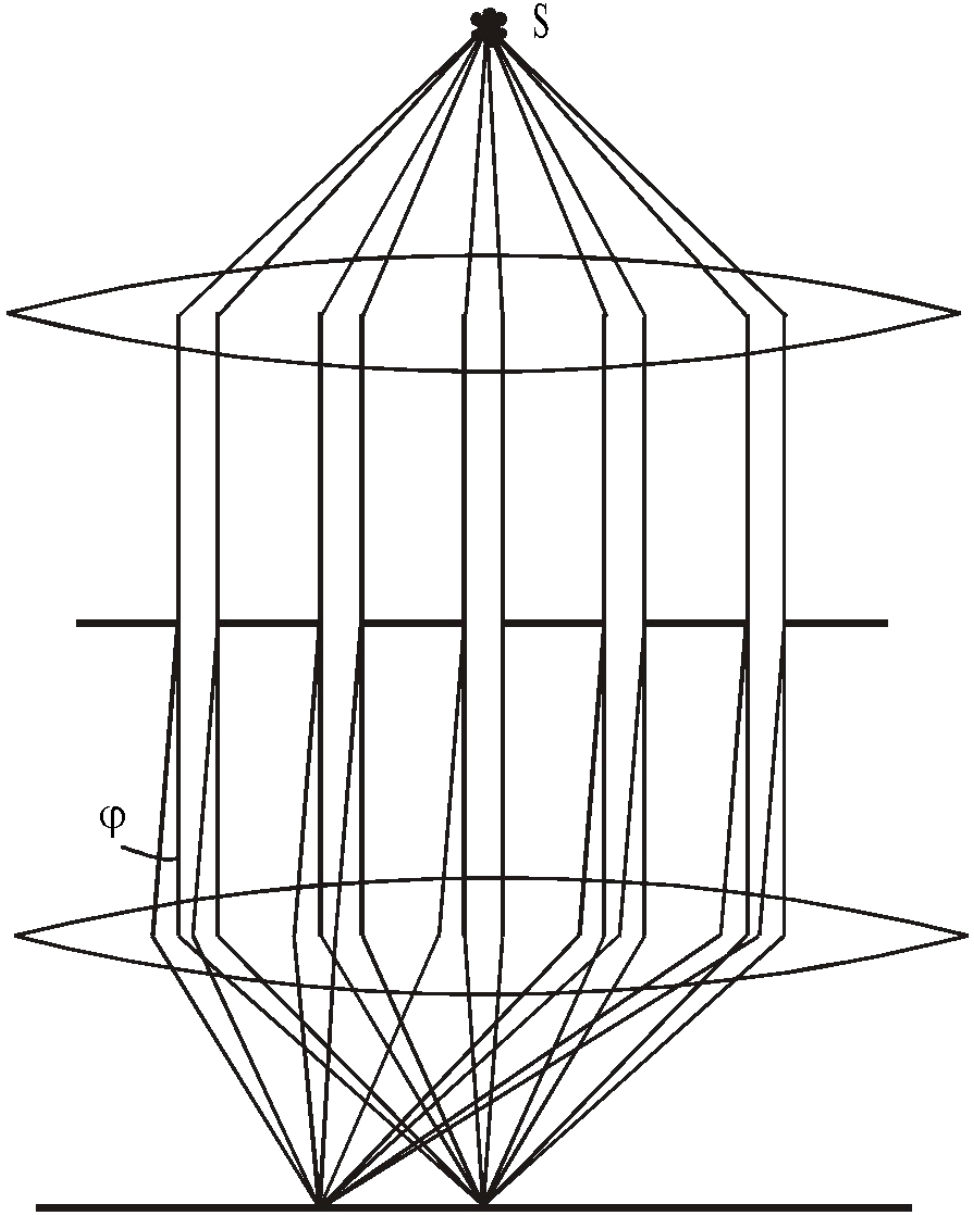
при $\beta = m\pi$ $\frac{\sin N\beta}{\sin \beta} = \frac{0}{0}$

раскроем неопределенность по правилу Лопеталя:

$$\left(\frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \right)'_{\beta=m\pi} = \left(\frac{N \cos N\beta}{\cos \beta} \right)_{\beta=m\pi} = \pm N$$

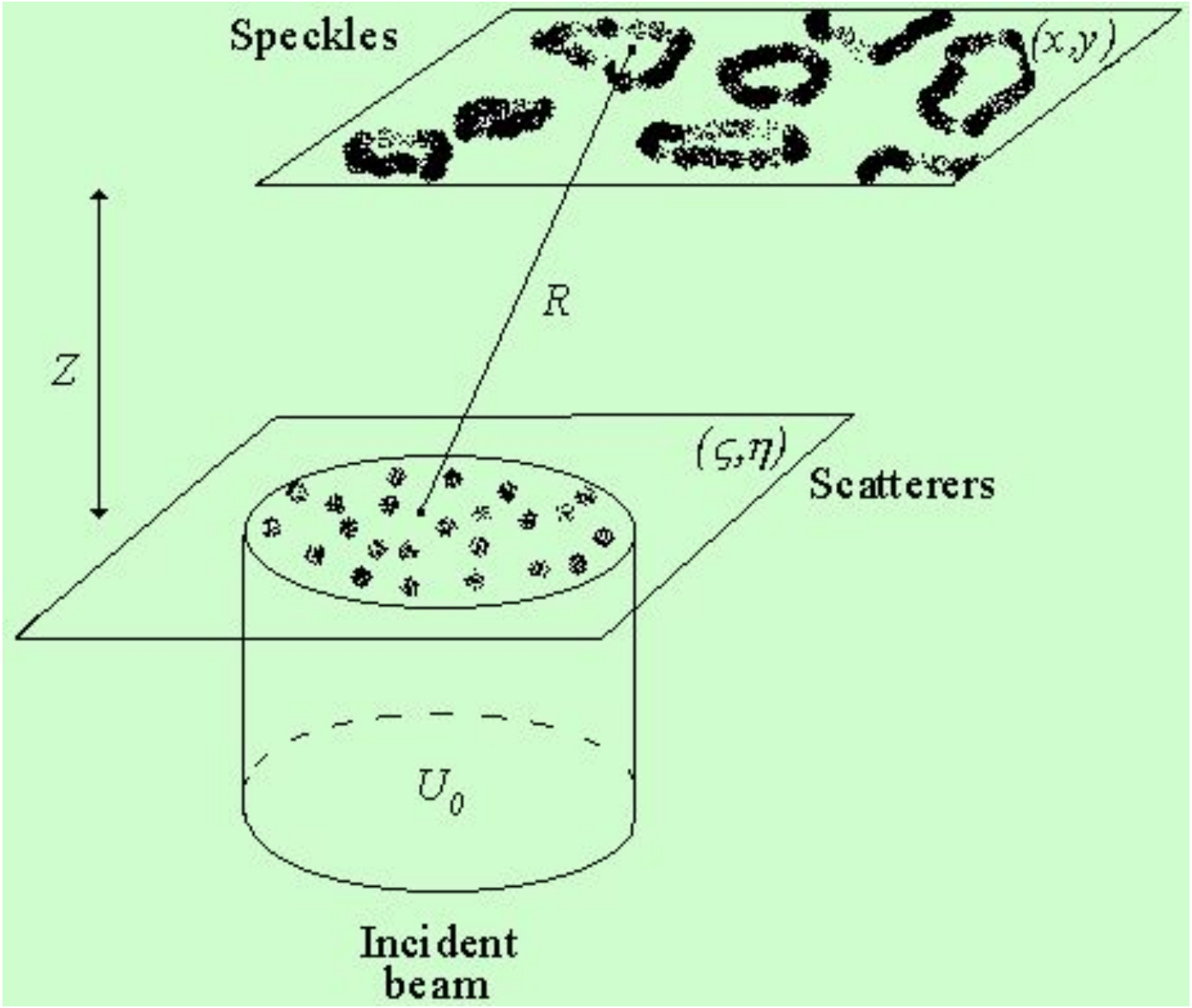
т.е. $I^{\text{гл}}_{2\,max} = \left(\frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \right)^2_{\beta=m\pi} = N^2$

Ход лучей в дифракционной решетке



Рассеяние света на шероховатых поверхностях

Развитые спеклы



Развитые спеклы

$$U^s(x,y)=\frac{\exp(2\cdot\pi\cdot i\cdot z/\lambda)}{\lambda\cdot z}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}Uo(\zeta,\eta)\cdot T(\zeta,\eta)\cdot\exp(\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot R}{\lambda})\,d\zeta d\eta$$

where (ς,η) is the scattering plane, *(x,y)* – observation plane,

z is the distance between scattering and observation planes.

Развитые спеклы

$$U^s(x,y)=\frac{\exp(2\cdot\pi\cdot i\cdot z/\lambda)}{\lambda\cdot z}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}Uo(\zeta,\eta)\cdot T(\zeta,\eta)\cdot\exp(\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot R}{\lambda})\,d\zeta d\eta$$

$R=\sqrt{z^2+(x-\zeta)^2+(y-\eta)^2}$, $U_0(\varsigma,\eta)$ – complex amplitude in the incident beam, $T(\varsigma,\eta)$ – random function, which modulates the perfusing irradiation, $U^s(x,y)$ - complex amplitude of the field in observation plane, λ - is the wavelength.

The part of the surface, which is perfused by the beam, may be considered as a set of non-correlated scatterers.

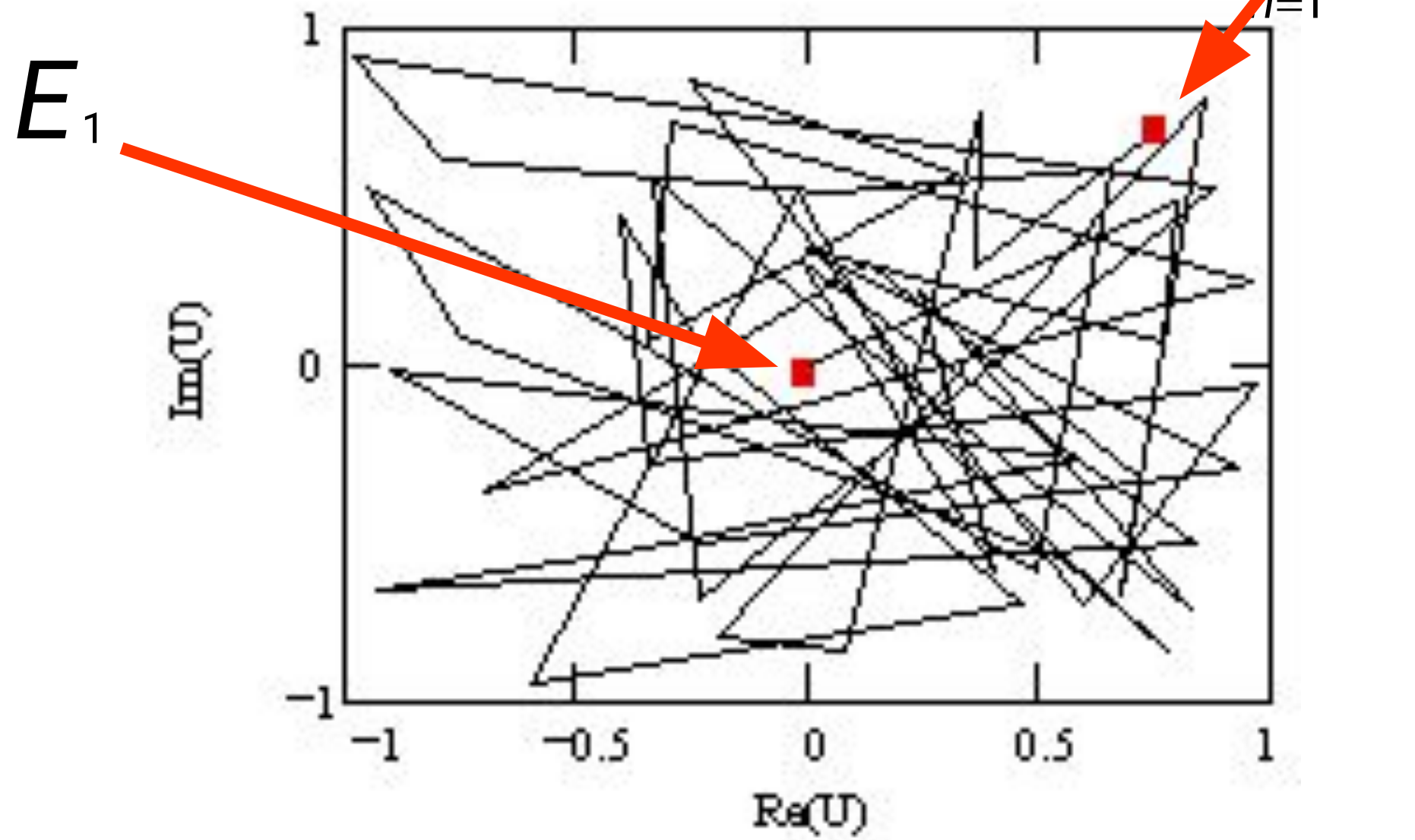
Then Kirchhoff integral may be expressed as a sum:

$$U^{S} = \sum_{n=1}^{N} E_n$$

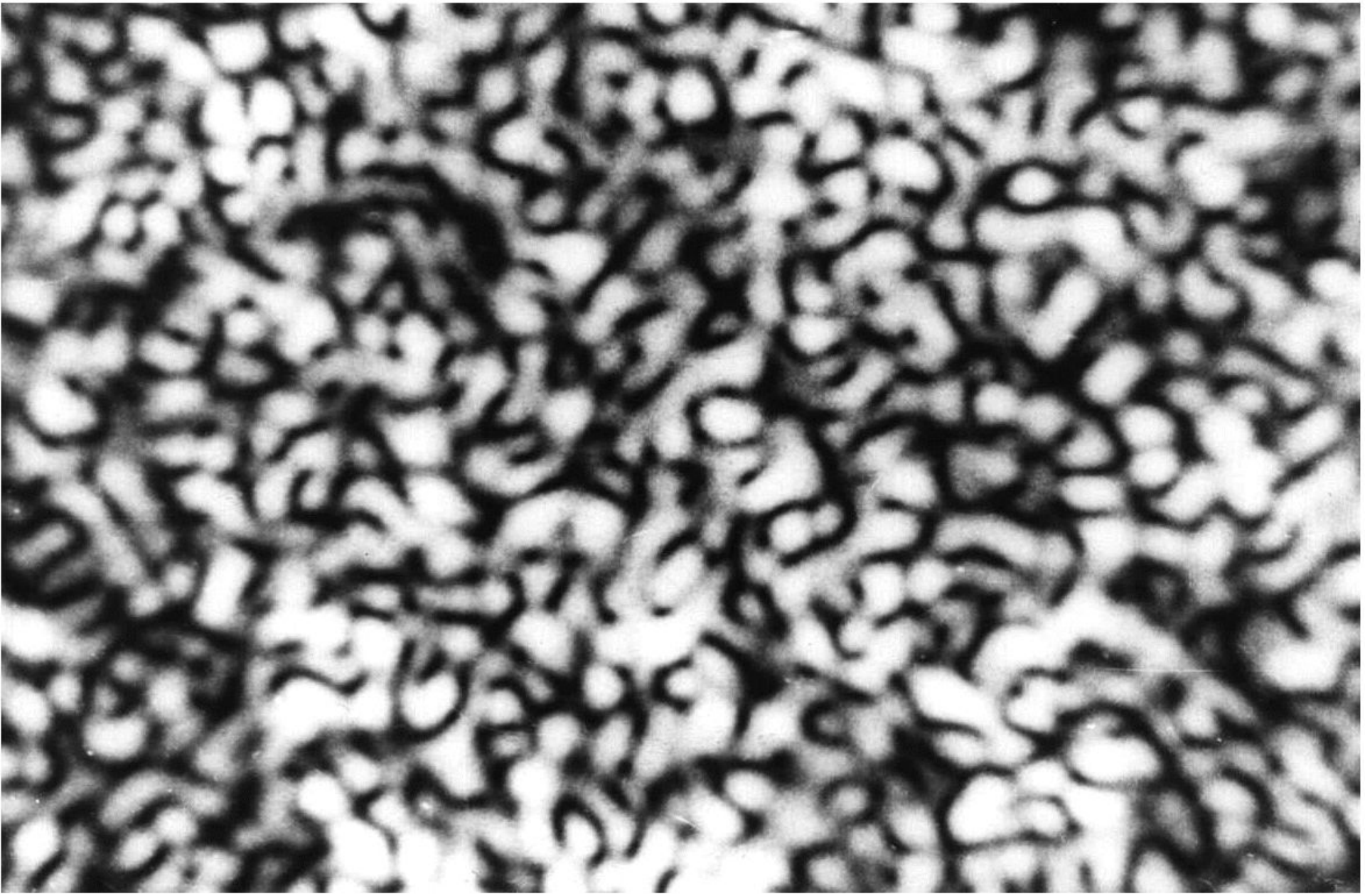
here N is the number of non-correlated areas (i.e. independent scatterers) on the surface, E_n – contribution into the total scattered field from n scatterer.

$$U^S = \sum_{n=1}^{N} E_n$$

Формирование спеклов $\sum_{n=1}^{N} E_n$



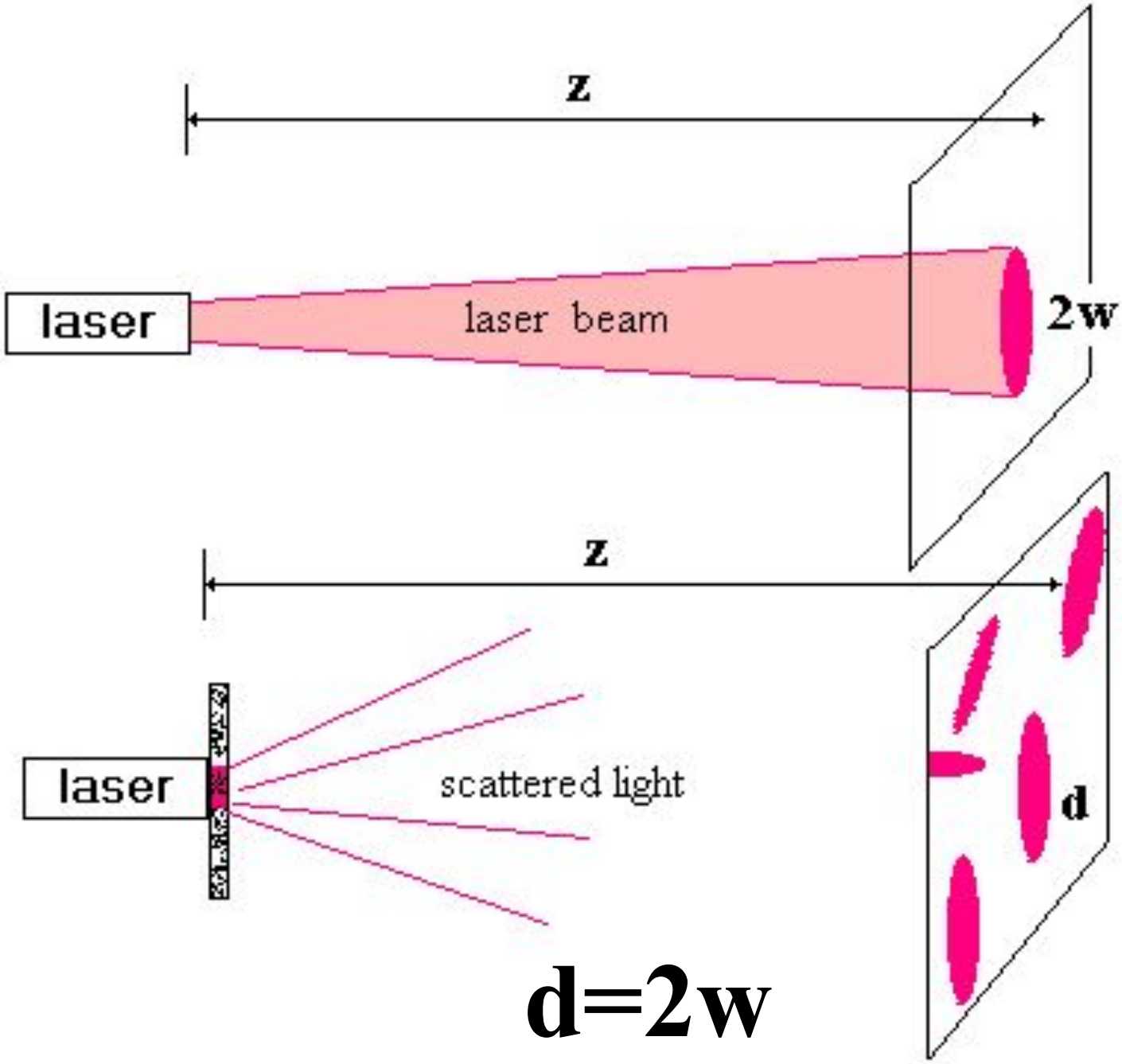
Спеклы



средний размер (a) спеклов связан с размером (d) освещенного участка поверхности простым соотношением

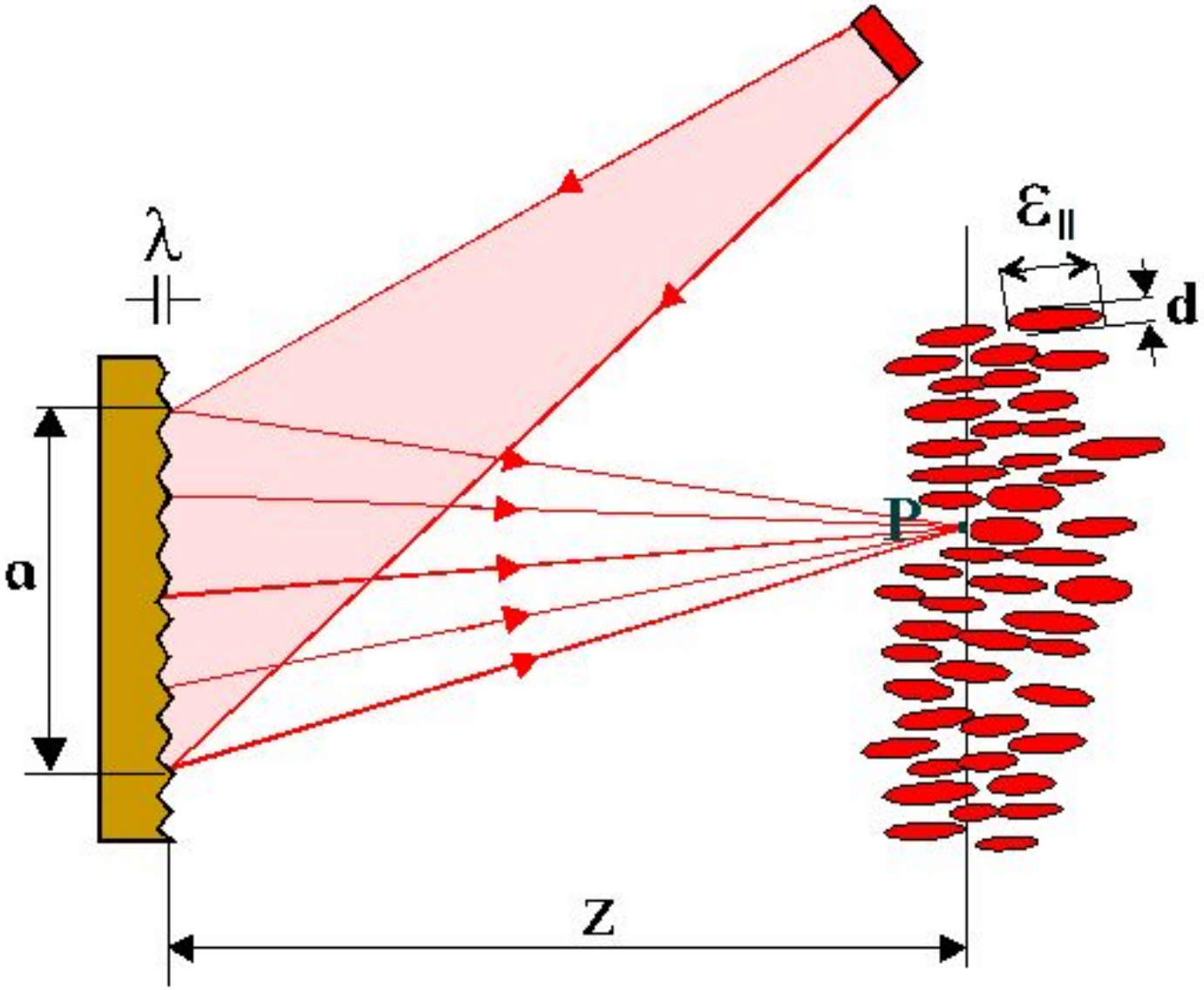
$$a \approx \frac{\lambda z}{d}$$

где λ - длина волны падающего излучения,
z – расстояние между плоскостью рассеяния и плоскостью наблюдения,

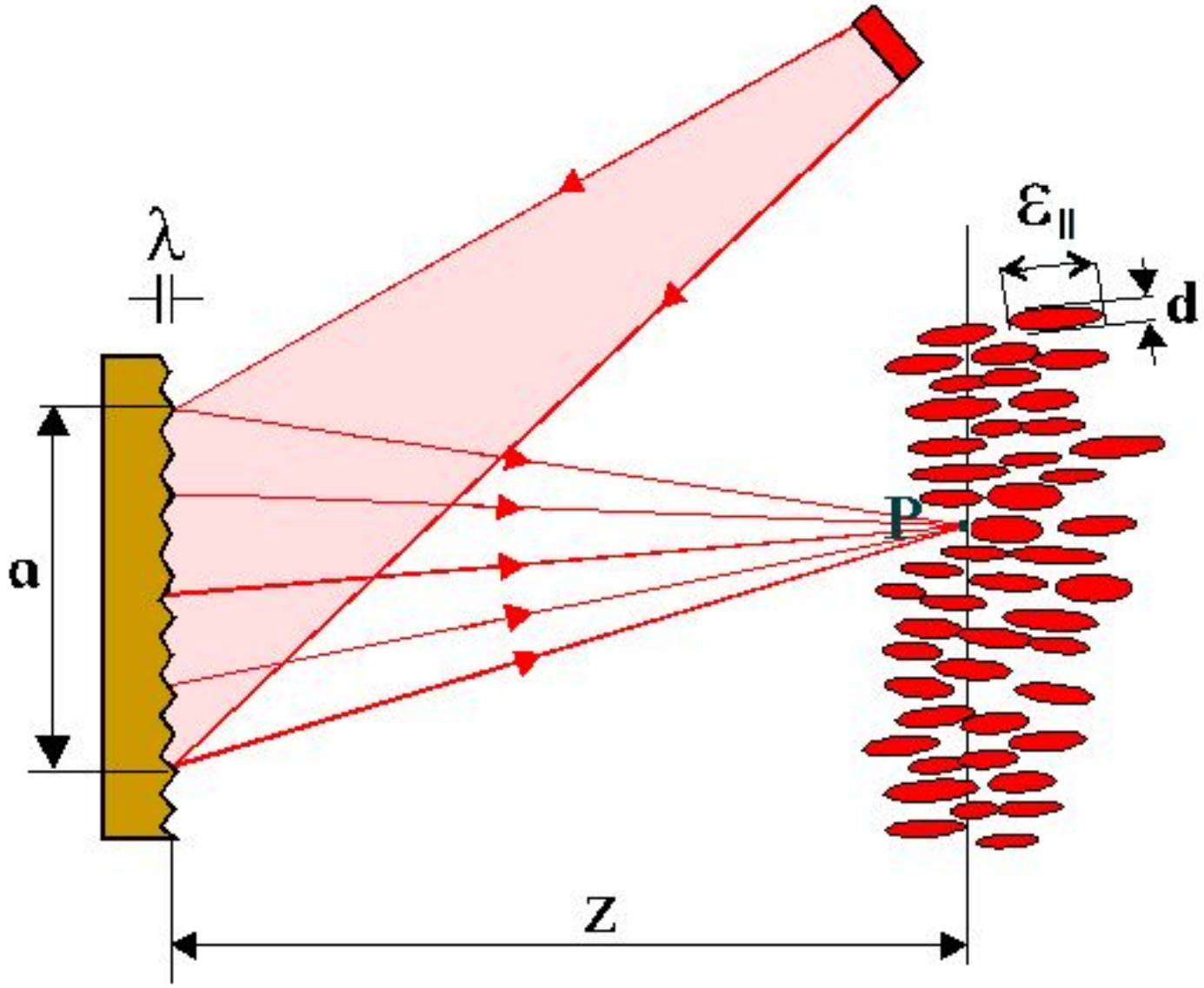


d=2w

Speckle grains in 3D space.



Speckle size in z-direction: $\varepsilon_{\parallel} \approx 8\lambda z^2 / a^2$



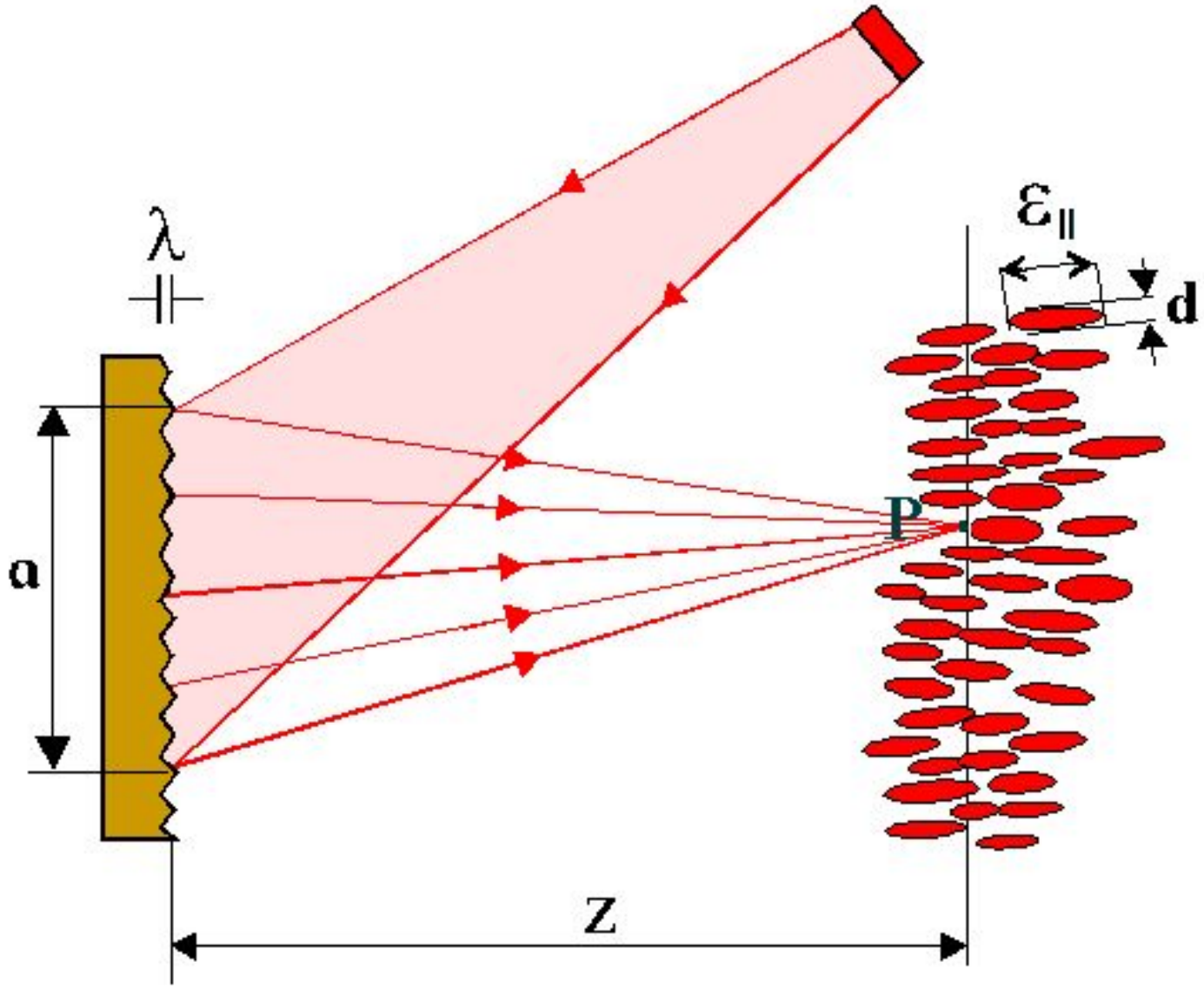
Form of the speckles is characterized by ratio:

$$\frac{\varepsilon_{II}}{d} \approx \frac{8}{3} z / a$$

Ellipticity (eccentricity) is linearly growing with increasing the distance between scattering and observation planes.

$$\frac{\varepsilon_{II}}{d} \approx \frac{8}{3} Z/a$$

Clearly, if $z > a$ then $\varepsilon_{\parallel} > d$.



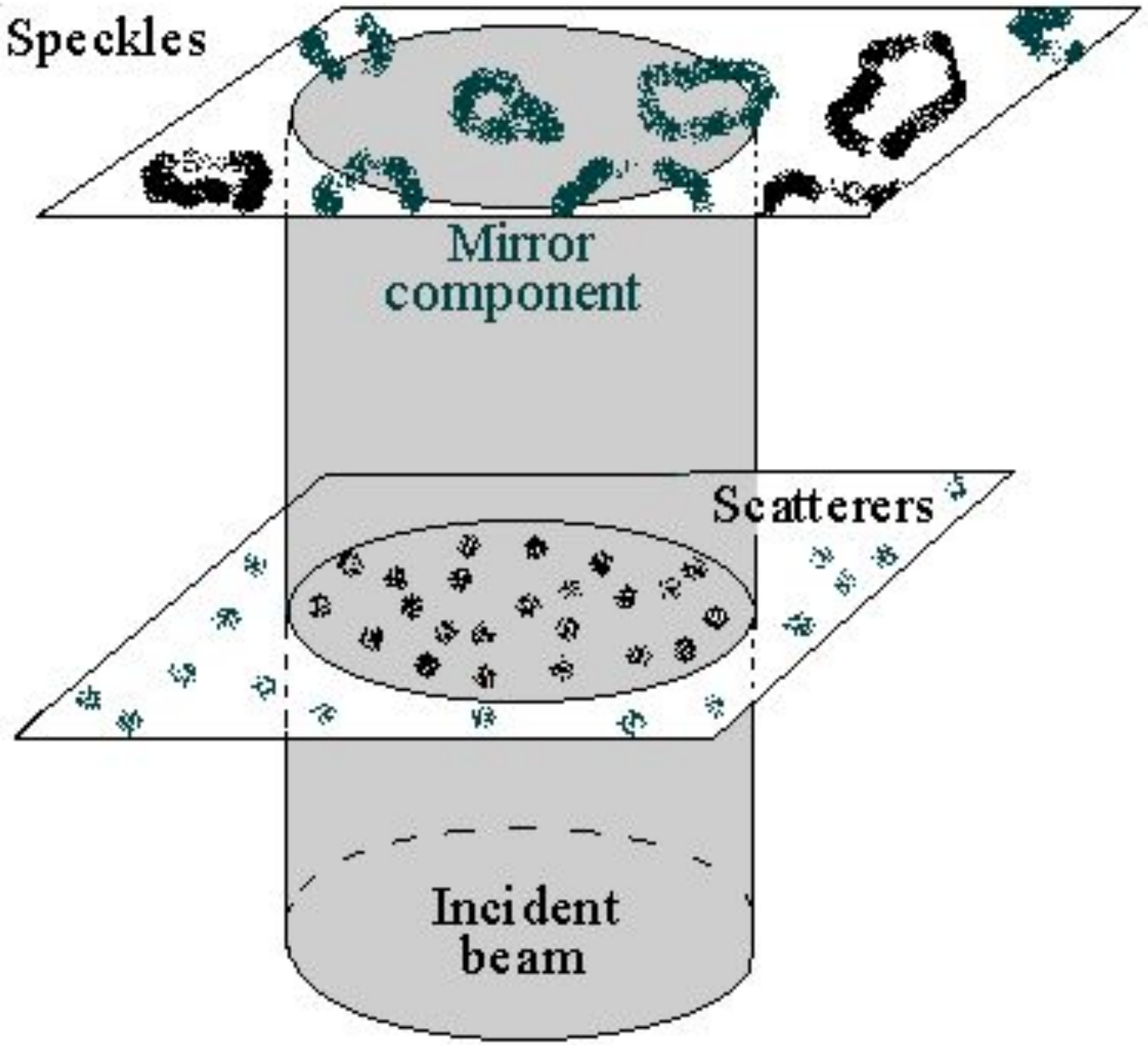
Частично-развитые спеклы

$$U^{S} = E_{o} + \sum_{n=1}^{N} E_{n}$$

Here, E_o corresponds to the amplitude of unscattered wave:

$$U^S = E_o + \sum_{n=1}^{N} E_n$$

This amplitude is essentially larger then all other components from the sum


Speckles
Mirror component
Scatterers
Incident beam

Speckle formation

$\sum_{n=1}^{N} E_n$

E_1

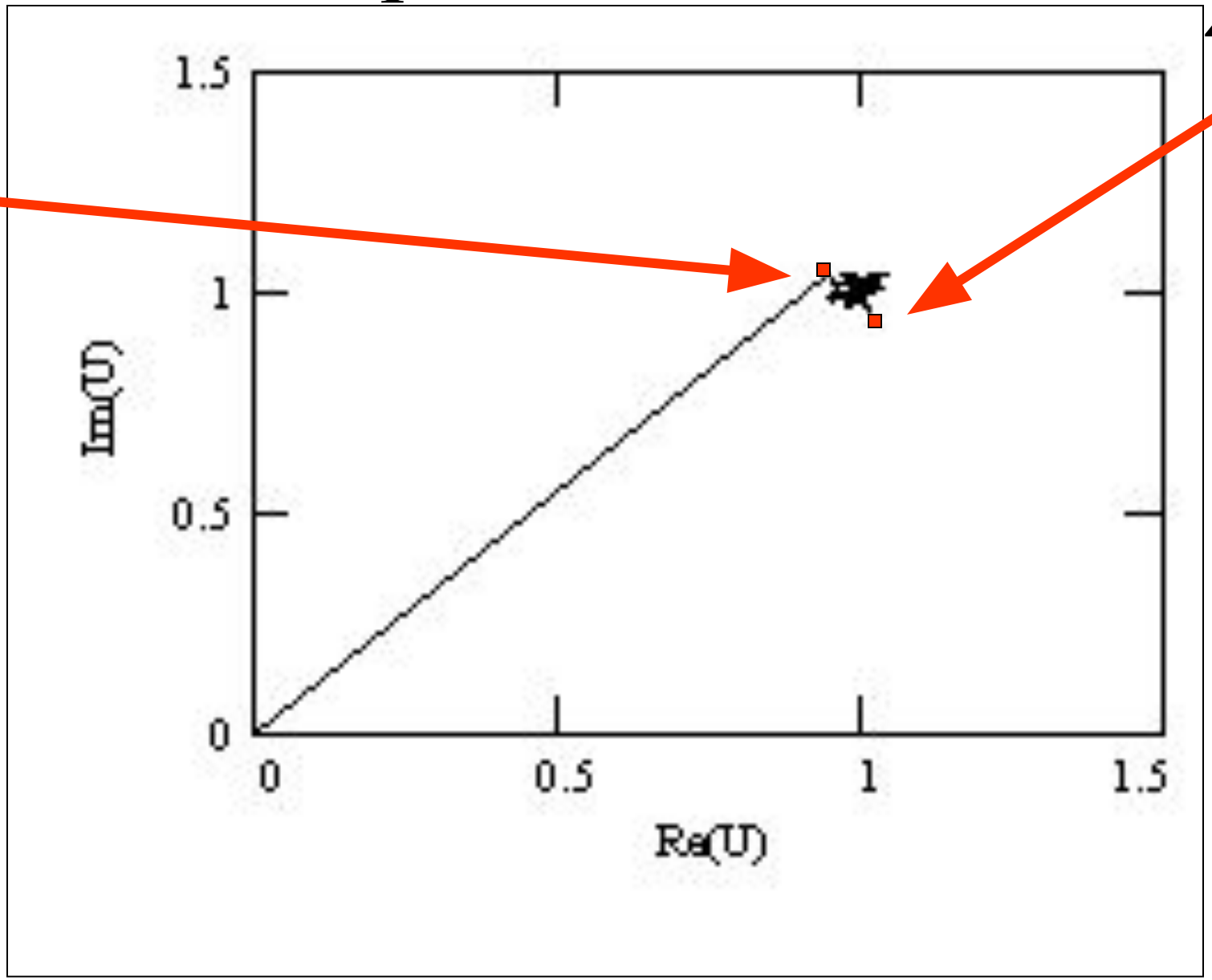


Diagram is obtained at the changes of realizations of partially-developed speckles.

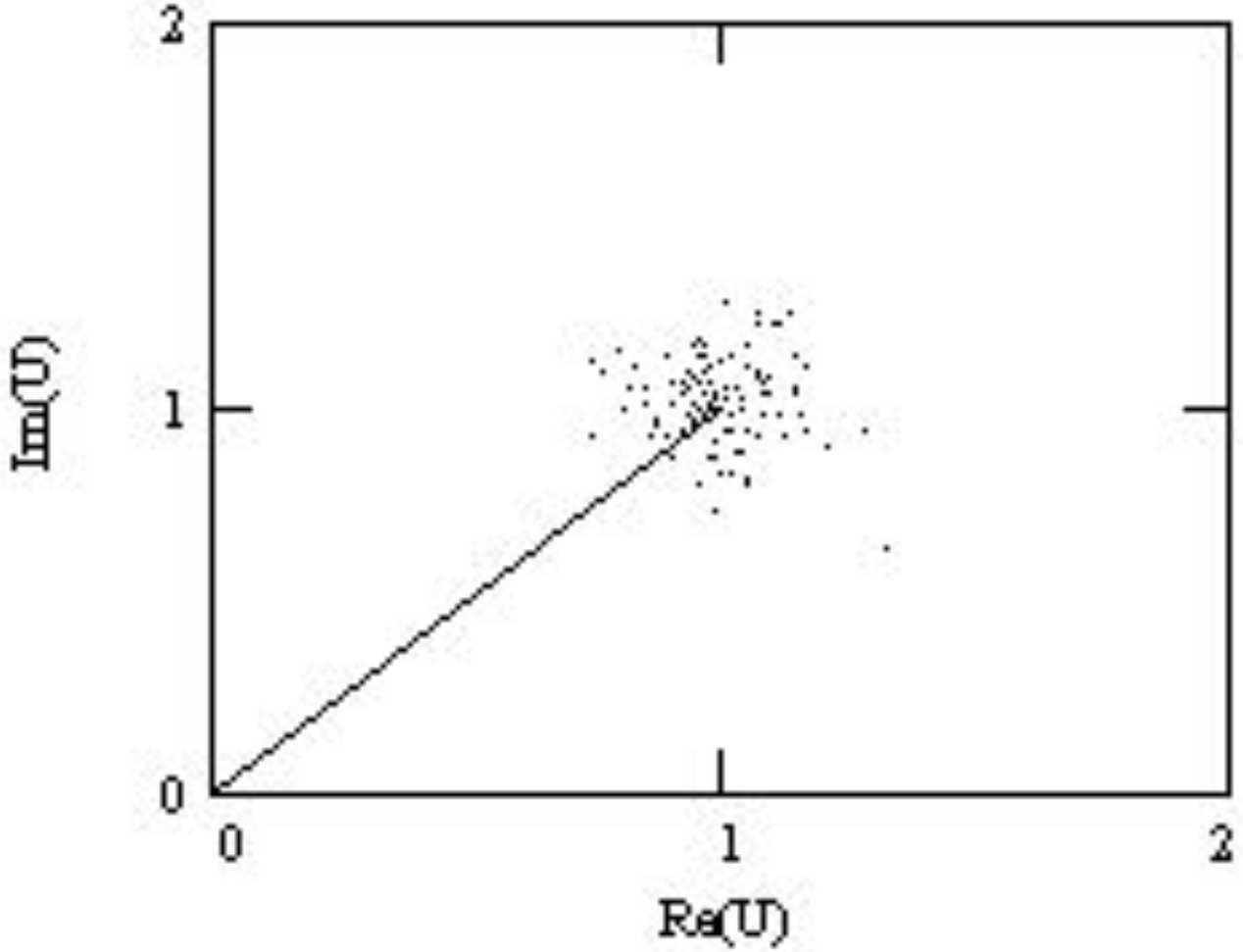
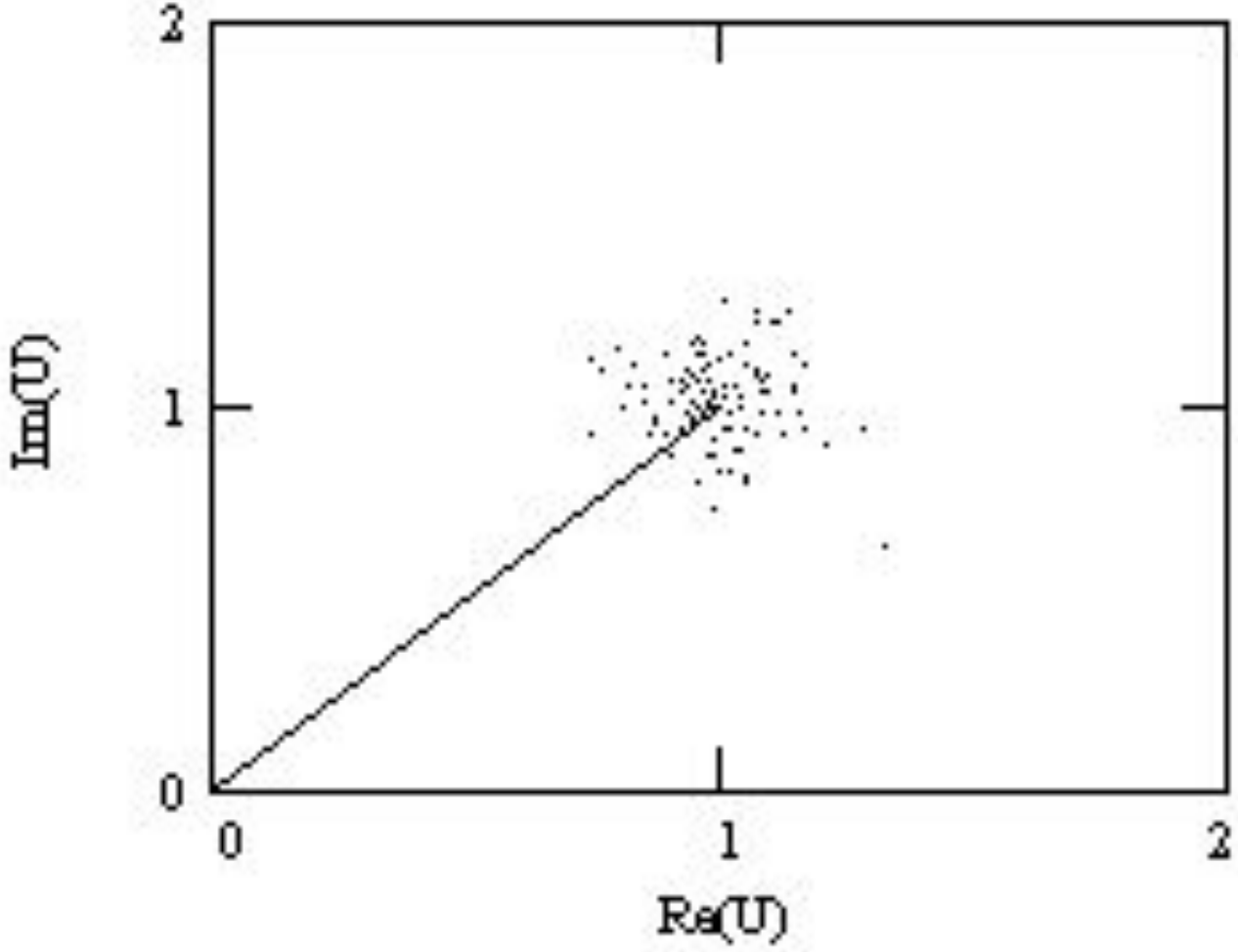
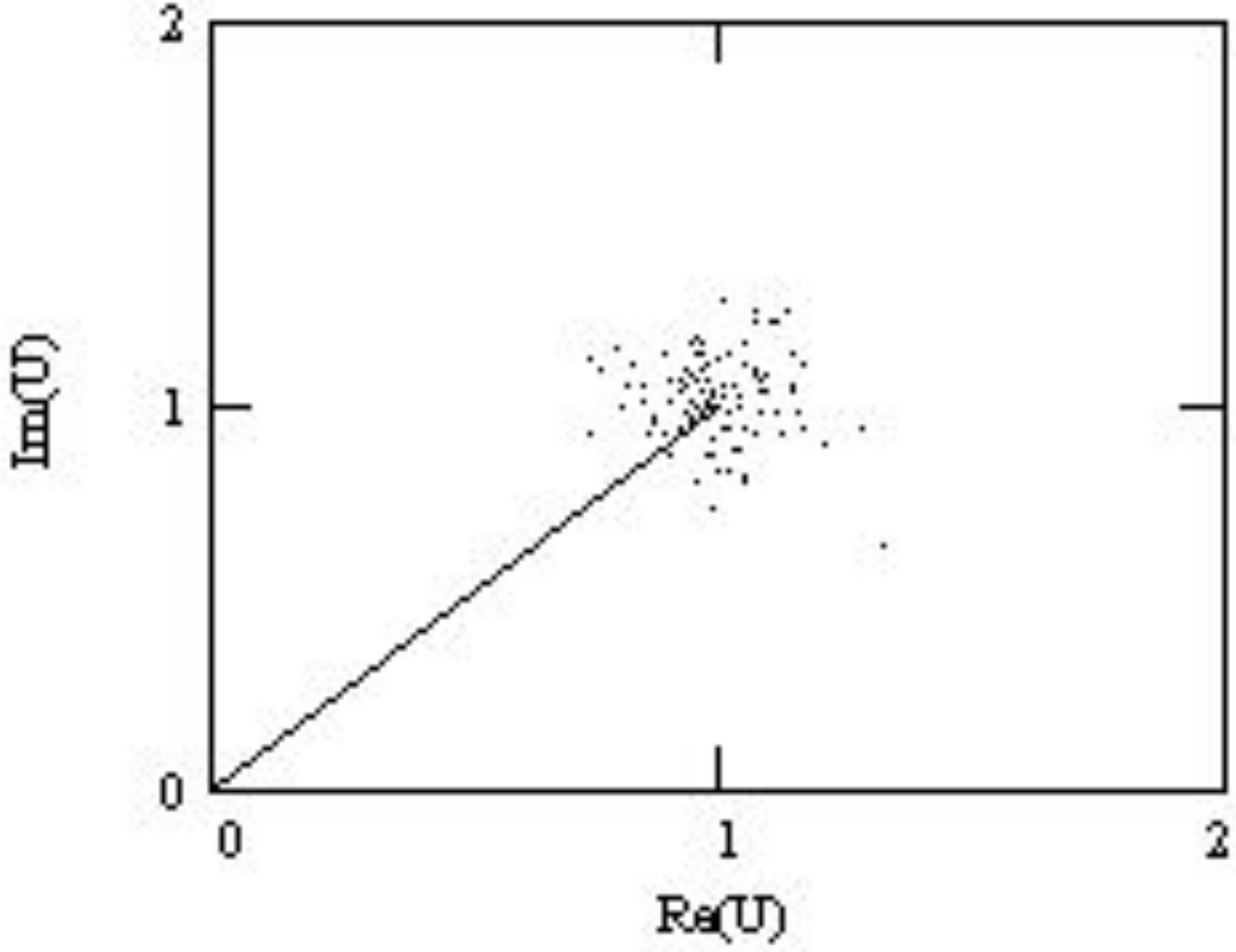


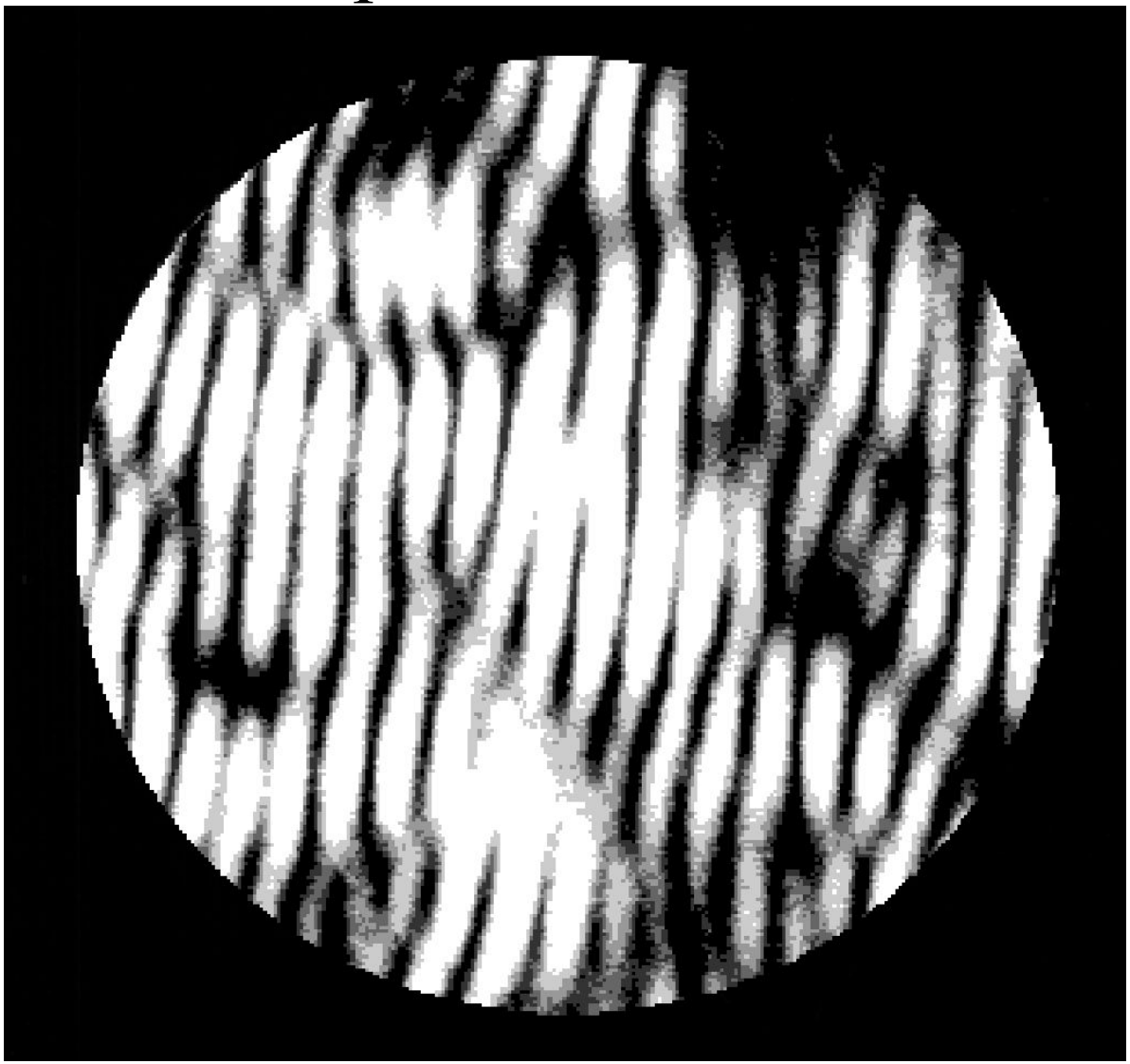
Diagram reflects the deviation of complex amplitudes of scattered field in diffraction picture.



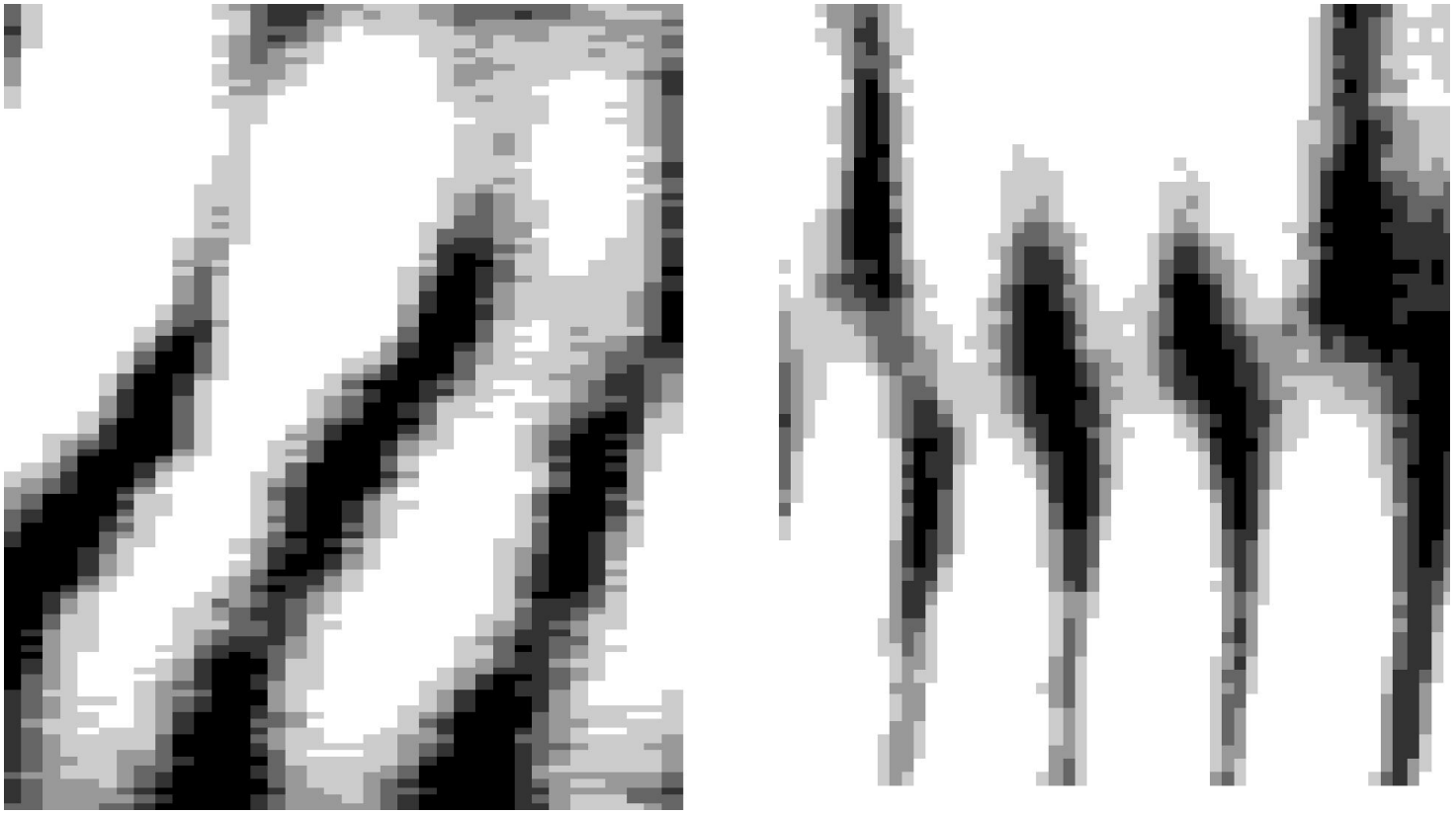
It can be seen that vector, which is corresponded to unscattered component, is surrounded by a small “noise cloud”



Интерференция спеклов. Wave fronts are unmatched. The width of the fringes is less then speckle size.

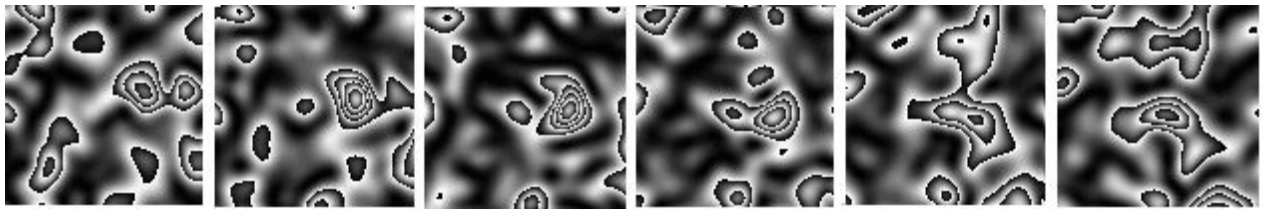


Bending of the fringes

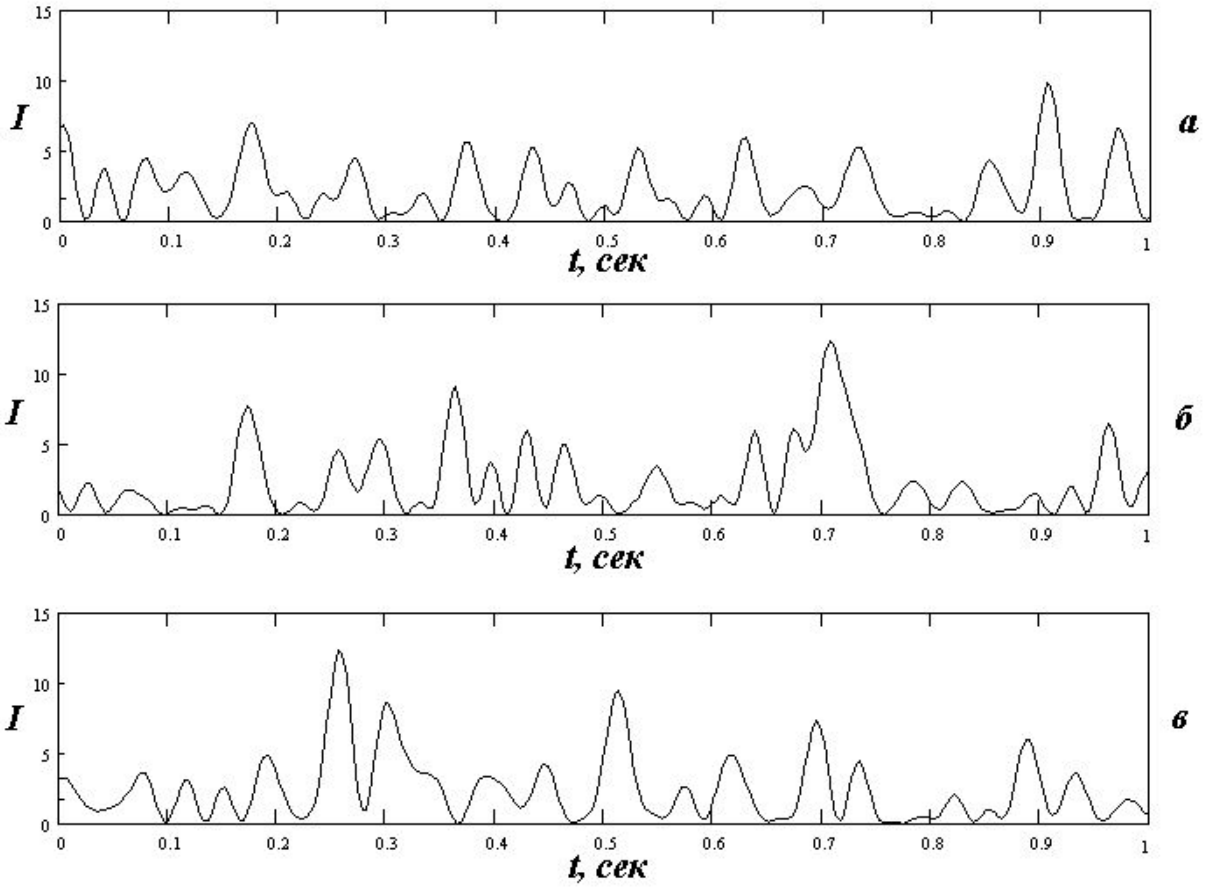


Bifurcation of the fringes

Динамика спеклов



Флуктуации интенсивности



Эффект Доплера

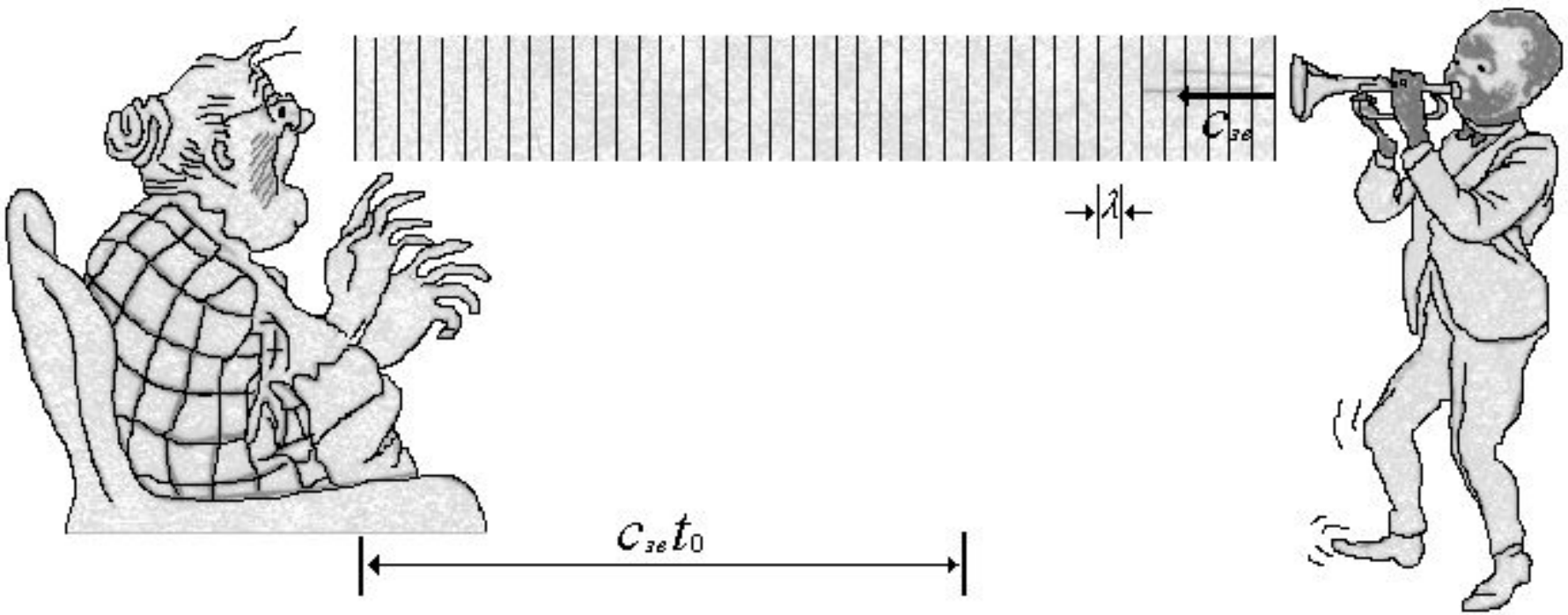
В мае 1842 года Кристиан Доплер опубликовал свою известную статью *”On the Colored Light of Double Stars and Some Other Hevently Bodies”*.
В этой работе был сформулировал принцип, согласно которому ”при относительном движении источника и приемника излучения регистрируемая частота излучения зависит от скорости их движения”.

Впервые этот эффект был подтвержден экспериментально в акустическом диа пазоне волн в 1845 г. английским ученым Байсом Бэллотом. Поставленный им опыт состоял в следующем. На платформе, сцепленной с движущимся локомотивом, находился музыкант, играющий на трубе на одной ноте.

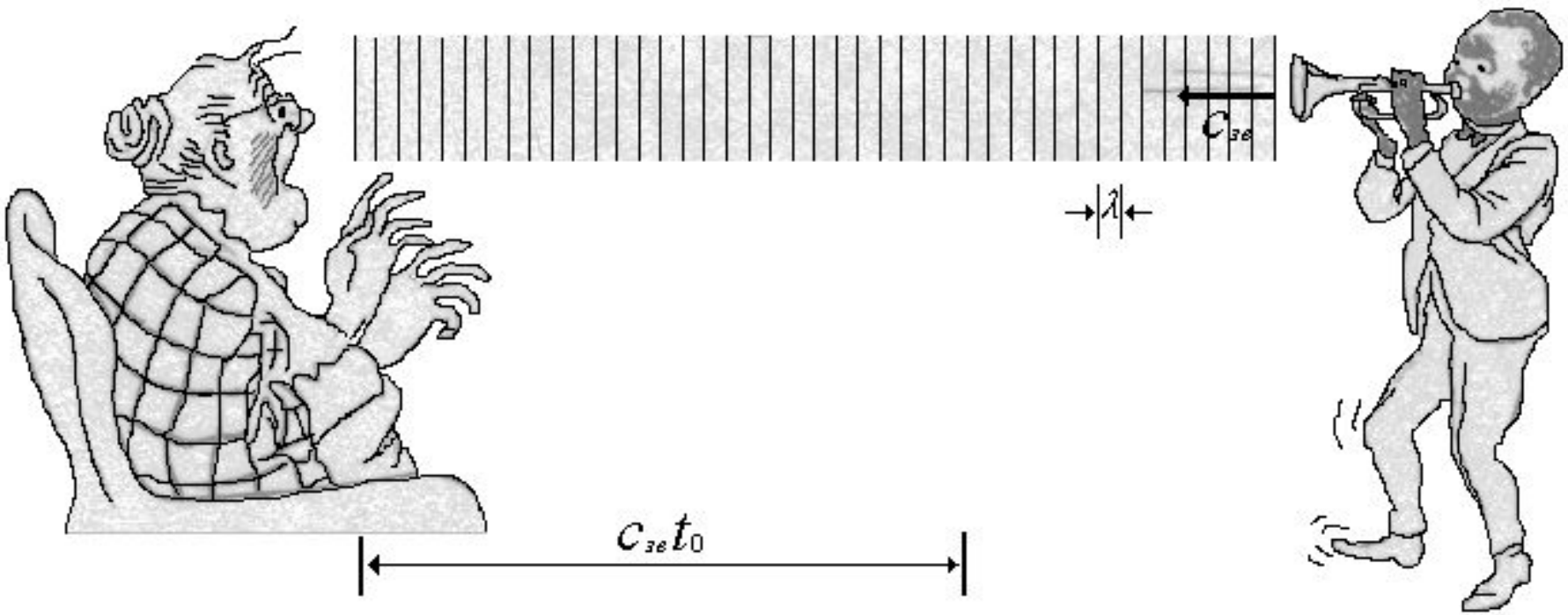
Второй музыкант находился на перроне вокзала. Он констатировал, что когда поезд приближался к станции, труба звучала на пол тона выше; когда поезд удалялся от станции, этому музыканту казалось, что труба играет на пол тона ниже. Применительно к задачам астрономии эффект Доплера был проверен Уильямом Хаггинсом в 1868 году. В оптическом диапазоне в лабораторных условиях это явление наблюдалось русским ученым А. А. Белопольским в 1900 году.

Проще всего проиллюстрировать явление Доплера в акустическом диапазоне. Представим себе, что плоская волна излучается источником на частоте f_0,

Скорость звуковой волны в воздухе $c_{зв}$, длина волны λ.

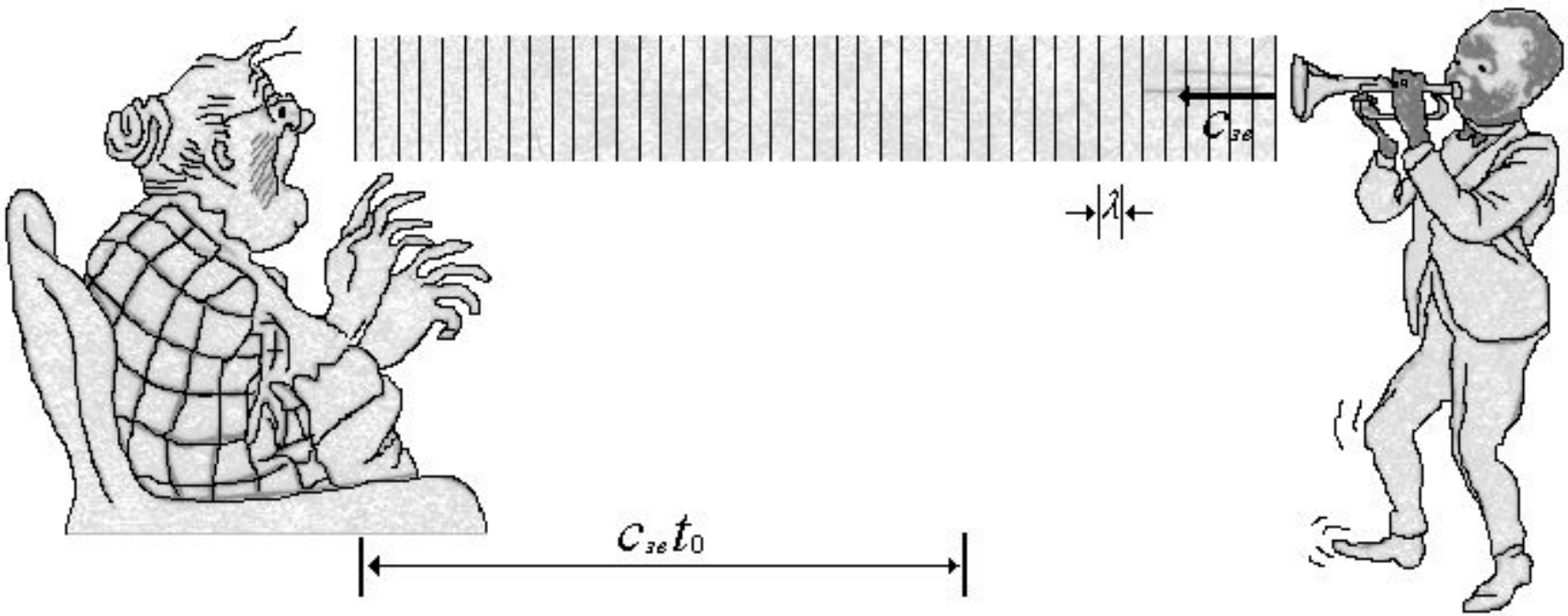


Скорость звуковой волны в воздухе $c_{зв}$, длина волны λ.

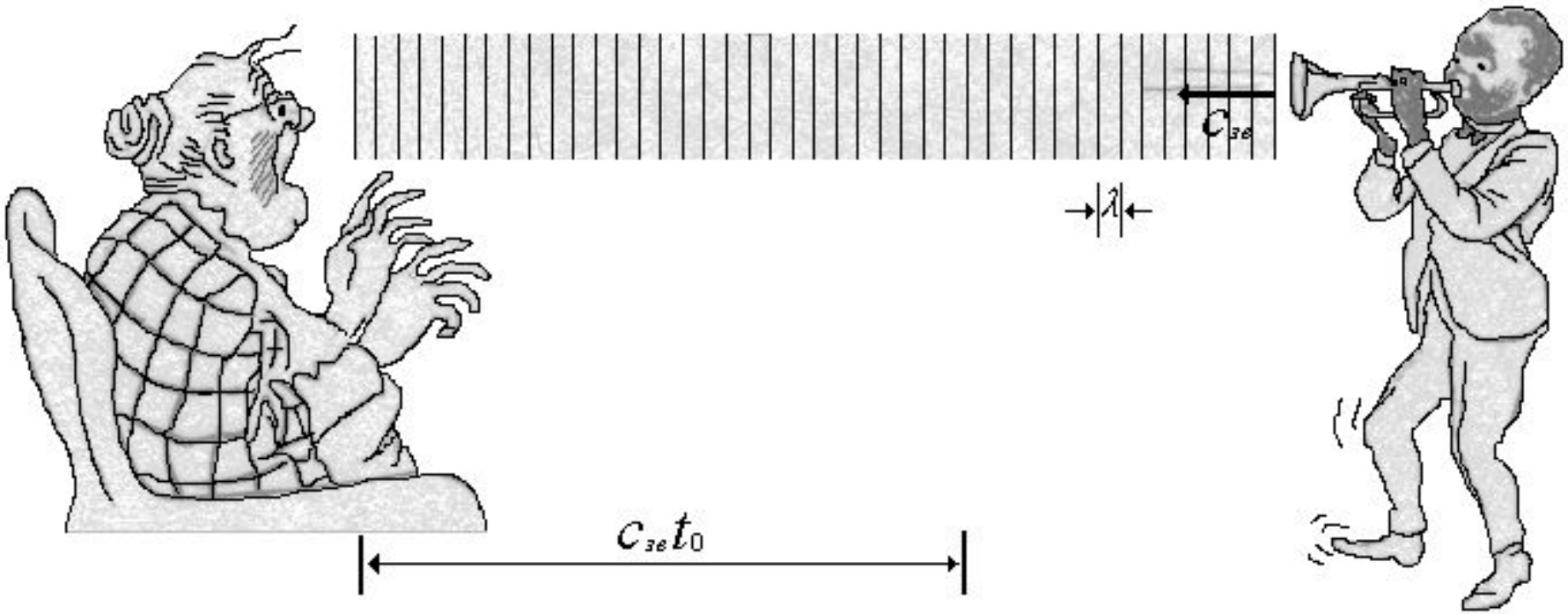


Между частотой f_0 и длиной волны существует простая зависимость:

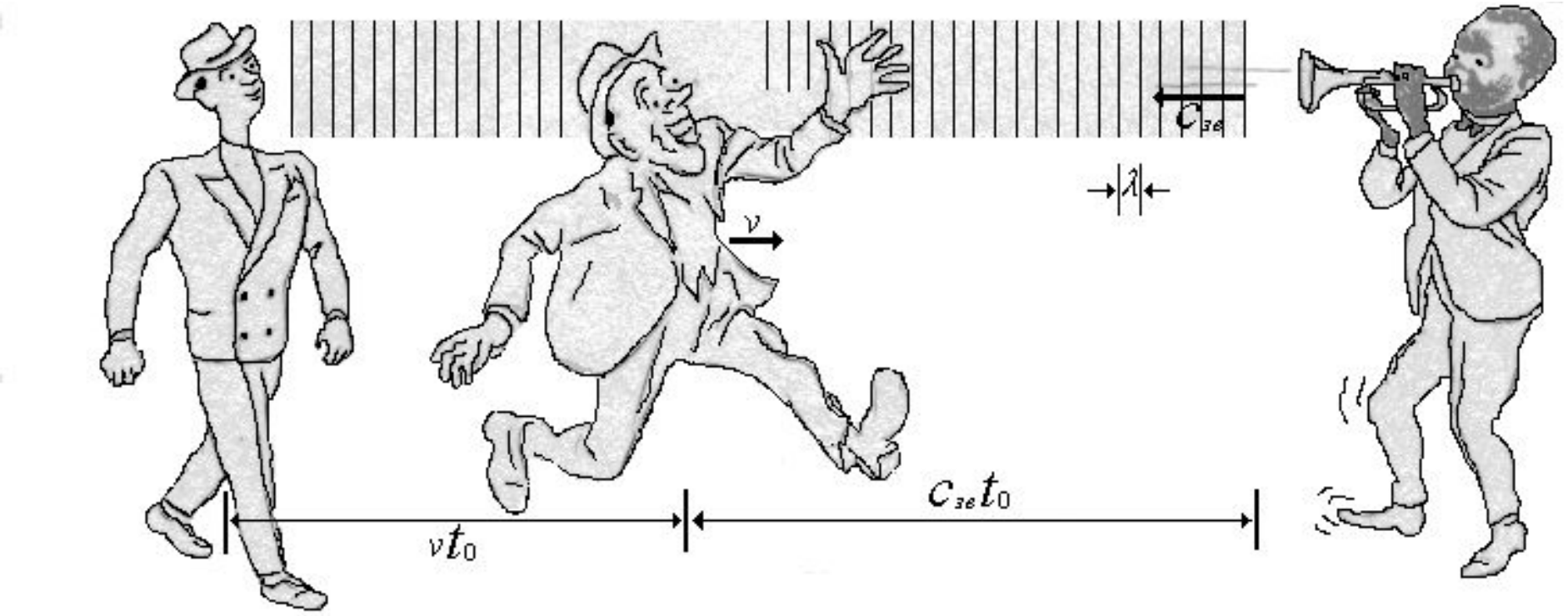
$$f_0 = \frac{c_{зв}}{\lambda}$$



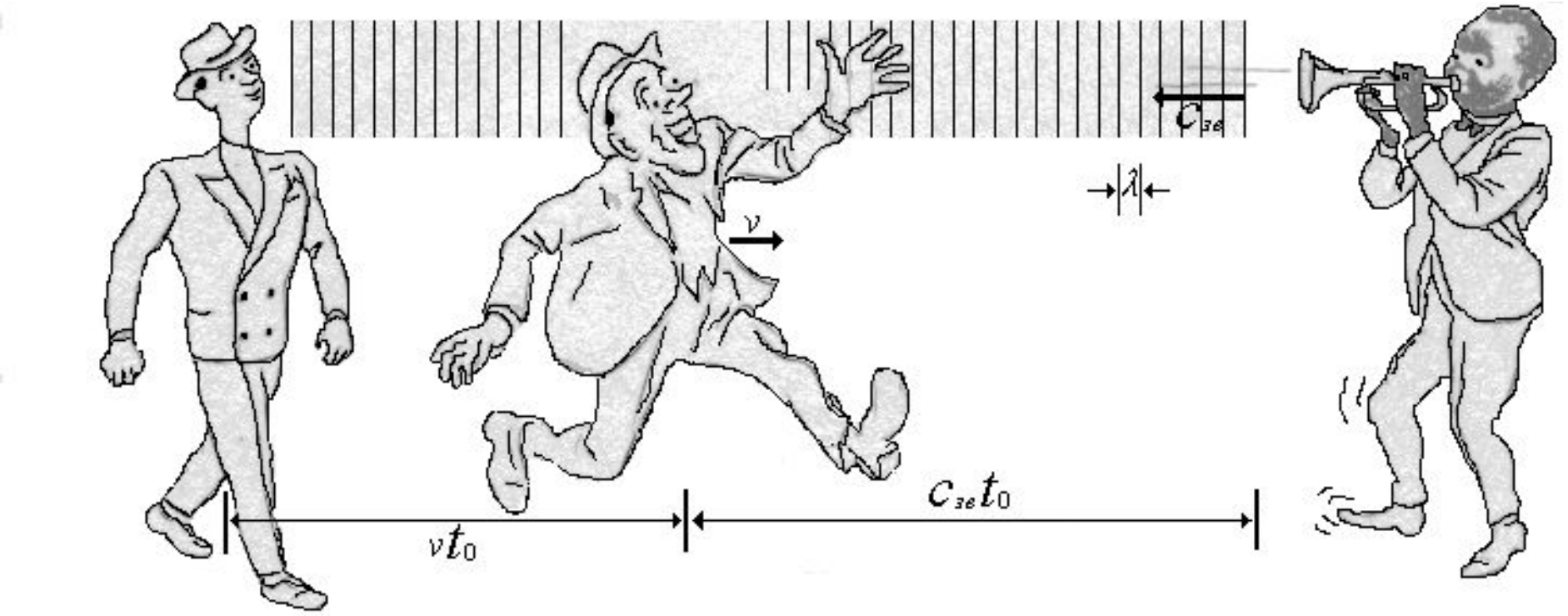
Если источник звука и наблюдатель неподвижны, то за некоторое время t_0 ухо наблюдателя воспримет $\frac{c_{зв} \cdot t_0}{\lambda}$ звуковых колебаний



Предположим теперь, что наблюдатель движется со скоростью v навстречу источнику.

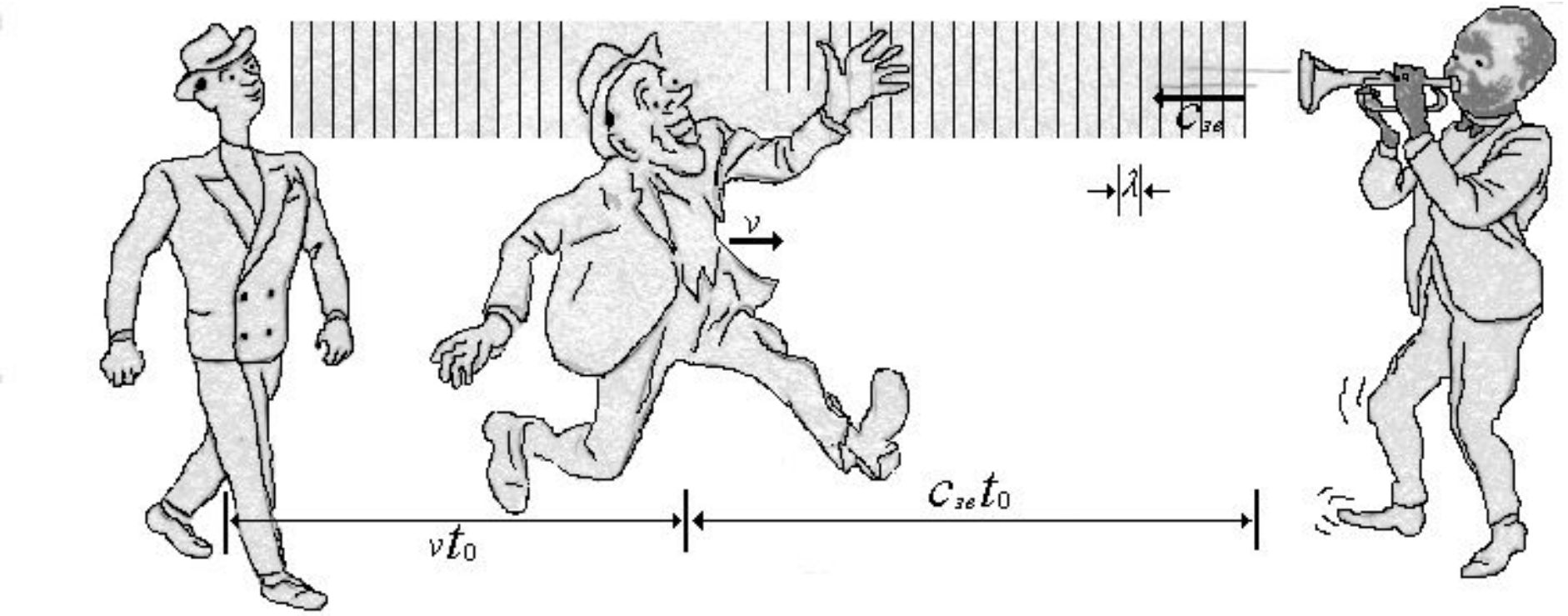


Очевидно, что в этом случае, двигаясь сквозь акустическое поле, наблюдатель воспримет еще $\frac{v \cdot t_0}{\lambda}$ дополнительных звуковых колебаний



Но, с точки зрения наблюдателя, частота звука определяется числом колебаний, которые он "слышит" в единицу времени, то есть:

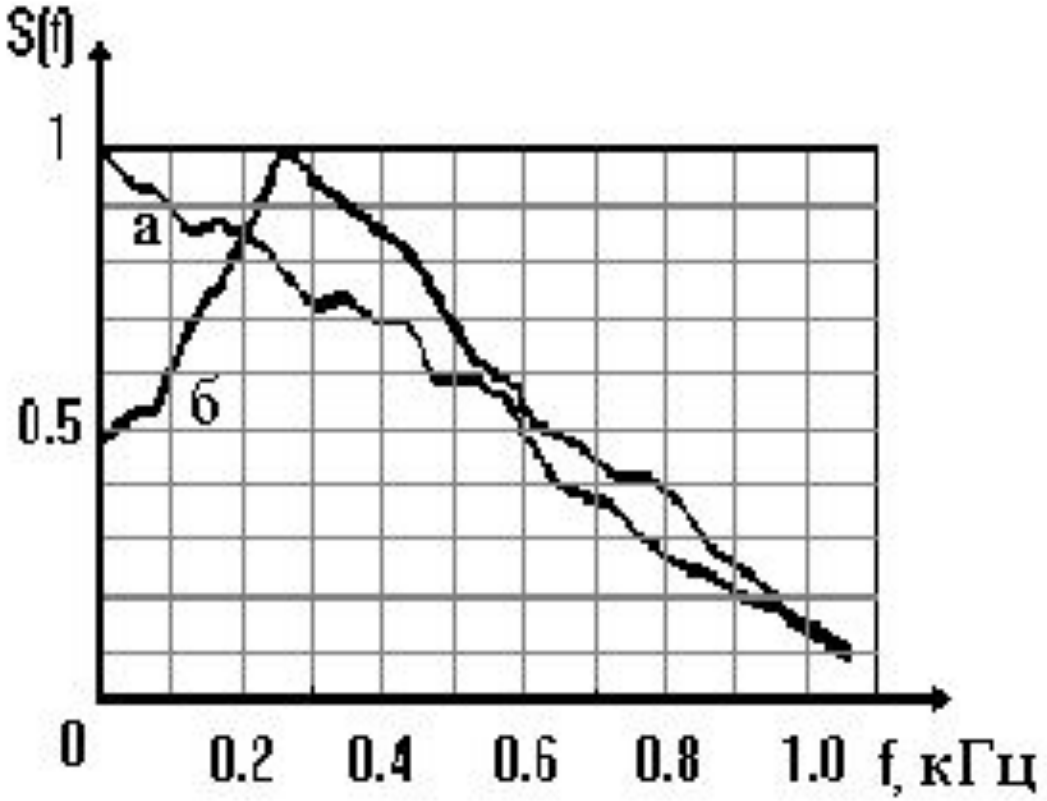
$$f_н = \frac{\left(\frac{c_{зв} \cdot t_0}{\lambda} + \frac{v \cdot t_0}{\lambda}\right)}{t_0} = \frac{c_{зв}}{\lambda} + \frac{v}{\lambda}$$



Таким образом, видно, что наблюдаемая частота отличается от частоты звука f_0, излучаемого источником, на величину

$$f_{доп} = \frac{v}{\lambda}$$

Частота $f_{доп}$ называется частотой доплеровского сдвига.

Однако, в оптическом диапазоне непосредственно измерить изменение частоты рассеянного излучения крайне сложно.
Поэтому, при проведении экспериментальных исследований обычно используются методы измерения разности частот падающего и рассеянного излучений.

Спектры