Тема: элементы комбинаторики

Разработала: Касьянова Л. В.

Преподаватель математики

ГУ НПО Технологический профессиональный лицей.

г. Великий Новгород

ЦЕЛИ:

Познакомиться с основными понятиями комбинаторики и методами решения комбинаторных задач.

СТРУКТУРА:

- Комбинаторика:
  - содержание материала
  - примеры
- Множества и операции над ними:
  - содержание материала
  - упражнения
- Основные законы комбинаторики:
  - содержание материала
  - упражнения
- Основные формулы комбинаторики:
  - содержание материала
  - упражнения

Проверь себя

Комбинаторика – один из разделов математики, играющий важную роль при решении некоторых современных проблем теории вероятностей, кибернетики, математической логики, теории чисел. Знание комбинаторики необходимо представителям самых разных специальностей. С комбинаторными задачами приходится иметь дело физикам, химикам, биологам, лингвистам, специалистам по теории кодов. Здесь мы познакомимся с основными понятиями и методами комбинаторики.

Для решения многих практических задач приходится выбирать из некоторой совокупности объектов элементы, обладающие тем или иным свойством, располагать эти элементы в определенном порядке и т.д. Поскольку в этих задачах идет речь о тех или иных комбинациях объектов, их называют **комбинаторными задачами**. Область математики, в которой изучаются комбинаторные задачи, **называют комбинаторикой**.

примеры

оглавление

Приведем примеры комбинаторных задач:

1. Узнать, сколькими способами можно из 7 мальчиков и 9 девочек выбрать команду для эстафеты, если в команду должны войти 4 мальчика и 4 девочки.
2. Сколькими способами могут быть распределены золотая, серебряная и бронзовая медами на чемпионате мира по футболу?

оглавление

В жизни человеку часто приходится объединять предметы в группы и для каждой группы придумывать особые названия: стадо коров, караван верблюдов, совокупность точек и т.д. Вместо слов «стадо», «караван», «совокупность» в математике употребляют слово **множество**. Множество может быть составлено из каких угодно предметов, при этом каждый предмет, входящий в данное множество, называют **элементом множества**. Множество обозначают заглавными буквами латинского алфавита, а элемент, входящий в множество записывают в фигурных скобках. Например, запись $A = \{3; 6; 9\}$ говорит, что множество A состоит из трех элементов: чисел 3, 6 и 9.

Тот факт, что элемент х принадлежит множеству A, записывают так: $x \in A$, в противном случае пишут $x \notin A$.

оглавление

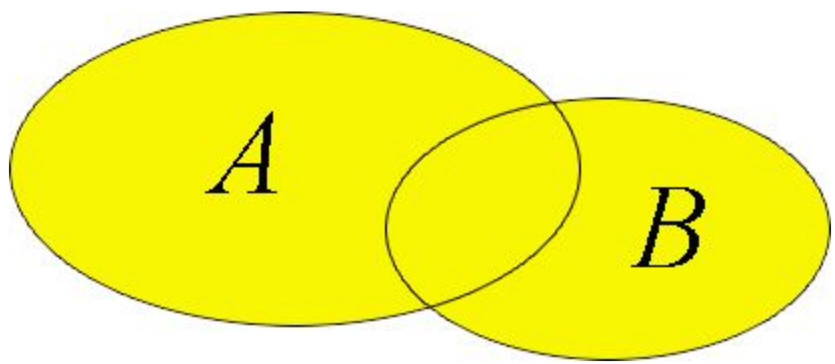
Множество может содержать любое количество элементов. Если множество содержит конечное число элементов, то оно называется конечным множеством. Если же число элементов множества бесконечно, то и множество называют бесконечным. Если множество не содержит ни одного элемента, то такое множество называется пустым и обозначается $\varnothing$. Если множества состоят из одних и тех же элементов, то такие множества называются равными.

Например: $\{12; 13; 14; 15\} = \{15; 14; 13; 12\}$.

оглавление

Рассмотрим операции пересечения, объединения и вычитания множеств:

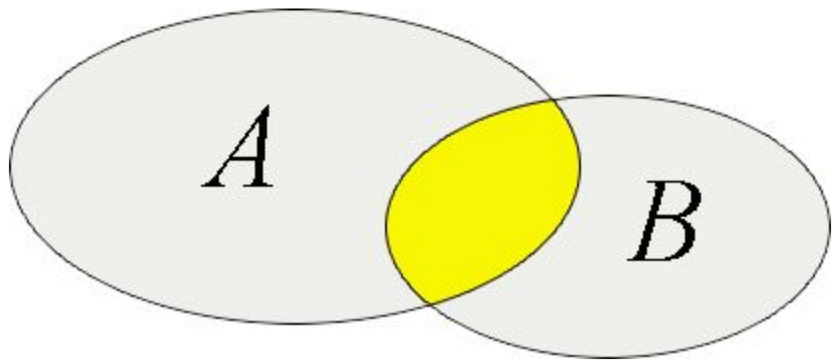
Объединением множеств А и В называют множество $A \cup B$, состоящее их элементов которые принадлежат хотя бы одному из множеств А , В.



$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ или } x \in B\}$$

оглавление

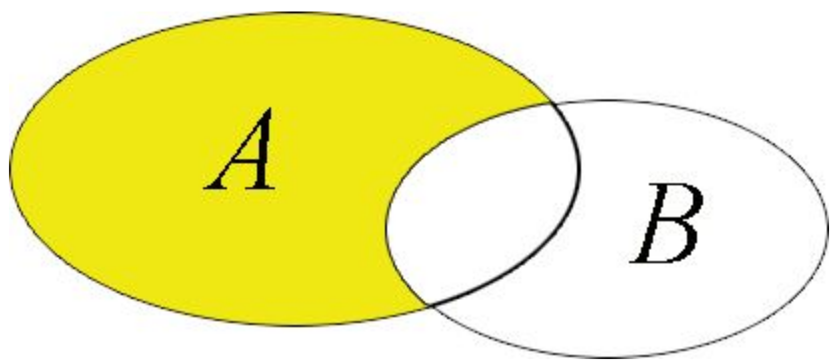
Пересечением множеств A и B называют множество $A \cap B$, состоящее из элементов, которые принадлежат как множеству A, так и множеству B.



$$A \cap B = \{x : x \in A \, и \, x \in B\}$$

оглавление

Разностью множеств А и В, называют множество А \ В, состоящее из всех элементов множества А, которые не принадлежат множеству В.



$$A \setminus B = \{x : x \in A\ u\ x \notin B\}$$

упражнения
оглавление

Упражнения:

Даны множества $A = \{1;2;3;4;5\}$ и $B = \{3;4;5;6;7\}$.

Найти:

1) $A \cup B$
2) $A \cap B$
3) $A \setminus B$

Ответы:

1) $A \cup B = \{1;2;3;4;5;6;7\}$
2) $A \cap B = \{3;4;5\}$
3) $A \setminus B = \{1;2\}$

оглавление

Часто приходится рассматривать **упорядоченные множества**, т.е. множества, в которых каждый элемент занимает свое, вполне определенное место. Упорядочить множество – это значит поставить, какой-либо элемент множества на первое место, какой-либо другой элемент – на второе место и т.д. Упорядоченное множество, иногда принято записывать в круглых скобках.

Упорядочить множество можно различными способами.

Например: представьте себе две геометрические фигуры: квадрат и треугольник. Если говорить о порядке их расположения, то можно найти два способа: сначала квадрат, потом треугольник (рис.1) или сначала треугольник, а потом квадрат (рис. 2)

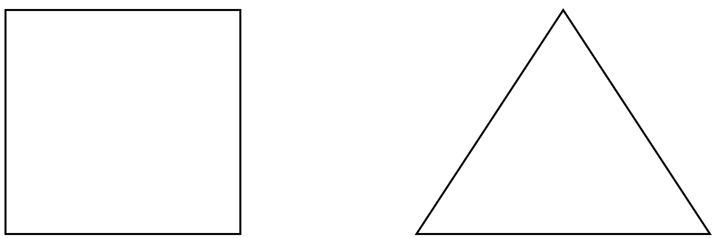


Рис. 1

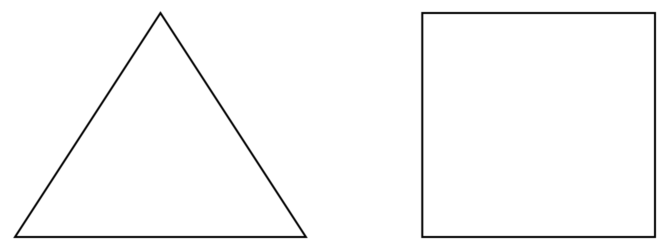


Рис. 2

Точно также множество, состоящее их трех элементов a, b, c можно упорядочить шестью способами: (a b c); (b a c); (a c b); (b c a); (c a b); (c b a).

Установленный в конечном множестве порядок расположения его элементов называется **перестановкой**. Число перестановок обозначается латинской буквой P.

Значит, $P_2 = 2$ - число перестановок из двух элементов равно 2,

$P_3 = 2 \cdot 3 = 6$ - число перестановок из трех элементов равняется 6.

Можно доказать, что число перестановок из четырех элементов равно 24,т.е.

$$P_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

Аналогично $P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ и т.д.

Тогда число перестановок из любого количества k элементов можно найти по формуле:

$$P_k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ \cdots \ \cdot k$$

Произведение натуральных чисел от 1 до данного натурального числа k называется **факториалом** числа k и обозначается k!

Например:

$$P_2 = 1 \cdot 2 = 2!$$

$$P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 3!$$

$$P_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4!$$

упражнения
оглавление

Если каждый элемент множества А является в то же время и элементом множества В, то говорят, что А – часть или **подмножество** множества В. В этом случае пишут $A \subset B$. Считают также, что пустое множество является подмножеством любого множества, т.е. $\varnothing \subset A$. И Любое множество является подмножеством самого себя, т.е. $A \subset A$

оглавление

Каждое упорядоченное подмножество множества А называют **размещением**. Например: сколькими способами можно выбрать четырех человек на различные должности из девяти кандидатов на эти должности. Так как каждый выбор 4 человек из 9 имеющихся должен иметь определенный порядок распределения их на должности , то мы имеем задачу составления размещений из 9 по 4. Число размещений из 9 по 4 обозначается: A_9^4 . Очевидно, что первого человека можно выбрать 9 способами: каждый из 9 претендентов может занять первую должность. Второго человека выбирают из оставшихся 8. И чтобы выбрать этих двух человек понадобится $9 \cdot 8$ способов. Третьего человека выбираем из 7 претендентов и последнего из 6. Значит, чтобы из 9 претендентов выбрать 4 нам понадобится $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$ способа, т.е. $A_9^4 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$

оглавление

Можно заметить, что тот же результат буден получен, если размещения связать с перестановками, т.е. $A_9^4 = \frac{9!}{5!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$

Рассуждая аналогичным образом можно доказать, что число размещений из m элементов по n (очевидно, что $n \le m$) вычисляется по формуле: $A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$

упражнения
оглавление

Размещения – это упорядоченные подмножества данного множества, которые отличаются друг от друга не только выбором элементов, но и порядком их расположения. Произвольные неупорядоченные подмножества данного множества называются **сочетаниями**. Различные сочетания отличаются друг от друга только составом (выбором) элементов. Количество сочетаний (или число сочетаний) обозначается латинской буквой C и соответствующими индексами.

Число сочетаний из m элементов по n вычисляется по формуле:

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} \quad \text{или} \quad C_m^n = \frac{m!}{(m-n)!\cdot n!}$$

оглавление

Например: в классе 10 юношей-допризывников. Сколькими способами они могут выбрать четверых для участия в слете ДОСААФ? Для ответа на этот вопрос нам надо найти число сочетаний из 10 элементов по 4, т.к. порядок в котором будут избраны 4 делегата на слет, безразличен:

$$C_{10}^{4} = \frac{10!}{(10-4)!\cdot 4!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 210$$

упражнения
оглавление

Упражнения:

1) Вычислите: P_6

решение

2) Вычислите: $\frac{P_{10}}{P_8}$

решение

3) Сколькими способами можно рассадить 8 человек на восьми свободных стульях?

решение

Решение:

1) $P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$

«

Решение:

2) $$\frac{P_{10}}{P_8} = \frac{10!}{8!} = \frac{8! \cdot 9 \cdot 10}{8!} = 9 \cdot 10 = 90$$

«

Решение:

3)Чтобы вычислить сколько способов существует для того чтобы рассадить 8 человек на восьми свободных стульях надо найти число перестановок P_8 :

$$P_8 = 8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40320$$

«

Упражнения:

1) Вычислите: A_8^3

решение

2) Вычислите: A_5^2

решение

3) Решите уравнение: $A_x^2 = 0$

решение

4) Сколькими способами могут быть присуждены золотая, серебряная и бронзовая медами трем участникам из 11?

решение

Решение:

1) $$A_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{5!\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{5!} = 6\cdot 7\cdot 8 = 336$$

«

Решение:

2) $A_5^2 = \dfrac{5!}{3!} = 4 \cdot 5 = 20$

«

Решение:

3) Решить уравнение $A_x^2 = 0$, значит найти значение переменной x.

Т.е. $\frac{x!}{(x-2)!} = 0$, тогда $\frac{(x-2)! \cdot (x-1) \cdot x}{(x-2)!} = 0$; $(x-1) \cdot x = 0$,
учитывая , x - натуральное число, получаем x = 1
Ответ: x = 1

«

Решение:

4) Каждый выбор трех медалистов из 11 участников отличается друг от друга составом и порядком расположения участников, то надо вычислить число размещений из 11 по 3:

$$A_{11}^{3} = \frac{11!}{8!} = \frac{8!\cdot 9\cdot 10\cdot 11}{8!} = 9\cdot 10\cdot 11 = 990$$

«

Упражнения:

1) Вычислите: C_9^4

решение

2) Вычислите: C_5^3

решение

3) Сколько прямых можно провести через 7 точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой?

решение

теория
оглавление

Решение:

1) $$C_9^4=\frac{9!}{5!\cdot 4!} = \frac{5!\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{5!\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = \frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=126$$

«

Решение:

2) $C_5^3 = \dfrac{5!}{2! \cdot 3!} = \dfrac{3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$

«

Решение:

3) Каждые две точки определяют одну прямую, и при этом не играет роли в каком порядке они взяты. Поэтому число прямых равно числу сочетаний из 7 по 2, т.е.

$$C_7^2 = \frac{7!}{5!\cdot 2!} = \frac{5!\cdot 6\cdot 7}{5!\cdot 1\cdot 2} = 21$$

«

Проверь себя!

1). Сколькими способами можно разместить 6 человек на одной скамейке?

2). Учащиеся изучают 10 различных предметов. Сколькими способами можно составить расписание уроков на один день, чтобы при этом было 6 различных предметов?

3). Сколькими способами можно выбрать делегацию в составе 5 человек из 12 человек?

оглавление

Для решения многих комбинаторных задач и доказательства формул применяются следующие правила комбинаторики:

1). **Правило суммы:** Если элемент a можно выбрать m способами, а элемент b - n способами, причем любой выбор элемента a отличен от любого выбора элемента b, то выбор “ a или b “ можно сделать m + n способами.

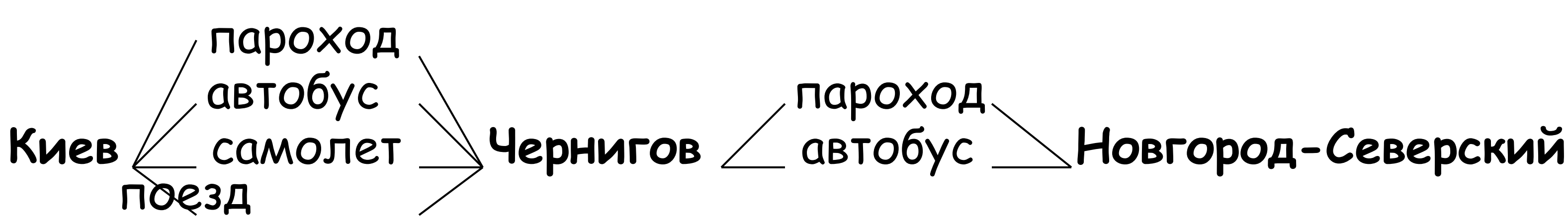
Например: если на блюде лежат 7 яблок и 4 груши, то выбрать один плод можно 7 + 4 способами.

2). **Правило произведения:** Пусть требуется выполнить одно за другим k действий. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, второе действие - n_2 способами, третье действие - n_3 способами и так далее, все k действий вместе могут быть выполнены $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \cdots \times n_k$ способами.

оглавление

Например: Из Киева до Чернигова можно добраться пароходом, поездом, автобусом, самолетом; из Чернигова до Новгорода-Северского – пароходом и автобусом. Сколькими способами можно осуществить путешествие по маршруту Киев – Чернигов – Новгород-Северский? Так как, выбрав один из четырех возможных способов путешествия из Киева до Чернигова, имеем два возможных способа путешествия от Чернигова до Новгорода-Сeвеверского, то число разных путей из Киева до Новгорода-Северского равно

$$4 \times 2 = 8$$



оглавление

3). **Метод математической индукции:** Если некоторое утверждение относительно натурального числа n верно для n=1 и из того, что оно верно для n=k, следует, что оно верно и для числа n=k+1, то это утверждение верно для любого натурального числа n. Как видно из определения, доказательство методом математической индукции состоит из двух частей:

- проверка справедливости утверждения для n=1
- доказательство для n=k+1, если предполагать, что оно верно для n=k, где k произвольное натуральное число.

Например: докажите, что сумма первых n нечетных чисел равна n^2, т.е.

$1+3+5+7+ \ldots +(2n-1)= n^2$

Решение:

- проверим справедливость формулы для n=1. Получим, что $S_1 = 1$ и $S_1 = 1^2 = 1$
- предположим, что формула верна для n=k, т.е. $S_k = k^2$, тогда, так как следующим за 2k-1 нечетным числом будет число 2k+1, получим

$$S_{k+1} = 1+3+5+7+\cdots+(2k-1)+(2k+1) = S_k + (2k+1) = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$$

Итак $S_{k+1} = (k+1)^2$, что и требовалось доказать.

упражнения
оглавление

Упражнения:

1) докажите, что сумма первых чисел натурального ряда равна $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

решение

теория

оглавление

Доказать, что $1+2+3+4+\cdots+n=\dfrac{n\cdot(n+1)}{2}$

Решение:

- при n = 1 формула верна: $S_1=\dfrac{1\cdot(1+1)}{2}=1$
- предположим, что формула верна для n = k, т.е.

$S_k=\dfrac{k\cdot(k+1)}{2}$, тогда

$$S_{k+1}=S_k+(k+1)=\frac{k\cdot(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k\cdot(k+1)+2\cdot(k+1)}{2}=\frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2}$$

Итак: $S_{k+1}=\dfrac{(k+1)\cdot(k+2)}{2}$, что и требовалось доказать.

«