Асимптотические свойства адронной материи

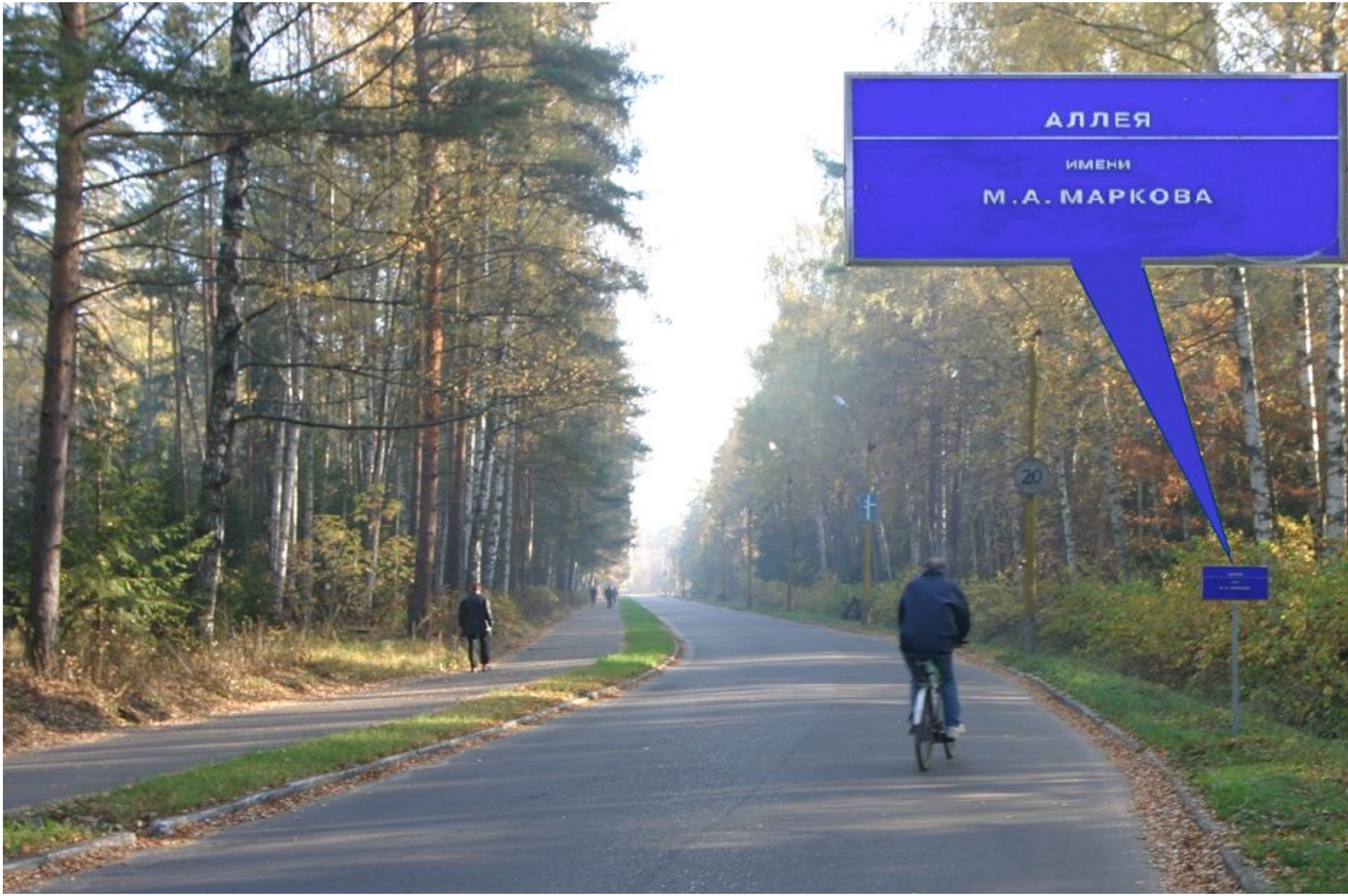
А.И.Малахов

Марковские чтения, посвященные 100-летию академика М.А.Маркова

Дубна, 15 мая 2008 г.

В период с 1954 по 1962 М.А.Марков работал в Дубне.

Здесь он возглавлял очень важный сектор, в задачу которого входило выявление нестандартных задач для постановки экспериментов на синхрофазотроне и предложение новых направлений исследования в физике высоких энергий. Был выдвинут ряд нетривиальных идей и интересных предложений. Часть из этих предложений нашла свое отражение в монографии М.А.Маркова "Гипероны и К-мезоны" (1958).


АЛЛЕЯ
имени
М.А. МАРКОВА
20

Моисей Александрович Марков, видимо, был первым теоретиком, разрабатывающим программы экспериментов для решения принципиальных проблем физики элементарных частиц на ускорителях, и первым лидером, создавшим школу физиков-теоретиков, понимающих возможности эксперимента.

А.М.Балдин. Физика высоких энергий в физическом институте им. П.Н.Лебедева Академии наук. (выступление на собрании, посвященном юбилею ФИАН, 26 декабря 1994 г.) ЭЧАЯ, т.29, вып.3, 1998, с.764-768.

Марков, Моисей Александрович (1908-1994) - русский писатель-фантаст, видный ученый-физик. Окончил МГУ. Автор фундаментальных работ по квантовой электродинамике и теории элементарных частиц. Работал директором института АН СССР. Жил в Москве.

Академик АН СССР (1966). Академик-секретарь отделения ядерной физики АН СССР (1967).

Первая НФ публикация - повесть "*Ошибка физиолога Ню*" (1985, 1988), написанная еще в середине 1930-х.

Герой Социалистического Труда (1978).

http://bvi.rusf.ru/fanta/esf_l/authors/m/markov_m.htm

Наука и жизнь, 1985, №№ 8, 9,10.

ОШИБКА ФИЗИОЛОГА НЮ

(В ПОЕЗДЕ ДАЛЬНЕГО СЛЕДОВАНИЯ)

НАУЧНО-ФАНТАСТИЧЕСКАЯ ПОВЕСТЬ

М. МАРКОВ.

НЕСКОЛЬКО ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫХ ЗАМЕЧАНИЙ АВТОРА

Человечество стремится продлить как можно дольше жизнь отдельного индивидуума. Известные успехи в достижении этой цели заметны на двух различных направлениях.

***С одной стороны**, совершенствуются условия существования человеческого организма в широком смысле этого слова: успешно ведется борьба с болезнетворными микробами, угрожающими жизни человека, имеются достижения в борьбе с физиологическим старением.*

***Другое направление** в достижении той же цели — долголетия — связано с возможной «механизацией» человеческого организма, когда функции некоторых органов берут на себя механические конструкции: механическое сердце, легкие, почки... Хотелось проанализировать логическую структуру этой второй возможности. Как оказывается, внутренняя логика предельной механизации человеческого организма ведет к неограниченному долголетию не человека, а мыслящей материи. Представляют интерес социальная структура, такого общества, изменения представлений о жизненных ценностях и т. д.*

Если совершенствование биологии и физиологии человека окажется в чем-то ограниченным, то желание мыслящего существа как можно дольше продлить свое существование неизбежно приведет к принятию им любой формы механизации своего организма.

Эти последние обстоятельства дали основания автору изложить свои старые заметки, использовав для этого литературную форму фантастической повести.


Рис. В. ЛОГИНОВА.

М.А.Марков «О четырехмерном протяженном электроне», ЖЭТФ, т.10 (1940) с.130.

М.А.Марков «Об одном критерии релятивистской инвариантности», 1946.

М.А.Марков «О возможном существовании в природе асимптотической свободы гравитационных взаимодействий» УФН, т.164, №1 (1994) с.57-68.

$$\mathrm{I}+\mathrm{II} \rightarrow 1+2+3+\ldots$$

$$b_{ik} = -(u_i - u_k)^2$$

$$u_i = p_i/m_i$$
$$u_k = p_k/m_k$$

$$i, k = \mathrm{I}, \mathrm{II}, 1, 2, 3, \ldots$$

A.M.Baldin and L.A.Didenko. Fortschr. Phys. 38 (1990) 4, 261-332.

Classification of Relativistic Nuclear Collisions on b_{ik}

$b_{ik} \sim 10^{-2}$

classic nuclear physics

$0.1 \leq b_{ik} < 1$

intermediate domain

$b_{ik} >> 1$

nuclei should be considered as quark-gluon systems

Invariant Definition of Hadron Jets

The jet is a cluster of hadrons with small relative b_{ik}.

The jet axis (a unit four-vector):

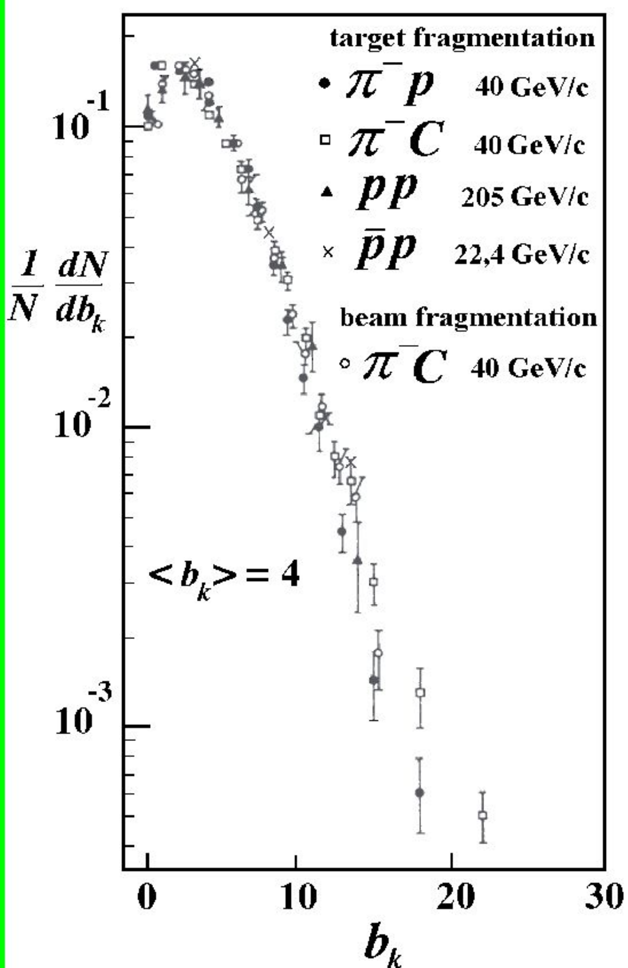
$$V = \Sigma(u_i / \sqrt{(\Sigma u_i)^2})$$

$$V_o^2 - V^2 = 1.$$

The summation is performed over all the particles belonging to the selected particle group (cluster).

It is possible to determine the squared four-velocity with respect to the jet axis:

$$b_k = -(V - u_k)^2.$$



- **Distributions of π - mesons on b_k in jets of hadron-hadron and hadron-nucleus collisions at high energies are UNIVERSAL. They do not depend either on the collision energy, or on the type of fragmenting system (p, π, p^-, C, ...)**

- **$<b_k> = 4$ characterizes the average four-velocity of π mesons with respect to the jet axis in the fragmentation of various quark objects**

- **The discovered UNIVERSALITY of the properties of four-dimensional hadron jets indicates that the hadronisation of quark systems is defined by the dynamics of interaction of a color charge with QCD vacuum**

Correlation Depletion Principle (CDP)

CDP was offered by ***Bogolyubov N.N. in statistical physics*** as a universal property of the probability distributions for particle location in ordinary space-time $(\boldsymbol{r},t)$.

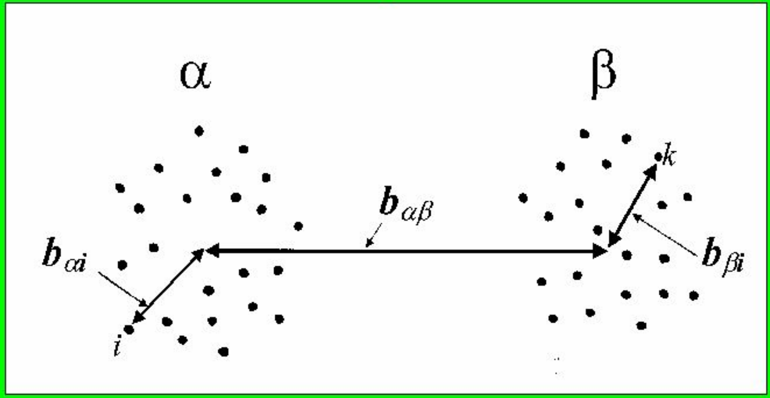
The principle is based on the idea that the correlation between largely spaced parts of a macroscopic system practically vanishes and the distribution is factorized.

CDP ***in Relativistic Nuclear Physics*** was suggested by ***Baldin A.M.*** in four-velocity space.

Due to complementary of r_{ik} and b_{ik} this principle is quite opposite to the Bogolyubov CDP.

The **Bogolyubov CDP** is valid for
$|r_i - r_k|^2 \to \infty$
while the **Baldin CDP** is fulfilled for
$|r_i - r_k|^2 \to 0$ (or $b_{ik} \to \infty$) according to the asymptotic freedom.

Correlation Depletion Principle



$$W\Big|_{b_{\alpha\beta}\to\infty} \to W_\alpha \cdot W_\beta$$

$$\alpha = I, \quad \beta = II$$

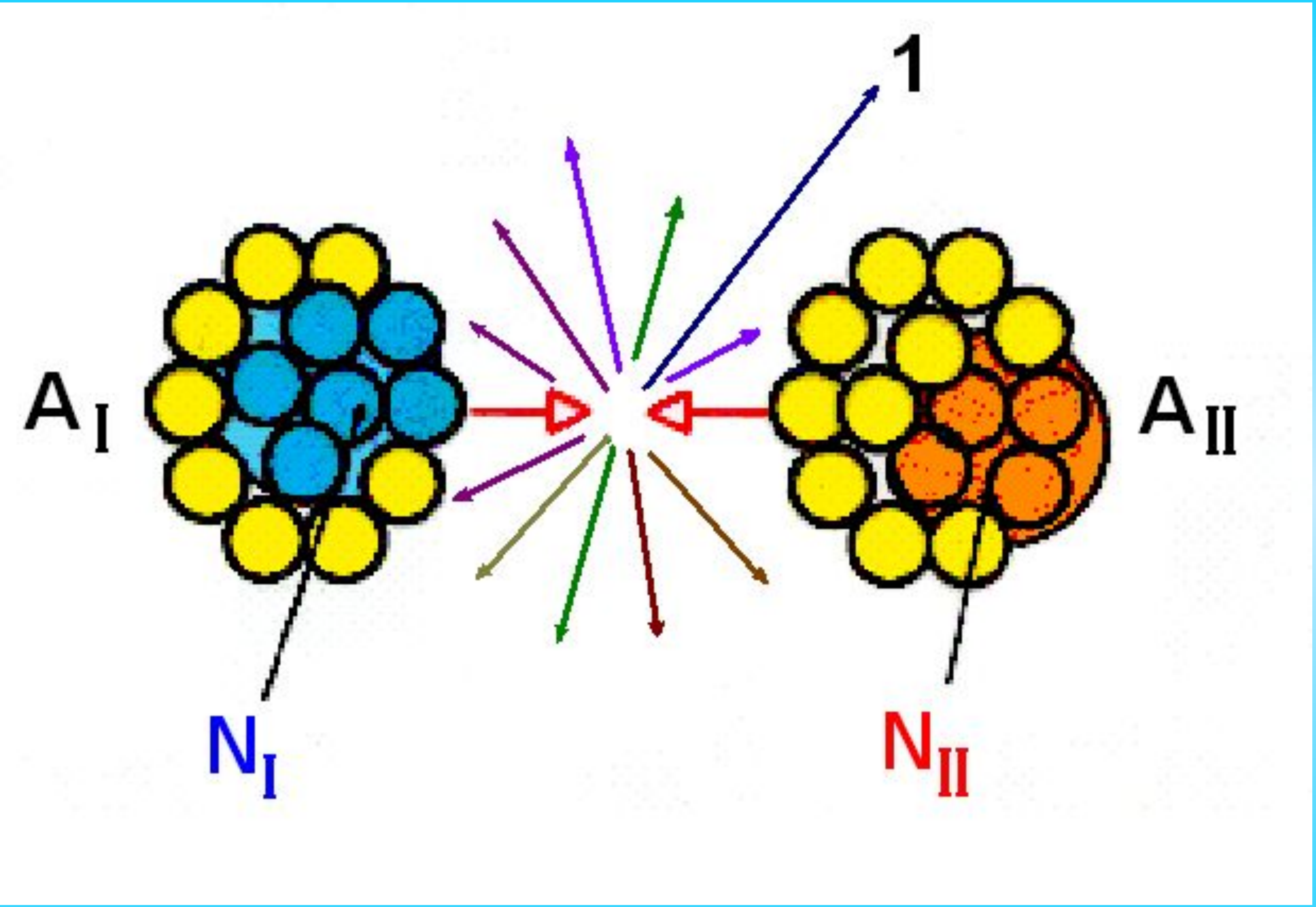
$$\mathbf{I + II \to 1 + \ldots}$$

$$d^2\sigma/db_{II1}dx_1 \to F_I \cdot F_{II}(b_{II1}, N_1),$$

$$b_{II1} = (u_{II} - u_1)^2$$

N_1 – *cumulative number*

To study F_{II}, we don't need to accelerate nuclei.


1
A I
A II
N I
N II

$$\Pi = \min\left[{}^{1}/_{2}\sqrt{(u_I N_I + u_{II} N_{II})^2}\right]$$

A.M.Baldin, A.A.Baldin. Physics of Particles and Nuclei, Vol.29 (3), 1998, p.577.

A.M.Baldin, A.I.Malakhov, and A.N.Sissakian. Physics of Particles and Nuclei, Vol.32. Suppl. 1, 2001, pp.S4-S30.

$$\boxed{E\cdot\frac{d^3\sigma}{d\vec{p}} = C_1\cdot A_{I}^{\alpha(N_I)}\cdot A_{II}^{\alpha(N_{II})}\cdot\exp\left(-\frac{\Pi}{C_2}\right)}$$

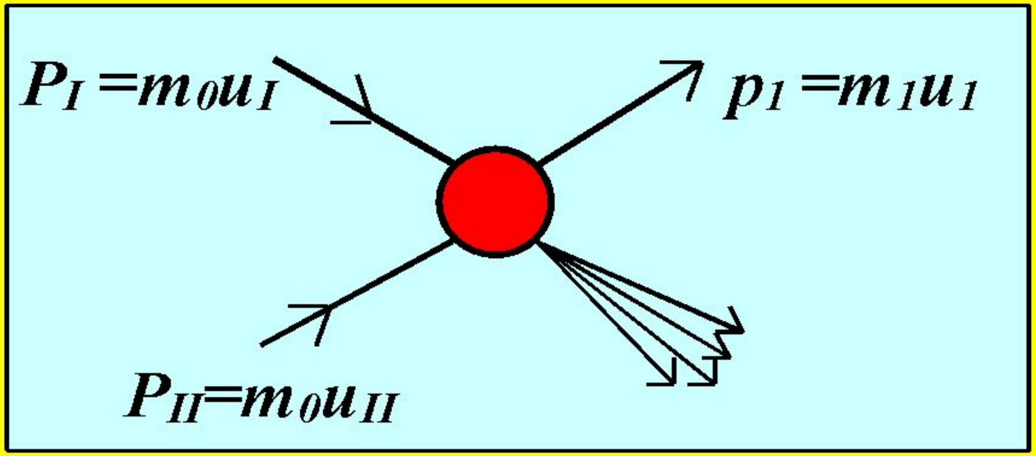
$$\alpha(N_I) = \frac{1}{3} + \frac{N_I}{3}$$

$$\alpha(N_{II}) = \frac{1}{3} + \frac{N_{II}}{3}$$

$$C_1 = 1.9\cdot 10^4\ mb\cdot GeV^{-2}\cdot c^3\cdot sr^{-1}$$

$$C_2 = 0.125\pm 0.002$$

$$I + II \rightarrow 1 + \ldots$$



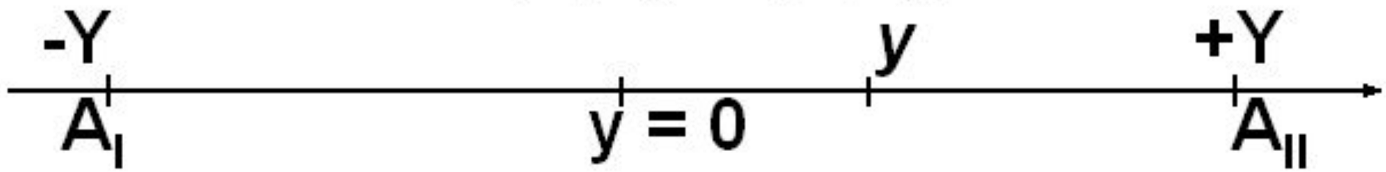
$$(N_I P_I + N_{II} P_{II} - p_1)^2 = \\ = (N_I m_0 + N_{II} m_0 + \Delta)^2$$

Δ is the mass of the particle providing conservation of the barion number, strangness and other quantum numbers

$$\Pi^{min} \Rightarrow d\Pi/dN_I = 0;\ d\Pi/dN_{II} = 0$$

In the central rapidity region ($y = 0$)

$$(u_1 u_I) = (u_1 u_{II})$$



$$\boxed{\begin{gathered} N_I = N_{II} = \\ N = [1 + \sqrt{1 + (\Phi_\delta/\Phi^2)}]\Phi, \end{gathered}}$$

where

$$\Phi = (1/m_0)[m_T chY + \Delta](\tfrac{1}{2}\, sh^2Y)$$

$$\Phi_\delta = (\Delta^2 - m_1{}^2)(4m_0{}^2\, sh^2Y)$$

and

$$\boxed{\Pi^{min} = N \cdot chY}$$

$$\Pi_{min} = \min\left[1/2\sqrt{(u_I N_I + u_{II} N_{II})^2}\right]$$
$$(N_I m_0 u_I + N_{II} u_{II} m_0 - m_1 u_1)^2 = (N_I m_0 + N_{II} m_0 + \Delta)^2$$

$$N_I \cdot N_{II} - \Phi_I N_I - \Phi_{II} N_{II} = \Phi_\delta,$$
$$\Phi_I = [(m_1/m_0)\cdot(u_I u_1) + \Delta/m_0]/[(u_I u_{II}) - 1]$$
$$\Phi_{II} = [(m_1/m_0)\cdot(u_{II} u_1) + \Delta/m_0]/[(u_I u_{II}) - 1]$$
$$\Phi_\delta = (\Delta^2 - m_1^2)/[2m_0^2((u_I u_{II}) - 1)].$$

$$[(N_I/\Phi_{II}) - 1]\cdot[(N_{II}/\Phi_I) - 1] = 1 + [\Phi_\delta/(\Phi_I \cdot \Phi_{II})]$$

$$d\Pi/dN_I = 0, \quad d\Pi/dN_{II} = 0.$$

$$F_I = [(N_I/\Phi_{II}) - 1], \qquad F_{II} = [(N_{II}/\Phi_I) - 1].$$
$$F_I \cdot F_{II} = 1 + \Phi_\delta/(\Phi_I \cdot \Phi_{II}) = \alpha$$

$$d\Pi/dF_I = 0, \quad d\Pi/dF_{II} = 0.$$

$$4\Pi^2 = N_I^2 + N_{II}^2 + 2N_I \cdot N_{II} \cdot (u_I u_{II})$$
$$4\Pi^2 = (F_I + 1)^2 \Phi_{II}^2 + (F_{II} + 1)^2 \Phi_I^2 + 2\Phi_I \cdot \Phi_{II} \cdot (F_I + 1) \cdot (F_{II} + 1) \cdot (u_I u_{II})$$
$$F_{II} = \alpha/F_I \qquad d(4\Pi^2)/dF_I = 0$$

$$F_I^4 + F_I^3[1 + (u_I u_{II})/z] - (\alpha/z) \cdot F_I \cdot [(u_I u_{II}) + (1/z)] - \alpha^2/z^2 = 0$$

$$z = \Phi_{II}/\Phi_I$$

$$\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{II}: \quad z \to (1/z); \quad F_I \to (\alpha/F_{II}).$$

$$F_{II}^4 + F_{II}^3[1 + (u_I u_{II}) z] - z \cdot \alpha \cdot F_{II} \cdot [z + (u_I u_{II})] - \alpha^2 z^2 = 0.$$

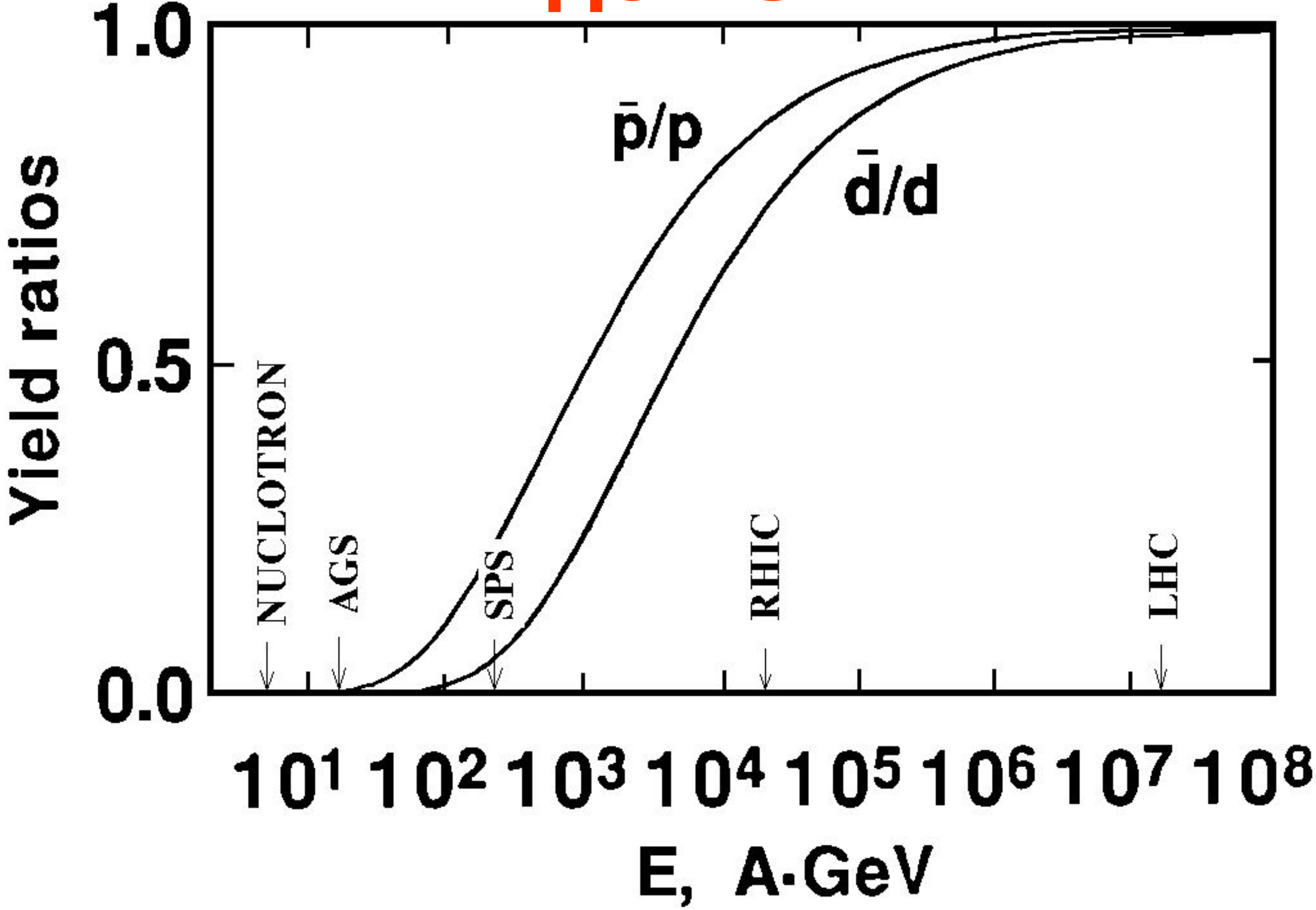
In the central rapidity region $(u_I u_I) = (u_I u_{II}) \to \quad z = 1 \to$

$$F_I = F_{II}, \ \Phi_I = \Phi_{II} = \Phi$$
$$F_I = F_{II}, \ (N_I/\Phi - 1) = (N_{II}/\Phi - 1), \ N_I = N_{II} = N$$
$$F^2 = \alpha, \ F_I = F_{II} = \sqrt{\alpha} = \sqrt{1 + (\Phi_\delta/\Phi^2)}$$

$$N_I = N_{II} = N = (1+F)\cdot\Phi = \left[1 + \sqrt{1 + (\Phi_\delta/\Phi^2)}\right]\cdot\Phi$$

Baldin A.M., Malakhov A.I.
JINR Rapid Communications,
No.1(87)-98, 1998, pp.5-12.

ПРЕДСКАЗАНИЯ



Asymptotics

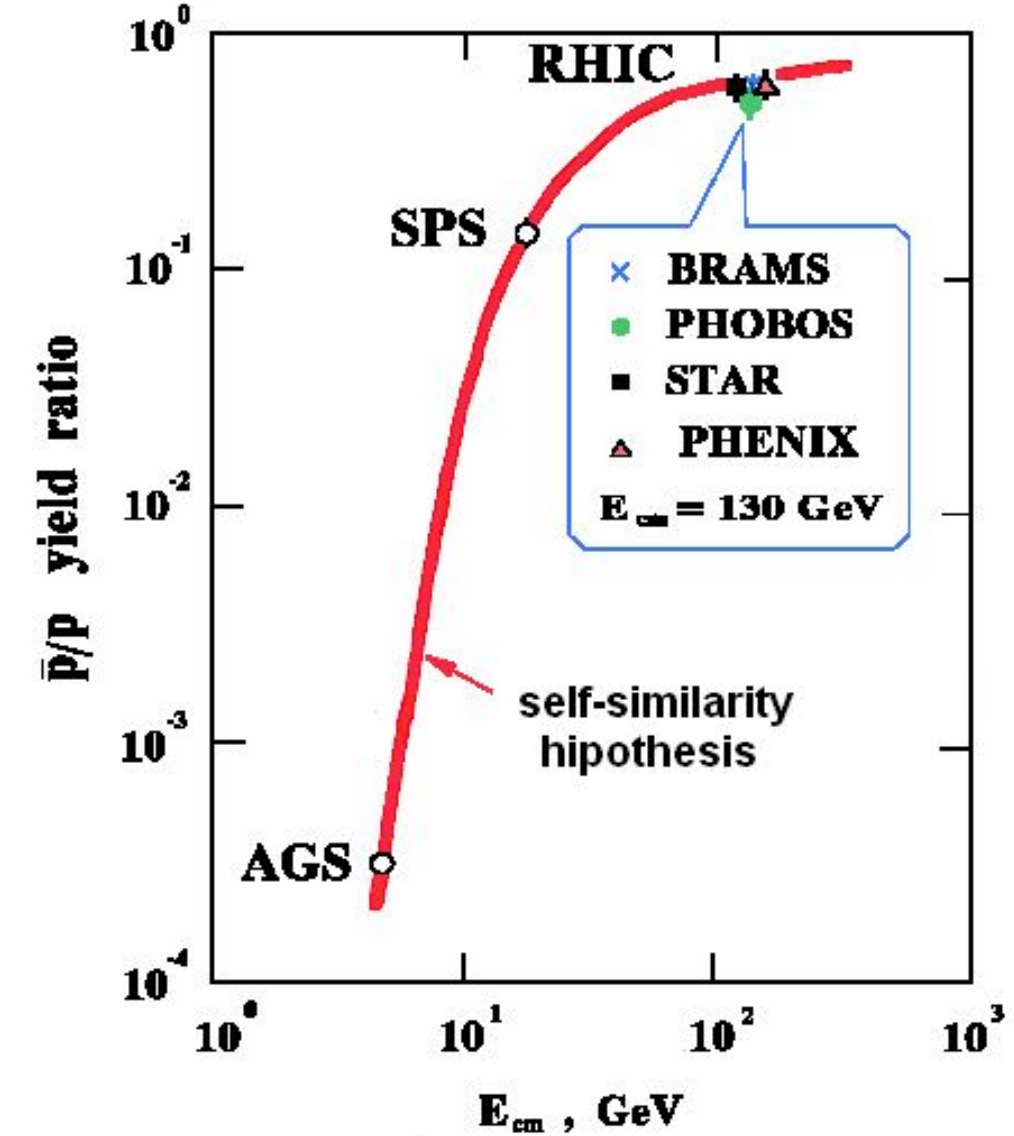
$$s/(2m_I m_{II}) \approx (u_I u_{II}) = ch2Y \rightarrow \infty$$

$$\Pi_\infty^{min} = (m_T/2m_0)[1+ \sqrt{1+(\Delta^2 - m_1^{\,2})/m_T^{\,2}}$$

$$N_\infty \rightarrow 0$$

Аналитмческое представление П приводит к следующим заключениям:

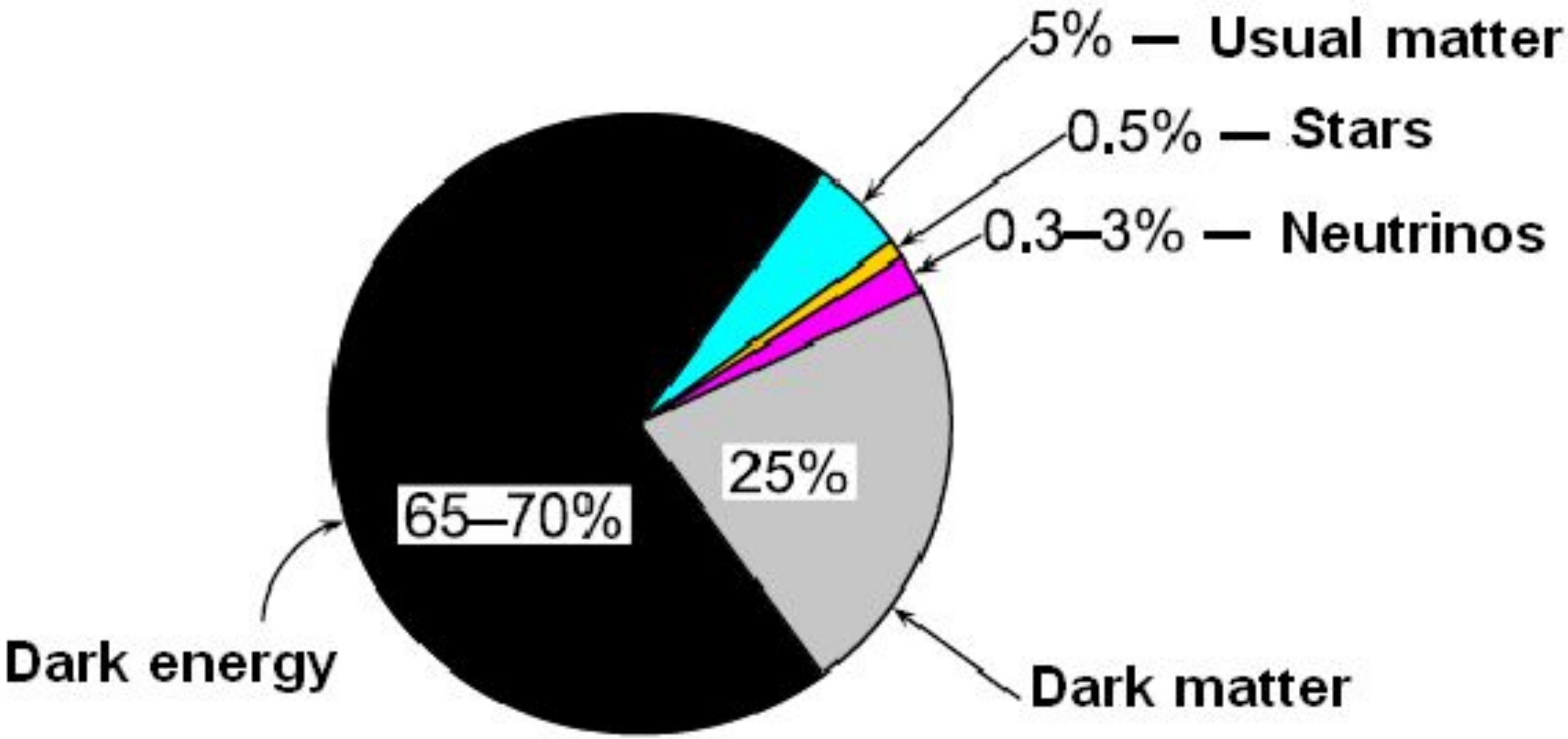
- Существует предельная величина П при высоких энергиях
- Отношение выхода частиц к выходу античастиц и выходов ядер к выходам антиядер стремятся к единице с ростом энергии
- Эффективное число нуклонов, включенных во взаимодействие уменьшается с ростом энергии столкновения
- Вероятность наблюдения антиядер и фрагментов в центральной области быстрот достаточно мала
- Выход странных частиц растет с ростом энергии столкновения



RHIC
SPS
AGS
BRAMS
PHOBOS
STAR
PHENIX
E cm = 130 GeV
self-similarity hipothesis
p̄/p yield ratio
E cm , GeV

Темная энергия

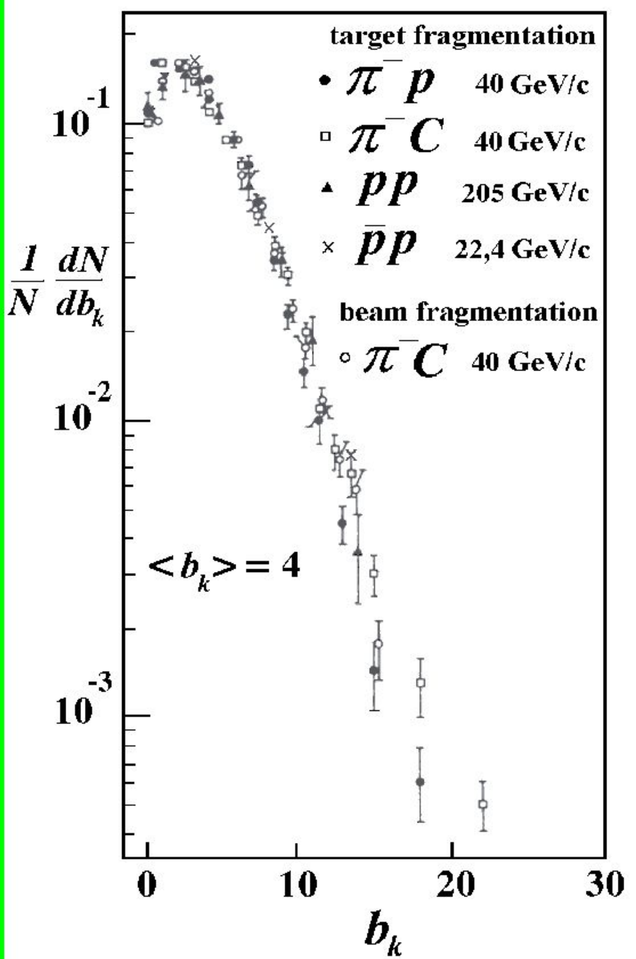
Energy balance of the modern Universe



Астрономические наблюдения показывают, что Вселенная расширяется с ускорением: скорость расширения растет со временем.

Одним из кандидатов на роль темной энергии может являться вакуум. Плотность энергии вакуума не меняется при расширении Вселенной и это означает, что вакуум имеет отрицательное давление.

Изменение энергии при изменении объема определяется давлением $\Delta E = - p\Delta V$. При расширении Вселенной энергия вакуума растет вместе с объемом (плотность энергии постоянна). Это возможно, если давление вакуума отрицательно.



- Distributions of π - mesons on b_k in jets of hadron-hadron and hadron-nucleus collisions at high energies are UNIVERSAL. They do not depend either on the collision energy, or on the type of fragmenting system (p, π, p^-, C, ...)

- $<b_k>$ = 4 characterizes the average four-velocity of π mesons with respect to the jet axis in the fragmentation of various quark objects

- The discovered UNIVERSALITY of the properties of four-dimensional hadron jets indicates that the hadronisation of quark systems is defined by the dynamics of interaction of a color charge with QCD vacuum

$$\Delta E = -p\Delta V$$

$$\boxed{I + II \rightarrow 1 + 2 + \ldots}$$

$$b_{I\,II} = -(u_I - u_{II})^2 = -(1 - 2u_I u_{II} - 1) =$$

$$= 2(u_I u_{II} - 1) = 2(E_I/m_I - 1)$$

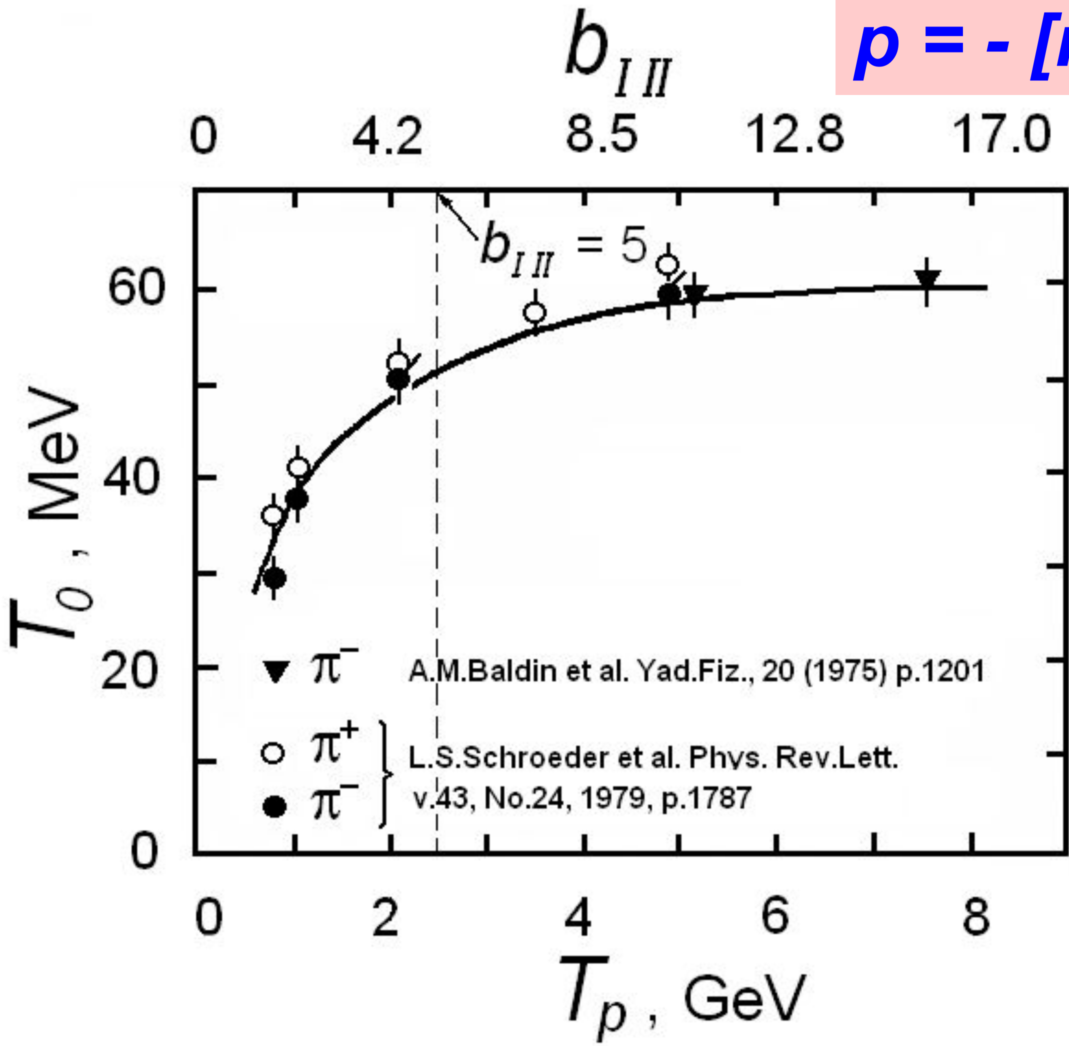
$$\Delta b_{I\,II} = 2\Delta E_I/m_I \longrightarrow \Delta E_I = (m_I/2)\Delta b_{I\,II} = -p\Delta V$$

$$\boxed{p = -(m_I/2)\Delta b_{I\,II}/\Delta V)}$$

$$V = \sigma\, 2r_0 A^{1/3} \longrightarrow \Delta V = \Delta\sigma\, 2r_0 A^{1/3}$$

$$\boxed{p = -[m_I/4\, r_0 A^{1/3}]\Delta b_{I\,II}/\Delta\sigma}$$

$p = - [m_I / 4\, r_0 A^{1/3}] \Delta b_{I\,II} / \Delta\sigma$



$\Delta b_{I\,II} > 0$

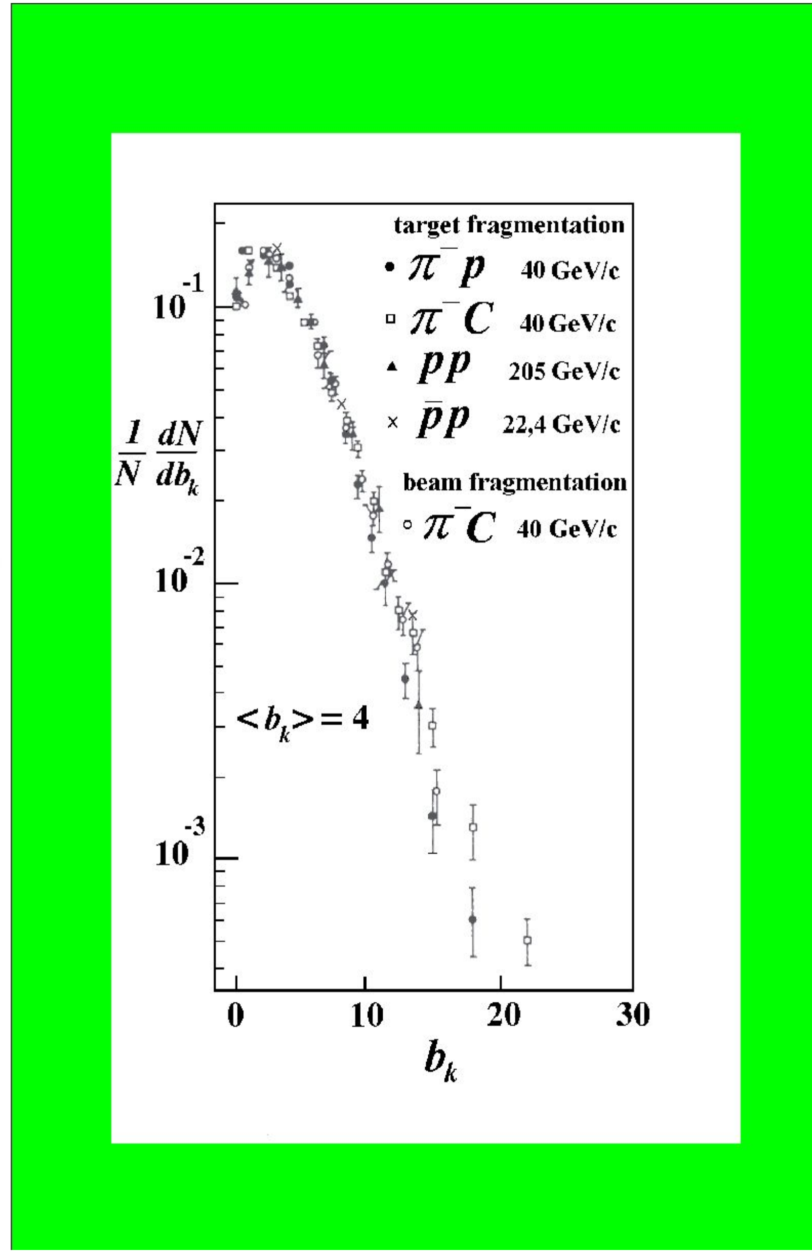
$\Delta\sigma > 0$

$p < 0$

$\sigma \sim exp\,(-T_\pi / T_0)$

Dependence of T_0 parameter for pion at 180° for p+Cu collisions on the energy of incident proton T_p. Pion cross-section parameterized by the form $E \cdot d^3\sigma/dp^3 = C \cdot exp(-T/T_0)$, where T is the pion laboratory kinetic energy

$$p = \frac{\Delta E}{\Delta V} = - \frac{m_k}{4 r_0 A^{\frac{1}{3}} (1 \pm \frac{1}{\beta_k})} \frac{\Delta b_k}{\Delta \sigma}$$



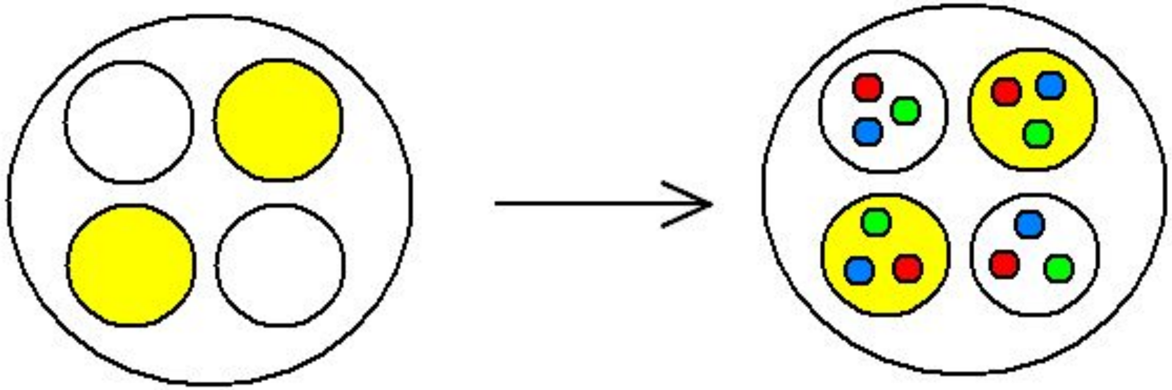
Структура кварков

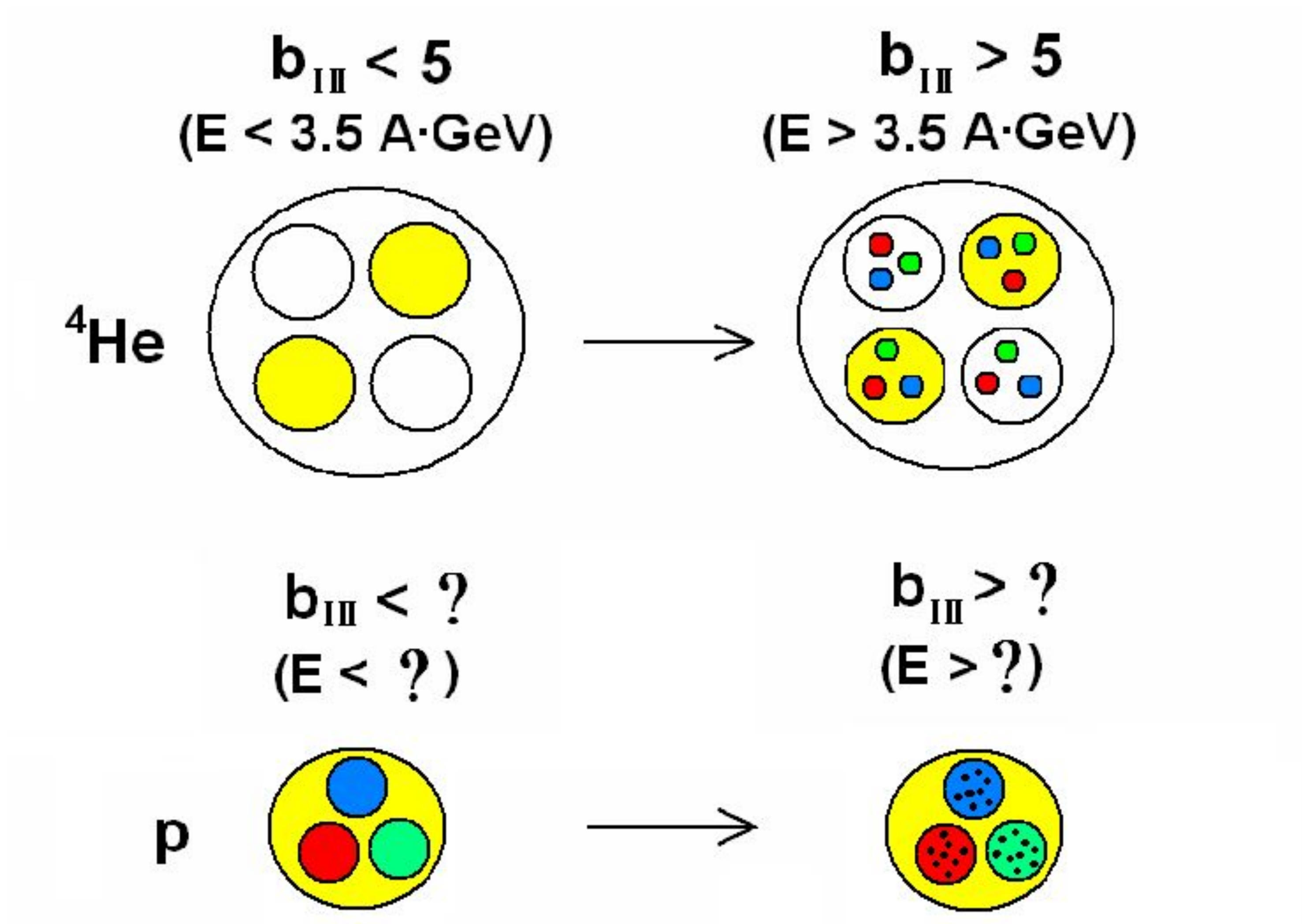
A.Malakhov. Relativistic Nuclear Physics: from Handres of MeV to TeV. 8th Intern. Workshop. Dubna, May 23-28, 2005. E1,2-2006-30, Dubna (2006) pp.44-46.

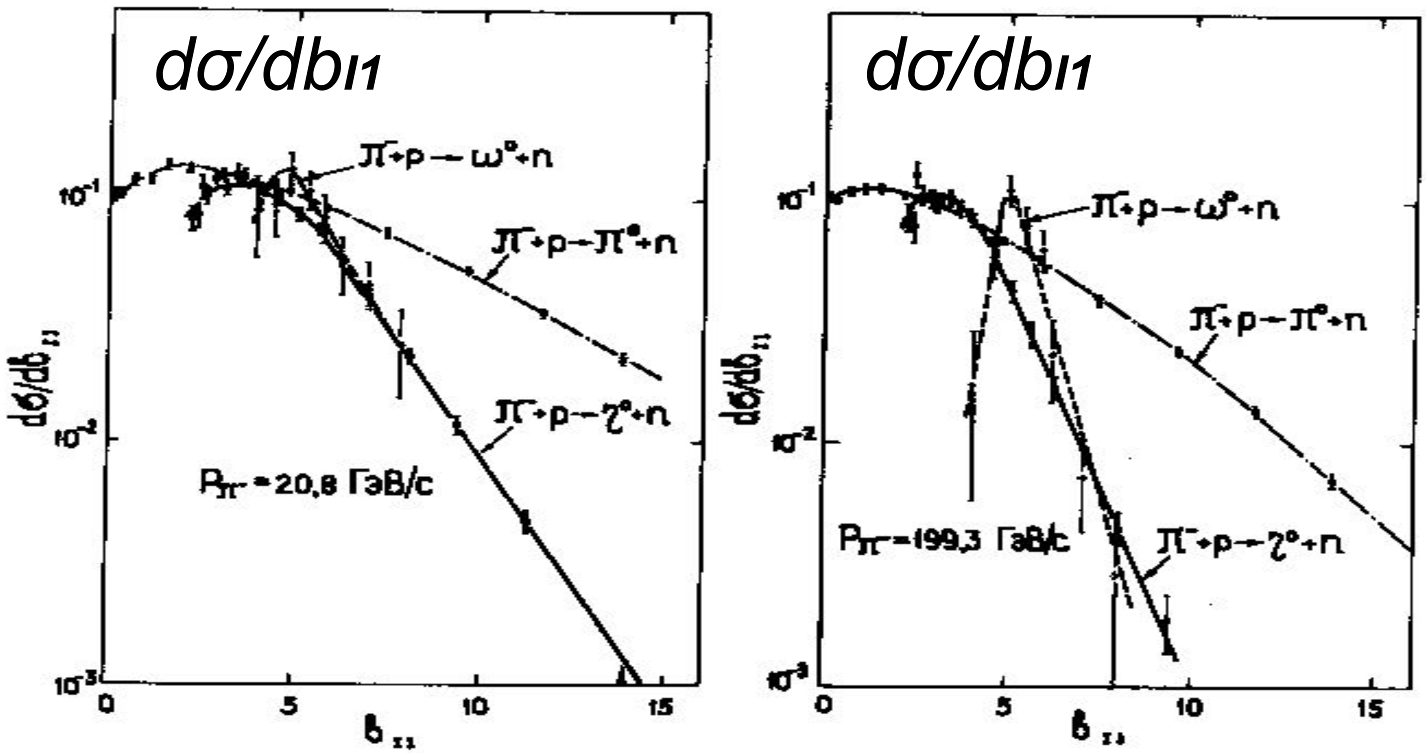
$b_{\mathrm{I\,II}} < 5$
(E < 3.5 A·GeV)

$b_{\mathrm{I\,II}} > 5$
(E > 3.5 A·GeV)

^4He



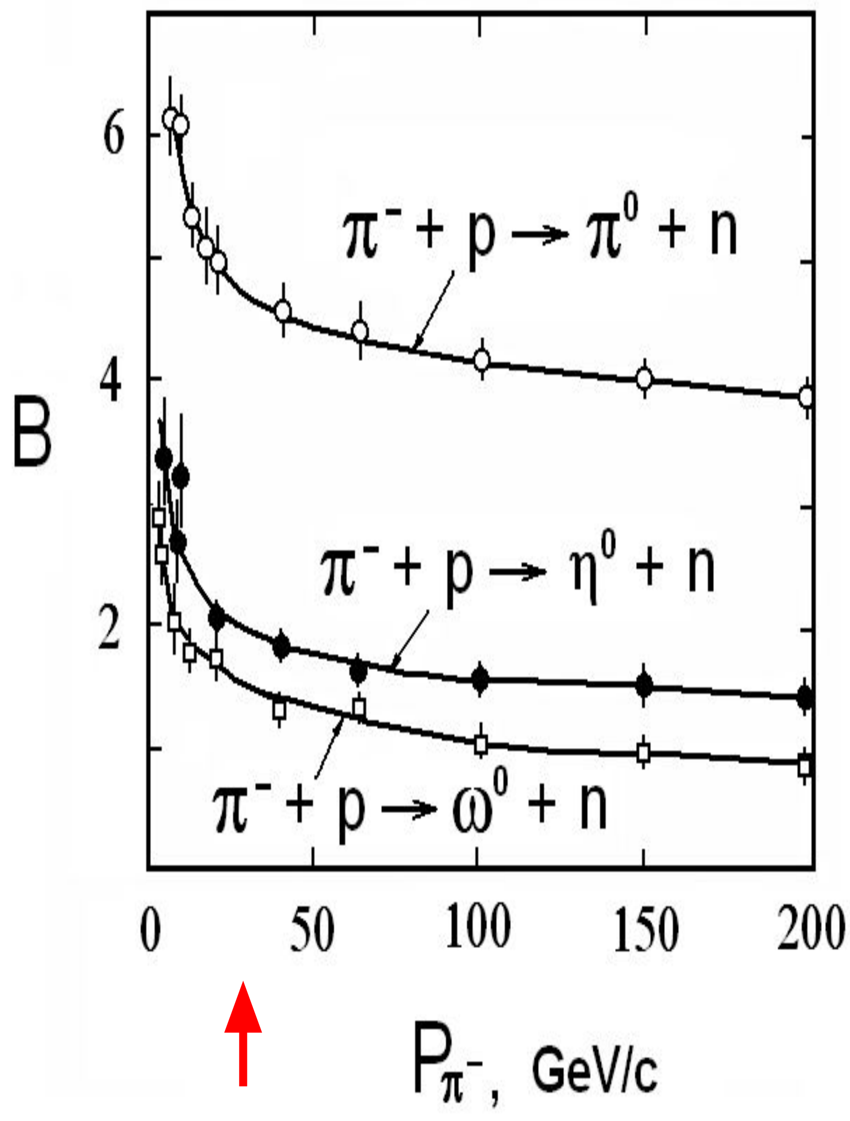

$b_{I\,II} < 5$
(E < 3.5 A·GeV)
$b_{I\,II} > 5$
(E > 3.5 A·GeV)
^4He
$b_{I\,II} <$?
(E < ?)
$b_{I\,II} >$?
(E > ?)
p



b I1 ***b I1***

$$d\sigma/db_{I1} = A\cdot \exp(-b_{I1}/B)$$

A.I.Malakhov, G.L.Melkumov. JINR Rapid Commun., No.19-86 (1986) pp.32-39).

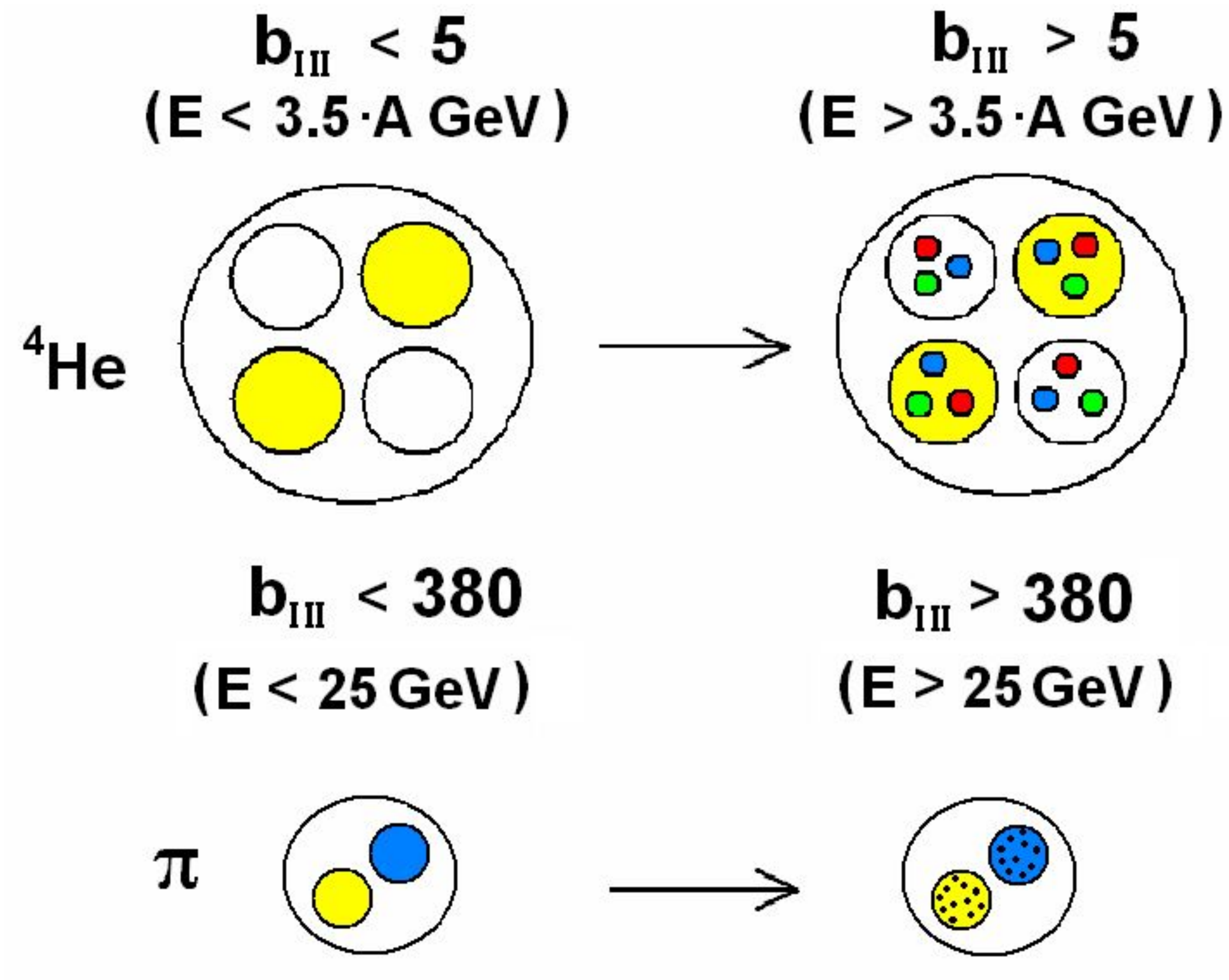


Как можно видеть асимптотический режим начинается с импульса пионов $\boldsymbol{p_\pi}$ **~ 25 ГэВ,** который соответствует $\boldsymbol{b_{I\,II}}$ ~ 380. Таким образом мы можем предположить, что при $\boldsymbol{b_{I\,II}}$ ≥ 380 начинается проявление внутренней структуры кварков и в этой области возможно изучение этой структуры.

$$b_{I\,II} = -\,(u_\pi - u_p)^2 = -\,(1 - 2u_\pi u_p - 1) =$$

$$= 2(u_\pi u_p - 1) = 2(E_\pi/m_\pi - 1) = 2T_\pi/m_\pi \cong$$

$$\cong 2\cdot 25/0.130 \cong 380.$$



$b_{III} < 5$
$(E < 3.5 \cdot A\ \mathrm{GeV})$
$b_{III} > 5$
$(E > 3.5 \cdot A\ \mathrm{GeV})$
^4He
$b_{III} < 380$
$(E < 25\ \mathrm{GeV})$
$b_{III} > 380$
$(E > 25\ \mathrm{GeV})$
π

Наблюдаемость частиц из которых могут состоять кварки

Наблюдаемость коротко-живущих частиц основана на двух необходимых критериях:

1) Сечение образования реально наблюдаемых продуктов вторичного взаимодействия (распада) может быть с достаточной точностью представлено в форме двух множителей:

$$\sigma = \sigma_p \cdot W_d,$$

где W_d интерпретируется как вероятность распада (или вероятность вторичного взаимодействия) предполагаемой частицы, σ_p сечение образования этой частицы.

2) Универсальность W_d или подобие свойств W_d в различных реакциях.

$$\mathrm{I} + \mathrm{II} \rightarrow \mathrm{Jet}^{\alpha} + \mathrm{Jet}^{\beta}$$

$$\sigma = \sigma_p \cdot W^{\alpha}(b_k) \cdot W^{\beta}(b_k)$$

Прикладные задачи

Экспериментальное и теоретическое изучение релятивистских коллективных эффектов при образовании частиц в кумулятивных и подпороговых реакциях в области релятивистской ядерной физики показало эффективность применения автомодельного подхода и в ряде других случаев.

В частности, этот подход был применен А.А.Балдиным для описания генерации и ускорения частиц короткими лазерными импульсами.

А.А.Балдин и др. Физика с использованием лазеров – от релятивистского рождения частиц до технологий обработки материалов. Препринт ОИЯИ, Р18-2007-18 (2007).

Обобщая релятивистски инвариантный автомодельный подход на случай коллективного взаимодействия группы когерентных фотонов с электронами, авторам удалось описать не только экспериментально наблюдаемую монохроматичность и малый эмиттанс ускоренных электронов, но дать предсказания по соотношению сечений генерации ускоренных электронов и образованных позитронов.

Полученные таким образом спектры позитронов согласуются качественно с экспериментальными данными.

$$E_\gamma + xP_2 = xP_2' + P_3 + P_4$$

E_γ – энергия "коллективных фотонов"

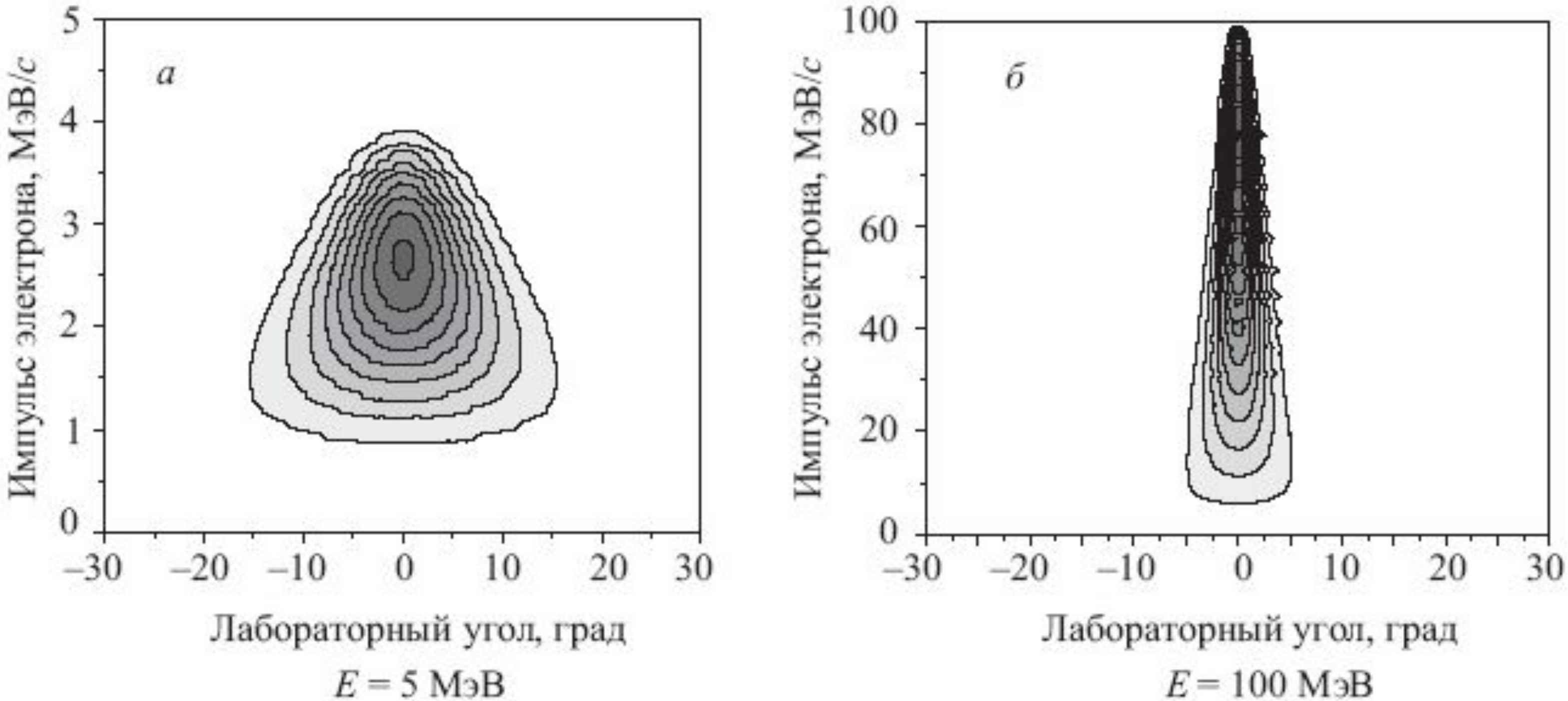
P_2 – импульс первичного электрона

P_2' - импульс вторичного электрона

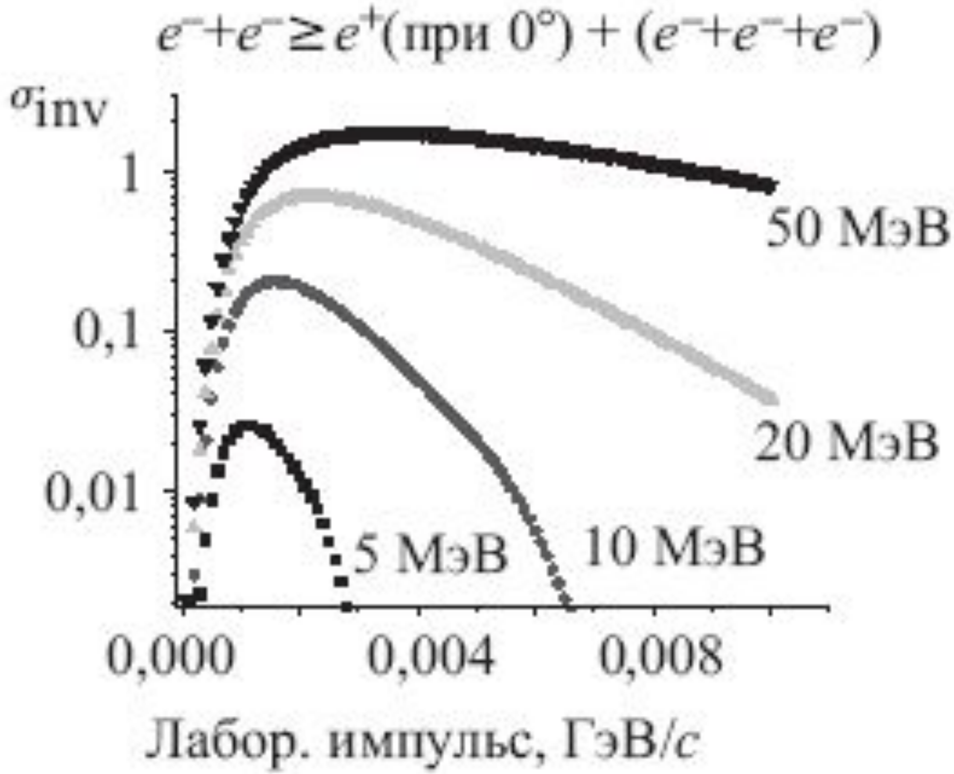
P_3 - импульс вторичного электрона

P_4 - импульс вторичного позитрона

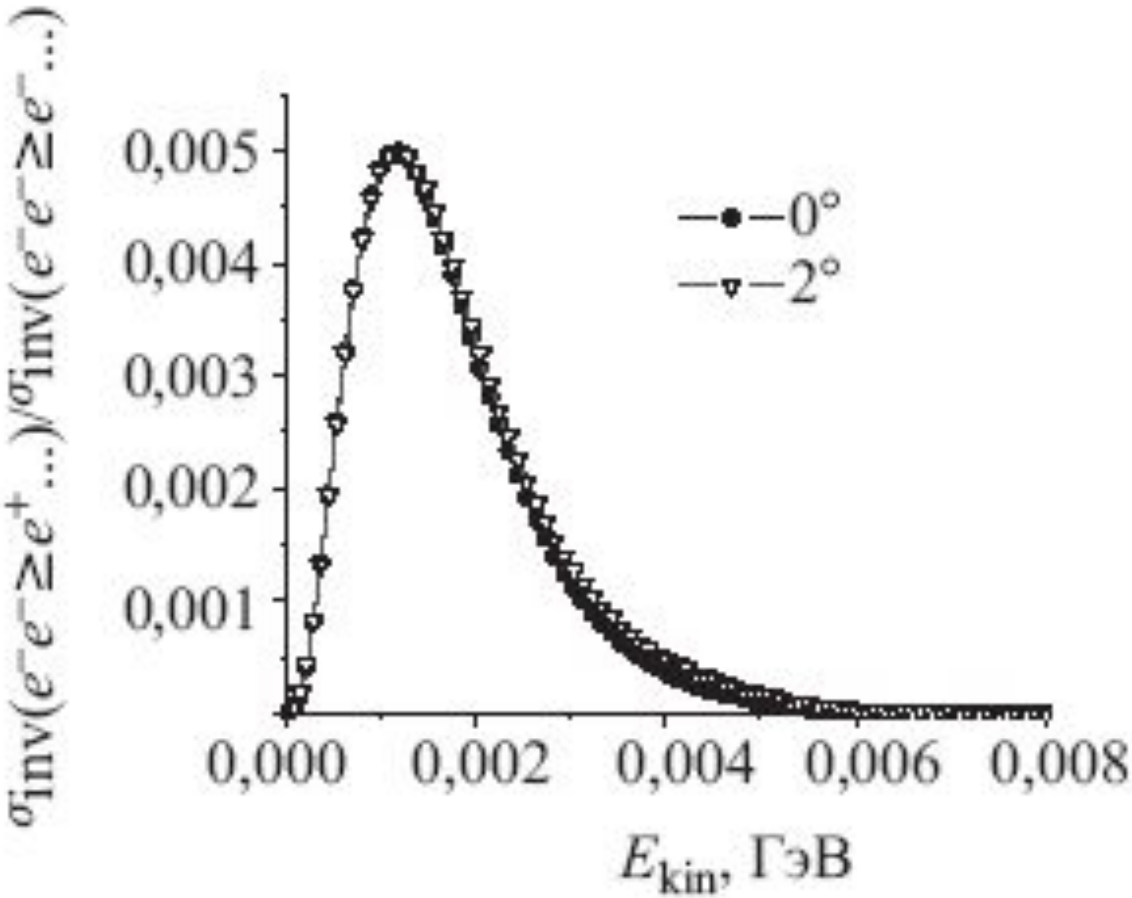
$$\sigma^{e}_{inv} = C_1 \cdot exp\,(-П/C_2)$$



Расчетное распределение по импульсам и углам электронов, ускоренных под действием короткого лазерного импульса.



Инвариантные сечения рождения позитронов под углом 0^0 в результате взаимодействия ультрокороткого лазерного импульса с веществом для нескольких значений энергии ускоренных электронов.



Отношение сечения рождения позитронов к сечению рождения электронов под углами 0^0 и 2^0 в результате взаимодействия ультракороткого лазерного импульса с веществом.

Заключение

- Идеи М.А.Маркова нашли плодотворное развитие в программе исследований ЛВЭ
- Разработанный А.М.Балдиным подход в изучении релятивистских ядерных взаимодействий на основе первых принципов дал новый толчок в развитии этой области физики
- Дальнейшее развитие этих идей несомненно даст новые уникальные результаты как в фундаментальной (структура QCD вакуума, темная энергия, структура кварков и т.д.) так и в прикладной областях науки

Спасибо за внимание !

$$b_k = -(V - u_k)^2 = -(\overbrace{V^2}^{=1} - 2Vu_k + \overbrace{u_k^2}^{=1}) = 2(Vu_k - 1) =$$

$$= 2\left(\frac{Vp_k}{m_k} - 1\right) = 2\left(\frac{E_k}{m_k} - \frac{\vec{V}\vec{P}_k}{m_k} \quad 1\right) = 2\frac{E_k}{m_k} - 2\frac{\vec{V}\vec{P}_k}{m_k} - 2\,.$$

$$b_k - 2\frac{E_k}{m_k} + 2 = -2\frac{\vec{V}\vec{P}_k}{m_k}$$

$$\left(b_k - 2\frac{E_k}{m_k} + 2\right)^2 = 4\,\frac{\overbrace{\vec{V}^2}^{=1}\vec{P}_k^{\,2}}{m_k} = 4\,\frac{p_k^2}{m_k^2}$$

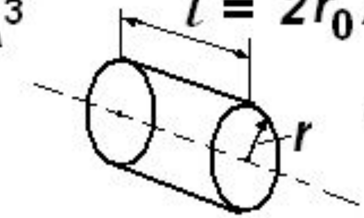
$$b_k - 2\frac{E_k}{m_k} + 2 = \pm\, 2\frac{p_k}{m_k}$$

$$\boxed{b_k = 2\frac{p_k}{m_k} + 2\frac{E_k}{m_k} - 2 = \frac{2}{m_k}(\pm p_k + E_k - m_k)}$$

$$\boxed{p = -\frac{\Delta E}{\Delta V}}$$

$$V = \sigma \cdot l = \sigma \cdot 2 r_0 A^{\frac{1}{3}}$$

$$\Delta V = \Delta\sigma \cdot 2 r_0 A^{\frac{1}{3}}$$



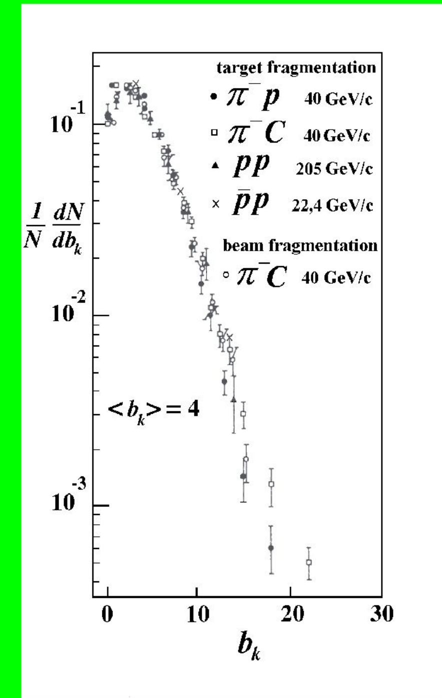
$$\boxed{b_k = 2\frac{p_k}{m_k} + 2\frac{E_k}{m_k} - 2 = \frac{2}{m_k}(\pm p_k + E_k - m_k)}$$

$$\Delta b_k = \frac{2}{m_k}(\pm\Delta p_k + \Delta E_k) = \frac{2}{m_k}\left[\pm\Delta(E_k^2 + m_k^2)^{\frac{1}{2}} + \Delta E_k\right] =$$

$$= \frac{2}{m_k}\left[\pm\frac{1}{2}(E_k^2 - m_k^2)^{-\frac{1}{2}} 2E_k \Delta E_k + \Delta E_k\right] = \frac{2}{m_k}\left(\pm\frac{E_k}{p_k} + 1\right)\Delta E_k$$

$$\boxed{\Delta E_k = \frac{m_k}{2\left(1 \pm \frac{E_k}{p_k}\right)}\Delta b_k = \frac{m_k}{2\left(1 \pm \frac{1}{\beta_k}\right)}\Delta b_k}$$

$$p = -\frac{\Delta E}{\Delta V} = -\frac{\left[\dfrac{m_k}{2\left(1 \pm \dfrac{1}{\beta_k}\right)}\right]\Delta b_k}{2 r_0 A^{\frac{1}{3}} \cdot \Delta\sigma} =$$



$$= -\frac{m_k}{4 r_0 A^{\frac{1}{3}}\left(1 \pm \frac{1}{\beta_k}\right)} \frac{\Delta b_k}{\Delta\sigma} \approx \begin{cases} -\dfrac{1}{8}\dfrac{m_k}{r_0 A^{\frac{1}{3}}}\dfrac{\Delta b_k}{\Delta\sigma} \\ +2.25\,\dfrac{m_k}{r_0 A^{\frac{1}{3}}}\dfrac{\Delta b_k}{\Delta\sigma}, & \beta_k \approx 0{,}9 \end{cases}$$

≈ 1