Нечеткая логика и нечеткие множества

Нечеткие знания 2

Проблема классификации

Эксперты при формировании оценок тех или иных признаков, симптомов или ситуаций, как правило, используют знания, основанные не на информации о конкретных примерах объектов, данных, отношений, а оперируют скорее понятиями классов объектов, отношений, гипотез и пр. Методы решений задач, таким образом, должны включать этап классификации данных или знаний. То есть конкретные экземпляры объектов или сигналов рассматриваются как представители более общих классов или категорий. Следовательно, процесс решения сводится к задаче выявления принадлежности элементов определенным множествам.

Традиционное решение задачи принадлежности

Основано на законах логики, которые, в свою очередь, опираются на два предположения:

- для любого элемента и множества элемент либо является членом множества, либо принадлежит дополнению этого множества;
- закон исключения третьего — элемент не может одновременно принадлежать множеству и его дополнению.

Классическая теория множеств базируется на булевой, двухзначной логике. Принадлежность объекта к классу $a \in A$ может принимать значения *ИСТИНА*, если объект *a* входит в множество *A*, или *ЛОЖЬ* — в противоположном случае. После появления понятия «нечеткие множества», обычные множества стали также называть «жесткими».

Проблема нечеткой принадлежности

- В реальных ситуациях редко встречаются объекты, которые точно соответствуют той или иной категории или классу. У конкретного экземпляра часть признаков может присутствовать, а другая часть отсутствовать. Таким образом, принадлежность этого объекта к какому-либо классу является размытой.
- Для формирования суждений о подобных категориях и принадлежащих к ним объектов Лофти Заде (Zadeh) предложил *теорию нечетких множеств*. Этот формализм нарушает оба предположения классической теории «четких» множеств. Для вычислений на нечетких множествах используется аппарат *нечеткой логики*, позволяющей использовать понятие неопределенности в логических вычислениях.

Понятие «лингвистической переменной»

В нечеткой логике вводится понятие *лингвистической переменной*, значениями которой являются не числа, а слова естественного языка, называемые термами. Например, лингвистическая переменная «скорость» может иметь значения «высокая», «средняя», «очень низкая» и т. д. Фразы, значение которых принимает переменная, в свою очередь, являются именами *нечетких переменных*. Значения лингвистической переменной (ЛП) определяются через *нечеткие множества* (НМ), которые, в свою очередь, определены на некотором базовом наборе значений или базовой числовой шкале, имеющей размерность. Каждое значение ЛП определяется как нечеткое множество (например, НМ «низкий рост»).

Формальное определение НМ

Нечеткое множество определяется через некоторую базовую шкалу *B* и функцию принадлежности *НМ* — μ(*x*), $x \in B$, принимающую значения на интервале [0..1]. Таким образом, нечеткое множество *B* — это совокупность пар вида (*x*, μ(*x*)), где $x \in B$. Часто встречается и такая запись:

$$B = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\mu(x_i)},$$

где x_i — *i*-ое значение базовой шкалы.

Функция принадлежности определяет субъективную степень уверенности эксперта в том, что данное конкретное значение базовой шкалы соответствует определяемому НМ. Эту функцию не стоит путать с вероятностью, носящей объективный характер и подчиняющейся другим математическим зависимостям.

Формирование НМ «Дорогой автомобиль»

Рассмотрим нечеткую категорию «дорогой автомобиль». В классической теории множество *A* «дорогих автомобилей» можно сформировать либо перечислением конкретных представителей данного класса, либо введя в рассмотрение характеристическую функцию *f*, такую, что для любого объекта *X*:

- $f(X) = ИСТИНА$ тогда и только тогда, когда $X \in A$.
- Например, эта функция может отбирать только те автомобили, цена которых более 50 000 евро:

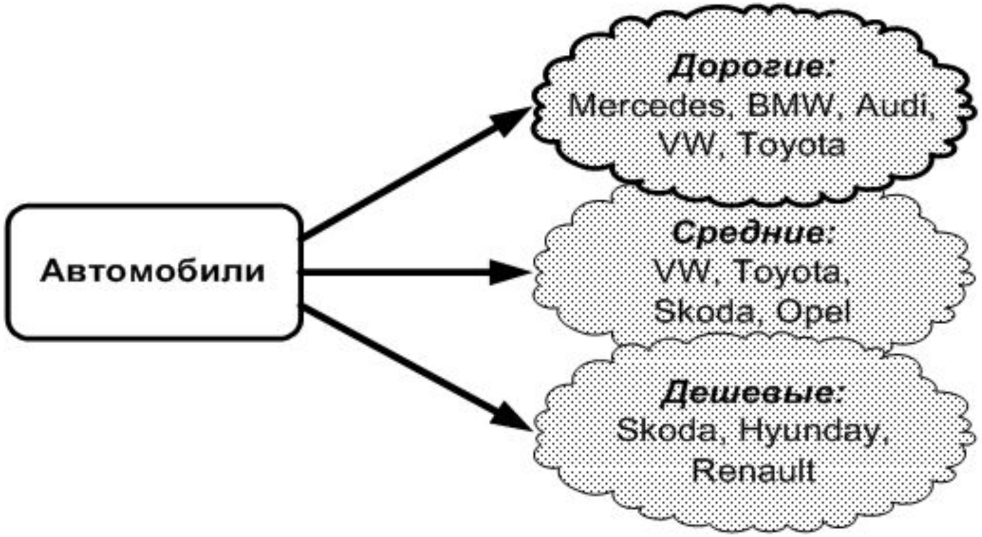
$$P50(X) = \begin{cases} ИСТИНА, \text{ если } CAR(X) \text{ и } PRICE(X) > 50000 \\ ЛОЖЬ, \text{ в противном случае} \end{cases}.$$

Продолжение

Используя предикат CAR(X) и функцию PRICE(X), можно сформировать множество, элементами которого являются только те элементы множества CAR, цена которых превышает 50000 евро:

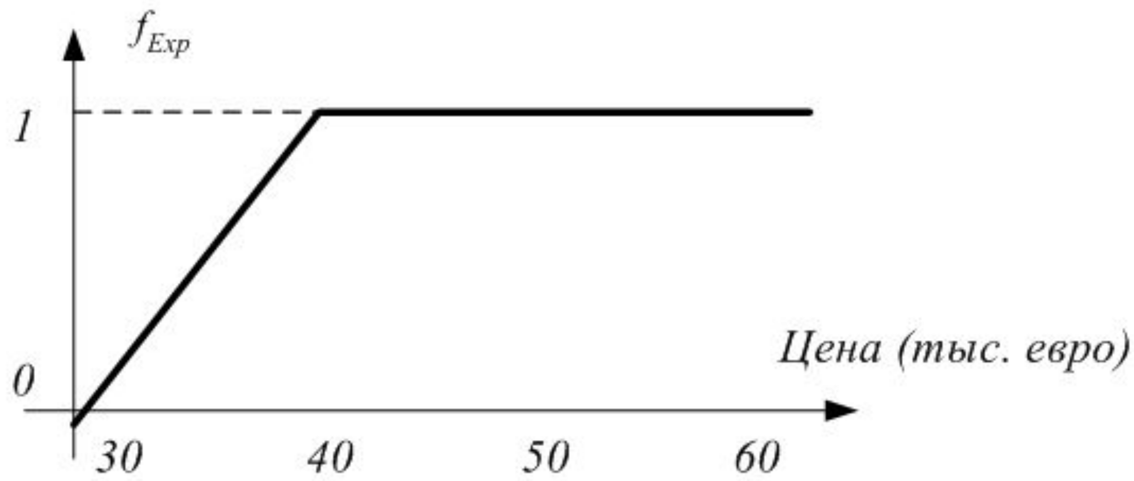
$$\{ X \in CAR \mid PRICE(X) > 50000 \}.$$

Представляя все множество «дорогих» автомобилей, интуитивно кажется, что границы этого множества должны быть размыты, а принадлежность элементов этому множеству может быть каким либо образом ранжирована.



Продолжение

Можно сказать, что каждый элемент (автомобиль) множества «дорогих автомобилей» более или менее типичен для данной категории. Следовательно, с помощью некоторой функции можно выразить степень принадлежности элемента к множеству. Если для объекта X функция μ(X) = 1, то этот объект определенно является членом множества, а если для него μ(X) = 0, то он определенно не является членом множества. Все промежуточные значения μ(X) выражают степень принадлежности к множеству. В примере с автомобилями требуется функция, оперирующая с ценой. Ее можно определить таким образом, что fExp(30000) = 0 и fExp(40000) = 1, а все промежуточные значения представляются некоторой монотонной кривой, имеющей значения в интервале [0, 1]



Продолжение

Для определения множества *EXP_CAR* «дорогих автомобилей», на основании приведенной выше функции можно ввести новую характеристическую функцию, определенную на множестве всех автомобилей:

$fEXP\_CAR(X) = fExp(PRICE(X))$.

Членами этого множества, таким образом, становятся пары (*объект*, *степень*), например:

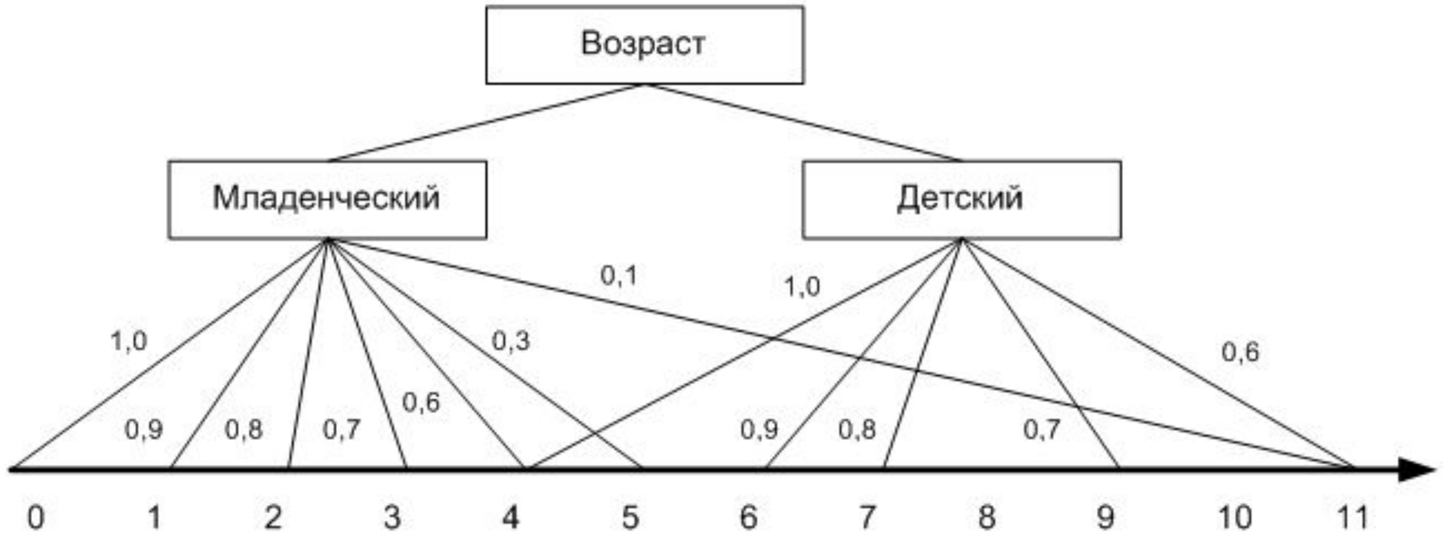
EXP_CAR = {(Mercedes, 0,9), (Toyota, 0,6), (Opel, 0,1)}.

Лингвистическая переменная «Возраст»

Пусть перед нами стоит задача интерпретации значений ЛП «*возраст*», таких как «молодой» возраст, «преклонный» возраст или «переходный» возраст. Определим «возраст» как ЛП. Тогда «молодой», «преклонный», «переходный» будут значениями этой лингвистической переменной. Более полный базовый набор значений ЛП «возраст» следующий:

B={младенческий, детский, юный, молодой, зрелый, преклонный, старческий}.

Для ЛП «возраст» базовая шкала — это числовая шкала от 0 до 120, обозначающая количество прожитых лет, а функция принадлежности определяет, насколько мы уверены в том, что данное количество лет можно отнести к данной категории возраста.

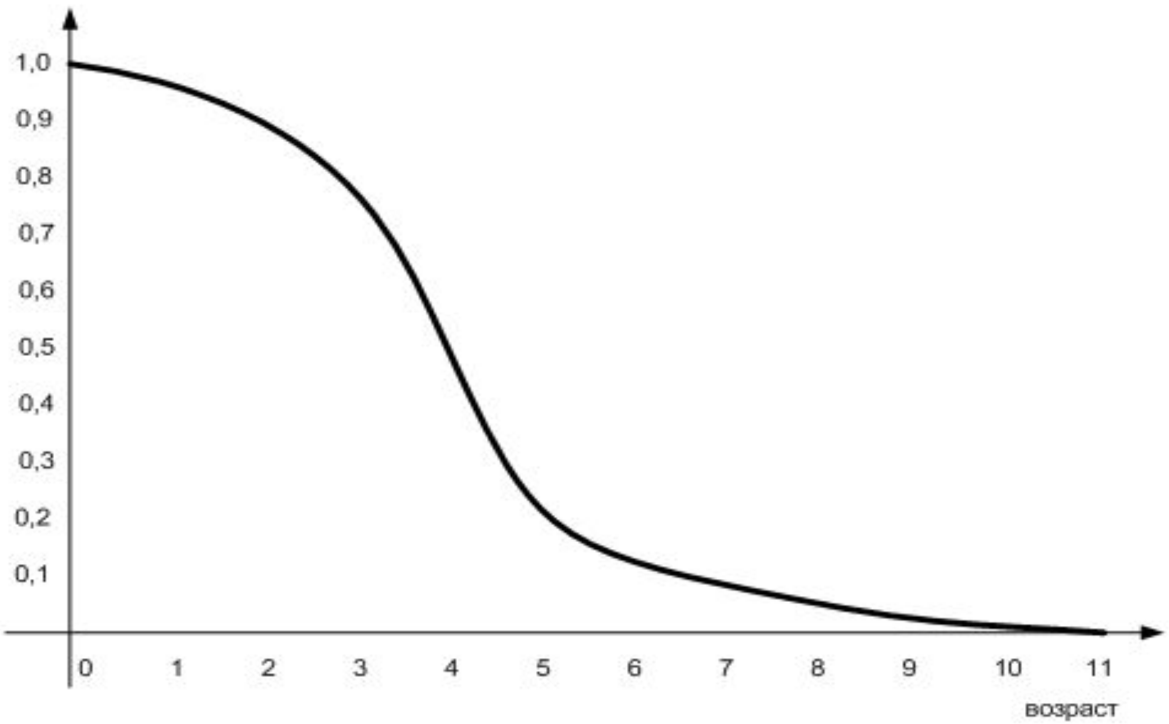


06:09

Продолжение

Например, определить значение НМ «младенческий» можно так:

$$\text{"младенческий"} = \left\{ \frac{0.5}{1} + \frac{1}{0.9} + \frac{2}{0.8} + \frac{3}{0.7} + \frac{4}{0.6} + \frac{5}{0.3} + \frac{11}{0.1} \right\}$$



Нечеткие логические операции

Аналоги операций конъюнкции и дизъюнкции в нечеткой логике не связаны с теорией вероятности и имеют следующие определения:

- $f_{F \wedge G}(X) = min(f_F(X), f_G(X))$,
- $f_{F \vee G}(X) = max(f_F(X), f_G(X))$.
- $\neg F(X) = 1 - F(X)$,

Усиление или ослабление лингвистических понятий

Усиление или ослабление лингвистических понятий достигается введением специальных квантификаторов. Например, если понятие «старческий возраст» определяется как

$$\left\{\frac{60}{0.6}+\frac{70}{0.8}+\frac{80}{0.9}+\frac{90}{1}\right\},$$

то понятие «очень старческий возраст» определится как

$$con(A)=A^2=\sum_i \frac{x_i}{\mu_i^2},$$

т. е. НМ для «очень старческий возраст» будет выглядеть так

$$\left\{\frac{60}{0.36}+\frac{70}{0.64}+\frac{80}{0.81}+\frac{90}{1}\right\}.$$

Теория возможности

Одним из направлений в нечеткой логике является теория возможности, рассматривающая точно поставленные вопросы на нечетко сформулированных знаниях. Примером такого вопроса является утверждение «Вероятно, что X связан с Y». Существование объектов X и Y не вызывает сомнений, а вот наличие между ними связи ставится под вопрос.

$f_{SEVERAL}$ = {(2, 0,1), (3, 0,2), (4, 0,6), (5, 1,0), (6, 1,0), (7, 0,6), (8, 0,3) , (9, 0,1)}.

Распределение возможностей можно вычислить по формуле:

$$f_{P(RED)} = \frac{f_{SEVERAL}}{10}.$$

Подставляя в данную формулу множество, определенное выше получается новое множество:

{(0,2, 0,1), (0,3, 0,2), (0,4, 0,6), (0,5, 1,0), (0,6, 1,0), (0,7, 0,6), (0,8, 0,3), (0,9, 0,1)}.

Таким образом, возможность того, что *P*(*RED*) = 0,3, составляет 20%. Множество *fP(RED)* также называют *нечеткой вероятностью*.