

Лекция 3

Кинетическая и магнитогидродинамическая
модели космической плазмы

$$f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$$

$$n_{\alpha}(\mathbf{r}, t) = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \quad - \text{плотность частиц}$$

$$\mathbf{V}_{\alpha}(\mathbf{r}, t) = \langle \mathbf{v} \rangle_{\alpha} = \frac{1}{n_{\alpha}} \int \mathbf{v} f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \quad - \text{средняя скорость}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{V}_{\alpha} \quad - \text{хаотическая скорость}$$

$$T_{\alpha}(\mathbf{r}, t) = \frac{m_{\alpha}}{3} \langle u^2 \rangle = \frac{1}{n_{\alpha}} \int \frac{m_{\alpha}}{3} (\mathbf{v} - \mathbf{V}_{\alpha})^2 f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \quad - \text{температура}$$

$$p_{\alpha}(\mathbf{r}, t) = \frac{n_{\alpha} m_{\alpha}}{3} \langle u^2 \rangle = \frac{m_{\alpha}}{3} \int (\mathbf{v} - \mathbf{V}_{\alpha})^2 f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}$$

-давление

Если столкновения в плазме отсутствуют

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \dot{x}_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \dot{p}_i \frac{\partial f}{\partial p_i} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}}{m} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0$$

При наличии столкновений $\frac{Df}{Dt} \neq 0$

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}^\alpha}{m_\alpha} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} = st_\alpha \qquad st_\alpha = \sum_\beta st_{\alpha\beta}$$

При упругих столкновениях

$$\int st_{\alpha\beta} d\mathbf{v} = 0 \qquad \int m_\alpha \mathbf{v} st_{\alpha\alpha} d\mathbf{v} = 0 \qquad \int \frac{m_\alpha v^2}{2} st_{\alpha\alpha} d\mathbf{v} = 0$$

$$\int m_\alpha \mathbf{v} st_{\alpha\beta} d\mathbf{v} + \int m_\alpha \mathbf{v} st_{\beta\alpha} d\mathbf{v} = 0$$

$$\int \frac{m_\alpha v^2}{2} st_{\alpha\beta} d\mathbf{v} + \int \frac{m_\alpha v^2}{2} st_{\beta\alpha} d\mathbf{v} = 0$$

Если на частицу плазмы не действуют силы неэлектрической природы

$$\mathbf{F}^\alpha = e_\alpha (\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}])$$

Масштаб усреднения $n^{-1/3} \ll l \ll r_D$

В состоянии термодинамического равновесия

$$f_\alpha = f_\alpha^0 = \frac{n_\alpha}{(2\pi T_\alpha / m_\alpha)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{m_\alpha (\mathbf{v} - \mathbf{V}_\alpha)^2}{2T_\alpha}\right\}$$

Если температуры электронов и ионов одного порядка, $\rightarrow \tau_{ii} \sim \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} \tau_{ee}$

При столкновении легкой частицы с тяжелой передается доля энергии порядка отношения их масс

$$\tau_{ee} : \tau_{ii} : \tau_{ei} \sim 1 : \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} : \left(\frac{m_i}{m_e}\right)$$

$$\tau_{ei} \sim \left(\frac{m_i}{m_e}\right) \tau_{ee}$$

τ - приближение для интеграла столкновений

$$St = - (f - f^0) / \tau$$

При рассмотрении токов в полностью ионизованной плазме $\tau \sim \tau_{ei}$

Интеграл столкновений в форме Ландау :

$$St_\alpha = - \frac{2\pi\Lambda e_\alpha^2 e_\beta^2}{m_\alpha} \frac{\partial}{\partial v_\xi} \int \left\{ \frac{f_\alpha(\mathbf{v})}{m_\beta} \frac{\partial f_\beta(\mathbf{v}')}{\partial v'_\gamma} - \frac{f_\beta(\mathbf{v}')}{m_\alpha} \frac{\partial f_\alpha(\mathbf{v})}{\partial v_\gamma} \right\} \frac{(\mathbf{v} - \mathbf{v}')^2 \delta_{\xi\gamma} - (v_\xi - v'_\xi)(v_\gamma - v'_\gamma)}{(\mathbf{v} - \mathbf{v}')^3} d\mathbf{v}'$$

$\Lambda = \ln(b_{\max} / b_{\min})$ - кулоновский логарифм

$b_{\min} \sim e^2 / \langle v^2 \rangle m \approx e^2 / 3T$ (отклонение частицы на угол порядка $\pi/2$)

$b_{\max} \cong r_D$ (при больших скоростях $b_{\max} \cong r_D e^2 / \mathbb{E} v$)

Влиянием магнитного поля на процесс рассеяния можно пренебречь, когда

$$\ln(\omega_B / \omega_p) < \Lambda$$

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}^\alpha}{m_\alpha} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} = st_\alpha$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho_e$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$$

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E} + \mathbf{E}_{ex}, \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B} + \mathbf{B}_{ex}$$

Если $\omega_0^{-1} < t < \tau$, то $\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vB}] \right) \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} \right) = 0$ (уравнение Власова)

Если $t < \omega_0^{-1}$, то следует учитывать многочастичные корреляции.

Если $t > \tau$ - магнитогидродинамическое описание плазмы.

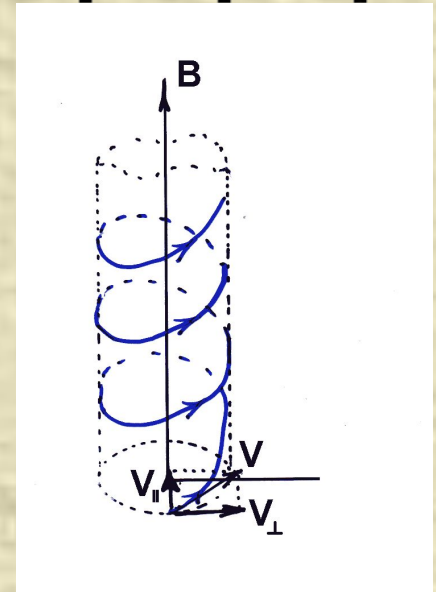
Дрейфовое кинетическое уравнение

$$\lambda = v_T \tau \gg r_L \quad \omega_B \tau \gg 1$$

(критерий замагниченности)



$f(\mathbf{r}, v_{\parallel}, \mu)$ - функции распределения центров ларморовских кружков в пятимерном фазовом пространстве



$$\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}_{\mathbf{r}}(\mathbf{u}_d f) + \frac{F_{\parallel}}{m} \frac{\partial f}{\partial v_{\parallel}} = St$$

$$\mathbf{F}_{\parallel} = (e\mathbf{E} - \mu \nabla B) \mathbf{h}$$

$$\mathbf{u}_d = \mathbf{V}_d + \mathbf{v}_{\parallel}$$

$$\mathbf{j}_d = en\mathbf{u}_d$$

$$\mathbf{j}_{diam} = \text{crot} n\mu = \text{crot} \int \mu f d\mathbf{v}$$

Уравнения переноса

$$(\mathbf{v})^0, (\mathbf{v})^1, (\mathbf{v})^2 \quad \times \quad \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \left(\frac{\mathbf{F}^\alpha}{m_\alpha} \right) \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} \right) = st_\alpha$$

Уравнение непрерывности

$$\int \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial t} \int f d\mathbf{v} = \frac{\partial n}{\partial t} \quad \int \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} d\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \int \mathbf{v} f d\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (n\mathbf{v})$$

$$\int \frac{\mathbf{F}}{m} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{v} = \frac{\mathbf{F}}{m} f \Big|_{\mathbf{v} \rightarrow \infty} - \frac{1}{m} \int f \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} (\mathbf{F}) d\mathbf{v} = 0 \quad \text{т.к.} \quad \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial F_i}{\partial v_i} = \frac{\partial}{\partial v_i} \left(eE_i + \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}]_i \right) = 0$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div} n\mathbf{V} = \int St d\mathbf{v}$$

$$\rho = mn$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\mathbf{V}) = 0$$

$$\rho_e = en$$

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \text{div} \mathbf{j} = 0$$

$$\mathbf{j} = en\mathbf{V}$$

Уравнение движения

$$\frac{\partial}{\partial t}(mnV_j) + \frac{\partial}{\partial x_i}(mn\langle v_i v_j \rangle) - n \left\langle \frac{\partial}{\partial v_i}(F_i v_j) \right\rangle = \int m v_j \text{Std}v.$$

$$\langle v_i v_j \rangle = \langle (u_i + V_i)(u_j + V_j) \rangle = \langle u_i u_j \rangle + V_i V_j,$$

$$\begin{aligned} mn \frac{\partial V_j}{\partial t} + m V_j \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(mn\langle u_i u_j \rangle) + m V_j \frac{\partial n V_i}{\partial x_i} + mn \frac{\partial V_j}{\partial x_i} V_i = \\ = mn \frac{\partial V_j}{\partial t} + mn V_i \frac{\partial V_j}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i}(mn\langle u_i u_j \rangle), \end{aligned}$$

$$-n \left\langle \frac{\partial}{\partial v_i}(F_i v_j) \right\rangle = -n \left\langle F_i \frac{\partial v_j}{\partial v_i} \right\rangle = -n \langle F_i \delta_{ij} \rangle = -n \langle F_j \rangle = -en \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{VB}] \right)_j$$

$$P_{ij} = mn \langle u_i u_j \rangle = p \delta_{ij} + \pi_{ij}; \quad R_j = \int m v_j \text{Std}v; \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla),$$

$$mnd\mathbf{V} / dt = mn \left[\partial \mathbf{V} / \partial t + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} \right] = -\nabla P + en \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{VB}] \right) + \mathbf{R}$$

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla \pi - \nabla p + en \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}\mathbf{B}] \right) + \mathbf{R},$$

При изотропии хаотических скоростей $\pi=0$.

В случае упругих столкновений, т.к. $\mathbf{R} = \int m\mathbf{v}S\tau d\mathbf{v}$, $\mathbf{R}_\alpha = \sum_\beta \mathbf{R}_{\alpha\beta}$

$$\mathbf{R}_{\alpha\alpha} = 0, \quad \mathbf{R}_{\alpha\beta} = -\mathbf{R}_{\beta\alpha}.$$

τ - приближение $\mathbf{R}_{\alpha\beta} = -n_\alpha m_\alpha (\mathbf{V}_\alpha - \mathbf{V}_\beta) / \tau_{\alpha\beta}.$

Уравнение переноса энергии

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{n}{2}(u^2 + 2u_i V_j + V^2) \quad \times \quad \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \left(\frac{\mathbf{F}^\alpha}{m_\alpha} \right) \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} \right) = st_\alpha$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{nm \langle u^2 \rangle}{2} + \frac{nmV^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(n \left\langle v_i \frac{mv^2}{2} \right\rangle \right) - \frac{n}{m} \left\langle F_i \frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{mv^2}{2} \right) \right\rangle = \int \frac{mv^2}{2} St d\mathbf{v}.$$

$$-n \langle \mathbf{Fv} \rangle = -en\mathbf{E}\mathbf{V} \quad Q + \mathbf{RV}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\frac{nmV^2}{2} - \frac{nm \langle u^2 \rangle}{2} \right) V_i + nm \langle u_i u_j \rangle V_j + n \left\langle u_i \frac{mu^2}{2} \right\rangle \right] = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\frac{nmV^2}{2} + \frac{3}{2} p \right) V_i + P_{ij} V_j + q_i \right]$$

$$\mathbf{q} = n \left\langle \mathbf{u} \frac{mu^2}{2} \right\rangle \quad - \text{ ПЛОТНОСТЬ ПОТОКА ТЕПЛА}$$

$$Q = \int \frac{mu^2}{2} St d\mathbf{v} \quad - \text{ ВЫДЕЛЕНИЕ ТЕПЛА ЗА СЧЕТ СТОЛКНОВЕНИЙ С ОСТАЛЬНЫМИ ЧАСТИЦАМИ}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{nmV^2}{2} + \frac{3}{2} p \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\frac{nmV^2}{2} + \frac{3}{2} p \right) V_j + P_{ij} V_j + q_i \right] = enE_i V_i + R_i V_i + Q$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{nmV^2}{2} + \frac{3}{2} p \right) + \nabla \left[\left(\frac{nmV^2}{2} + \frac{5}{2} p \right) \mathbf{V} + \pi \mathbf{V} + \mathbf{q} \right] = en \mathbf{E} \mathbf{V} + \mathbf{R} \mathbf{V} + Q.$$

В случае упругих соударений $Q_{\alpha\beta} + Q_{\beta\alpha} + \mathbf{R}_{\alpha\beta} \mathbf{V}_\alpha + \mathbf{R}_{\beta\alpha} \mathbf{V}_\beta = 0$

Уравнение баланса тепла

$$\frac{3}{2} \frac{\partial nT}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\frac{3}{2} nT \mathbf{V} \right) + nT \operatorname{div} \mathbf{V} + (\pi \nabla) \mathbf{V} + \operatorname{div} \mathbf{q} = 0$$

Уравнение для температуры

$$\frac{3}{2} n \left(\frac{dT}{dt} \right) = Q - nT \operatorname{div} \mathbf{V} - (\pi \nabla) \mathbf{V} - \operatorname{div} \mathbf{q}$$

Энтропия, приходящаяся на одну частицу

$$S = \ln\left(T^{3/2} / n\right) = \ln\left(p^{3/2} / n^{5/2}\right)$$

$$T \left\{ \frac{\partial n S}{\partial t} + \operatorname{div}(n S \mathbf{V}) \right\} = -\operatorname{div} \mathbf{q} - (\pi \nabla) \mathbf{V} + Q$$

Связь π_{ij} , \mathbf{q} , \mathbf{R} , Q с n , \mathbf{V} , T можно найти либо феноменологически, либо методами кинетики.

$$f_{\alpha}(t, f, \mathbf{V}) = f_{\alpha}^0 + f_{\alpha}^1 + \dots, \quad |f_{\alpha}^1| \ll f_{\alpha}^0$$

$$\left| \frac{\nabla n_{\alpha}}{n_{\alpha}} \right|, \left| \frac{\nabla V_{\alpha}}{V_{\alpha}} \right|, \left| \frac{\nabla T_{\alpha}}{T_{\alpha}} \right| \ll \frac{1}{l_{\alpha}}, \quad \left| \frac{1}{n_{\alpha}} \frac{\partial n_{\alpha}}{\partial t} \right|, \left| \frac{1}{V_{\alpha}} \frac{\partial V_{\alpha}}{\partial t} \right|, \left| \frac{1}{T_{\alpha}} \frac{\partial T_{\alpha}}{\partial t} \right| \ll \frac{1}{\tau_{\alpha}}$$

Решение линейного интегродифференциального уравнение в пространстве скоростей для f_{α}^1

$$\left[\mathbf{v} \boldsymbol{\omega}_{\alpha}^B \right] \frac{\partial f_{\alpha}^0}{\partial \mathbf{v}} = S t_{\alpha}$$

будет линейно зависеть от пространственных производных n_{α} , \mathbf{V}_{α} , T_{α}

Двухжидкостная магнитная гидродинамика

$$n_e, n_i, \mathbf{V}_e, \mathbf{V}_i, T_e, T_i, p_e, p_i, (p_e = n_e T_e, p_i = n_i T_i).$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla(n_e \mathbf{V}_e) = 0,$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla(n_i \mathbf{V}_i) = 0,$$

$$m_e n_e \left[\frac{\partial \mathbf{V}_e}{\partial t} + (\mathbf{V}_e \nabla) \mathbf{V}_e \right] = -\nabla \pi_e - \nabla p_e - e n_e (\mathbf{E} + [\mathbf{V}_e \mathbf{B}] / c) + \mathbf{R},$$

$$m_i n_i \left[\frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial t} + (\mathbf{V}_i \nabla) \mathbf{V}_i \right] = -\nabla \pi_i - \nabla p_i - e n_i (\mathbf{E} + [\mathbf{V}_i \mathbf{B}] / c) - \mathbf{R},$$

$$\frac{3}{2} n_e [\partial T_e / \partial t + (\mathbf{V}_e \nabla) T_e] = Q_e - p_e \operatorname{div} \mathbf{V}_e - (\pi_e \nabla) \mathbf{V}_e - \operatorname{div} \mathbf{q}_e,$$

$$\frac{3}{2} n_i [\partial T_i / \partial t + (\mathbf{V}_i \nabla) T_i] = Q_i - p_i \operatorname{div} \mathbf{V}_i - (\pi_i \nabla) \mathbf{V}_i - \operatorname{div} \mathbf{q}_i,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi e(n_i - n_e),$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} e(n_i \mathbf{V}_i - n_e \mathbf{V}_e),$$

где $\mathbf{R} = \int m_e \mathbf{v} St_{ei} d\mathbf{v},$

$$\pi_{ekl} = m_e n_e \langle u_k u_l \rangle_e - p_e \delta_{kl}, \quad \pi_{ikl} = m_i n_i \langle u_k u_l \rangle_i - p_i \delta_{kl},$$

$$\mathbf{q}_e = n_e \left\langle \mathbf{u} \frac{m_e u^2}{2} \right\rangle_e; \quad \mathbf{q}_i = n_i \left\langle \mathbf{u} \frac{m_i u^2}{2} \right\rangle_i$$

$$Q_e = \int \frac{m_e}{2} (\mathbf{v} - \mathbf{V}_e)^2 St_{ei} d\mathbf{v}_e, \quad Q_i = \int \frac{m_i}{2} (\mathbf{v} - \mathbf{V}_i)^2 St_{ie} d\mathbf{v}_i.$$

Током смещения можно пренебречь, если $B/L \gg E/ct$

или $B \gg VE/c$. $E/L \sim B/ct$ т.е. $\sim VB/c$.



Током смещения можно пренебречь, если

$$v^2 \ll c^2$$

Одножидкостная магнитная гидродинамика

плотность массы

$$\rho = \sum_{\alpha} m_{\alpha} n_{\alpha}$$

$$\partial \rho / \partial t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0$$

гидродинамическая скорость

$$\mathbf{V} = \frac{1}{\rho} \sum_{\alpha} m_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{V}_{\alpha}$$

$$\rho_q = \sum_{\alpha} e_{\alpha} n_{\alpha} \quad \mathbf{j} = \sum_{\alpha} e_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{V}_{\alpha}$$

$$\partial \rho_q / \partial t + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0$$

$$\rho_q = e(n_i - n_e) \quad \mathbf{j} = \rho_q \mathbf{V}_i - en_e(\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_e) \quad \rho_q = e(n_i - n_e) \ll en_e$$

$$n_i \approx n_e = n \quad \mathbf{j} = -en(\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_e)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

Не вошло $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho_e$

Уравнение движения в одножидкостном пределе

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_\alpha V_{\alpha k}) = -\frac{\partial \Pi_{\alpha kl}}{\partial x_l} + F_{\alpha k} \quad \Pi_{\alpha kl} = \rho_\alpha \langle v_k v_l \rangle = \pi_{\alpha kl} + \delta_{kl} P_\alpha + \rho_\alpha V_{\alpha k} + V_{\alpha l}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_k) = -\frac{\partial}{\partial x_l} [\Pi_{ekl} + \Pi_{ikl}] + F_{ek} + F_{ik}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_k) = \rho \frac{\partial V_k}{\partial t} - V_k \frac{\partial}{\partial x_l}(\rho V_l) = \rho \left(\frac{\partial V_k}{\partial t} + V_l \frac{\partial V_k}{\partial x_l} \right) - \frac{\partial}{\partial x_l}(\rho V_k V_l)$$

$$\rho \left(\frac{\partial V_k}{\partial t} + V_l \frac{\partial V_k}{\partial x_l} \right) = -\frac{\partial}{\partial x_l} [\Pi_{ekl} + \Pi_{ikl} - \rho V_k V_l] + F_{ek} + F_{il}$$

$$\Pi_{ekl} + \Pi_{ikl} - \rho V_k V_l = \pi_{ekl} + \pi_{ikl} + \delta_{kl} (p_e + p_i) + \rho_e V_{ek} V_{el} + \rho_i V_{ik} V_{il} -$$

$$-\frac{1}{\rho_e + \rho_i} (\rho_e V_{ek} + \rho_i V_{ik})(\rho_e V_{el} + \rho_i V_{il}) = \pi_{ekl} + \pi_{ikl} + \delta_{kl} (p_e + p_i) +$$

$$+ \frac{\rho_e \rho_i}{\rho} (V_{ik} - V_{ek})(V_{il} - V_{el}) = \pi_{kl} + \delta_{kl} (p_e + p_i)$$

$$\frac{\rho_e \rho_i}{\rho} (V_{ik} - V_{ek})(V_{il} - V_{el}) = \frac{m_e m_i}{m_e + m_i} \frac{1}{n_e^2} j_k j_l$$

$$\mathbf{F}_e + \mathbf{F}_i = e(n_i - n_e)\mathbf{E} + \frac{1}{c}[(en_i \mathbf{V}_i - en_e \mathbf{V}_e)\mathbf{B}] = \rho_q \mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{jB}]$$

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{c}[\mathbf{jB}] + \mathbf{F}$$

$p = p_e + p_i$ - полное давление

В \mathbf{F} входят вязкость, электрические силы (и могут входить другие силы не электрической природы)

Тензор максвелловских натяжений

$$T_{ij} = T_{ij}^B + T_{ij}^E = \frac{1}{4\pi} \left(B_i B_j + E_i E_j - \delta_{ij} \frac{E^2 + B^2}{2} \right)$$

$$\frac{1}{c} [\mathbf{jB}]_i + \rho_q E_i = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_{ij}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{c}{4\pi} [\mathbf{EB}]_i \right)$$

$$\frac{c}{4\pi} [\mathbf{EB}] \quad - \text{вектор Умова-Пойнтинга}$$

В приближении одножидкостной магнитной гидродинамики рассматриваются большие масштабы и малые скорости или низкие частоты процессов. Плазма в этих условиях почти квазинейтральна и изотропна. Поэтому можно пренебречь вязкостью и величинами $\sim V^2$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\nabla p + \frac{1}{c} [\mathbf{jB}]$$

Условия, при которых можно пользоваться

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\nabla p + \frac{1}{c} [\mathbf{j} \mathbf{B}]$$

(1) $\rho_q \ll en$ $enE \sim \nabla p$ $E \sim T / eL$ $\rho_q \sim E / 4\pi L$

$$\rho_q / en \sim r_D^2 / L^2$$

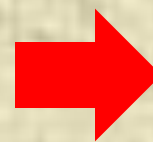
$$r_D^2 \ll L^2$$

(2) $E \sim VB/c$ $\omega \rho V \sim \frac{1}{c} jB$ $j \sim c\omega \rho V / B$ $\text{div} \mathbf{j} \sim c\omega \rho V / BL$

$$\partial \rho_e / \partial t \sim \omega \rho_e \sim \omega E / 4\pi L \ll \text{div} \mathbf{j}$$

$$V_A = \frac{B}{(4\pi\rho)^{1/2}}$$

если $\frac{\omega}{4\pi L} \frac{VB}{c} \frac{BL}{c\omega\rho V} = \frac{1}{c^2} \frac{B^2}{4\pi\rho} \ll 1$



$$V_A^2 \ll c^2$$

Уравнение переноса энергии

$$\sum_{\alpha} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_{\alpha} V_{\alpha}^2}{2} + \frac{3}{2} P_{\alpha} \right) + \nabla \left[\left(\frac{\rho_{\alpha} V_{\alpha}^2}{2} + \frac{5}{2} P_{\alpha} \right) \mathbf{V}_{\alpha} + \pi_{\alpha} \mathbf{V}_{\alpha} + \mathbf{q}_{\alpha} \right] \right\} = \sum_{\alpha} (e_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{E} \mathbf{V}_{\alpha} + \mathbf{R}_{\alpha} \mathbf{V}_{\alpha} + Q_{\alpha})$$

$$m_e \ll m_i \quad \rho \approx \rho_i \quad V \approx V_i \quad \rho_e V_e^2 / 2 + \rho_i V_i^2 / 2 \approx \rho_i V_i^2 / 2 \approx \rho V^2 / 2$$

$$\rho_e V_e^2 \mathbf{V}_e / 2 + \rho_i V_i^2 \mathbf{V}_i / 2 \approx \rho V^2 \mathbf{V} / 2$$

При, $T_e \sim T_i$ вязкость ионов всегда гораздо больше, чем электронов, поэтому вязкость плазмы целиком определяется ионами.

$$\pi_i \mathbf{V}_i + \pi_e \mathbf{V}_e \approx \pi_i \mathbf{V}_i \approx \pi \mathbf{V} \quad \sum \mathbf{R}_{\alpha} \mathbf{V}_{\alpha} + Q_{\alpha} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho V^2}{2} + \frac{3}{2} p \right) + \nabla \left[\mathbf{V} \frac{\rho V^2}{2} + \frac{5}{2} (p_e + p_i) \mathbf{V} + \frac{5}{2} p_e (\mathbf{V}_e - \mathbf{V}_i) + \mathbf{q}_e + \mathbf{q}_i + \pi \mathbf{V} \right] = \mathbf{jE}$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_e + \mathbf{q}_i - \frac{5}{2} \frac{p_e}{en} \mathbf{j}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho V^2}{2} + \frac{3}{2} p \right) + \nabla \left[\left(\frac{\rho V^2}{2} + \frac{5}{2} p \right) \mathbf{V} + \pi \mathbf{V} + \mathbf{q} \right] = \mathbf{jE}$$

Уравнение баланса тепла

$$\sum \left\{ \frac{3}{2} \frac{\partial p_\alpha}{\partial t} + \frac{3}{2} \nabla(p_\alpha \mathbf{V}_\alpha) + p_\alpha \nabla \mathbf{V}_\alpha + (\pi \nabla) \mathbf{V}_\alpha + \nabla \mathbf{q} + Q_\alpha \right\} = 0$$

$$\frac{3}{2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{3}{2} \nabla(p \mathbf{V}) - \frac{3}{2} \nabla \left(\frac{p_e}{ne} \mathbf{j} \right) + p \nabla \mathbf{V} - p_e \nabla \left(\frac{\mathbf{j}}{ne} \right) + (\pi \nabla) \mathbf{V} + \nabla(\mathbf{q}_e + \mathbf{q}_i) - Q_e - Q_i = 0$$

$$\frac{3}{2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{3}{2} \nabla(p \mathbf{V}) + p \nabla \mathbf{V} = -\nabla \mathbf{q} - \frac{\mathbf{j}}{en} \nabla p_e - (\pi \nabla) \mathbf{V} + Q_e + Q_i$$

$$Q_e + Q_i = \mathbf{R}(\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_e) = j^2 / (ne^2 \tau_{ei} / m_e) = j^2 / \sigma \quad \sigma = ne^2 \tau_{ei} / m_e$$

$$\frac{3}{2} \frac{dp}{dt} + \frac{5}{2} \mathbf{V} \nabla \mathbf{V} = -\nabla \mathbf{q} - \frac{\mathbf{j}}{en} \nabla p_e - (\pi \nabla) \mathbf{V} + \frac{j^2}{\sigma}$$

$$\nabla \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \nabla \right) \rho = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \quad \frac{3}{2} \frac{dp}{dt} - \frac{5}{2} \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{3}{2} p \frac{d}{dt} \left[\ln \frac{p}{\rho^{5/3}} \right]$$

$$\frac{3}{2} \frac{d}{dt} \left(\ln \frac{p}{\rho^{5/3}} \right) = -\nabla \mathbf{q} - (\pi \nabla) \mathbf{V} - \frac{\mathbf{j}}{en} \nabla p_e + \frac{j^2}{\sigma}$$

Закон сохранения полной энергии

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{B^2}{8\pi} + \nabla \cdot \left\{ \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{B}] \right\} = -\mathbf{E}\mathbf{j}$$

$$\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{q}^* = 0$$

$$\varepsilon^* = \frac{1}{2} \rho V^2 + \frac{3}{2} p + \frac{B^2}{8\pi} \quad \mathbf{q}^* = \left(\frac{1}{2} \rho V^2 + \frac{5}{2} p \right) \mathbf{V} + \pi \mathbf{V} + \mathbf{q} + \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{B}]$$

Если времена диссипативных процессов велики по сравнению с обратными величинами частот движений

$$p / \rho^{5/3} = \text{const}$$

Уравнение баланса энтропии при $T_i = T_e = T$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot \left\{ S\mathbf{V} - \frac{S_e \mathbf{j}}{en} + \frac{(q_e + q_i)}{T} \right\} = \theta$$

$$\theta = T^{-1} \{ -(\mathbf{q}_e + \mathbf{q}_i) \nabla \ln T + Q_e + Q_i \}$$

- рождение энтропии,

$$S = S_e + S_i = n_e \ln \left(\frac{T^{3/2}}{n_e} \right) + n_i \ln \left(\frac{T^{3/2}}{n_i} \right) - \text{энтропия единицы объема плазмы.}$$