Лекция 3

Кинетическая и магнитогидродинамическая модели космической плазмы

$$f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$$

$$n_\alpha(\mathbf{r},t)=\int f(\mathbf{r},\mathbf{v},t)d\mathbf{v}$$ - плотность частиц

$$\mathbf{V}_\alpha(\mathbf{r},t)=\langle\mathbf{v}\rangle_\alpha=\frac{1}{n_\alpha}\int \mathbf{v}f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t)d\mathbf{v}$$ - средняя скорость

$$\mathbf{u}=\mathbf{v}-\mathbf{V}_\alpha$$ - хаотическая скорость

$$T_\alpha(\mathbf{r},t)=\frac{m_\alpha}{3}\langle u^2\rangle=\frac{1}{n_\alpha}\int\frac{m_\alpha}{3}(\mathbf{v}-\mathbf{V}_\alpha)^2 f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t)d\mathbf{v}$$ - температура

$$p_\alpha(\mathbf{r},t)=\frac{n_\alpha m_\alpha}{3}\langle u^2\rangle=\frac{m_\alpha}{3}\int(\mathbf{v}-\mathbf{V}_\alpha)^2 f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t)d\mathbf{v}$$

-давление

Если столкновения в плазме отсутствуют

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \dot{x}_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \dot{p}_i \frac{\partial f}{\partial p_i} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}}{m}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0$$

При наличии столкновений $\frac{Df}{Dt} \neq 0$

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}^\alpha}{m_\alpha}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} = st_\alpha \qquad st_\alpha = \sum_\beta st_{\alpha\beta}$$

При упругих столкновениях

$$\int st_{\alpha\beta}\, d\mathbf{v} = 0 \qquad \int m_\alpha \mathbf{v}\, st_{\alpha\alpha}\, d\mathbf{v} = 0 \qquad \int \frac{m_\alpha v^2}{2} st_{\alpha\alpha}\, d\mathbf{v} = 0$$

$$\int m_\alpha \mathbf{v}\, st_{\alpha\beta}\, d\mathbf{v} + \int m_\alpha \mathbf{v}\, st_{\beta\alpha}\, d\mathbf{v} = 0$$

$$\int \frac{m_\alpha v^2}{2} st_{\alpha\beta}\, d\mathbf{v} + \int \frac{m_\alpha v^2}{2} st_{\beta\alpha}\, d\mathbf{v} = 0$$

Если на частицу плазмы не действуют силы неэлектрической природы

$$\mathbf{F}^{\alpha} = e_{\alpha}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vB}]\right)$$

Масштаб усреднения $n^{-1/3} << l << r_D$

В состоянии термодинамического равновесия

$$f_{\alpha} = f_{\alpha}^{0} = \frac{n_{\alpha}}{(2\pi T_{\alpha}/m_{\alpha})^{3/2}} \exp\left\{-\frac{m_{\alpha}(\mathbf{v}-\mathbf{V}_{\alpha})^{2}}{2T_{\alpha}}\right\}$$

Если температуры электронов и ионов одного порядка, $\Rightarrow \tau_{ii} \sim \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{\frac{1}{2}} \tau_{ee}$

При столкновении легкой частицы с тяжелой передается доля энергии порядка отношения их масс

$$\tau_{ei} \sim \left(\frac{m_i}{m_e}\right) \tau_{ee}$$

$$\boxed{\tau_{ee} : \tau_{ii} : \tau_{ei} \sim 1 : \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} : \left(\frac{m_i}{m_e}\right)}$$

τ - приближение для интеграла столкновений

$$\boxed{St = -\left(f - f^0\right)/\tau}$$

При рассмотрении токов в полностью ионизованной плазме $\tau \sim \tau_{ei}$

Интеграл столкновений в форме Ландау :

$$St_\alpha = -\frac{2\pi\Lambda e_\alpha^2 e_\beta^2}{m_\alpha}\frac{\partial}{\partial v_\xi}\int\left\{\frac{f_\alpha(\mathbf{v})}{m_\beta}\frac{\partial f_\beta(\mathbf{v}')}{\partial v'_\gamma} - \frac{f_\beta(\mathbf{v}')}{m_\alpha}\frac{\partial f_\alpha(\mathbf{v})}{\partial v_\gamma}\right\}\frac{(\mathbf{v}-\mathbf{v}')^2\delta_{\xi\gamma} - \left(v_\xi - v_\xi'\right)\left(v_\gamma - v_\gamma'\right)}{\left(\mathbf{v}-\mathbf{v}'\right)^3}d\mathbf{v}'$$

$\Lambda = \ln\left(b_{\max}/b_{\min}\right)$ - кулоновский логарифм

$b_{\min} \sim e^2/\left\langle v^2\right\rangle m \approx e^2/3T$ (отклонение частицы на угол порядка $\pi/2$)

$b_{\max} \cong r_D$ (при больших скоростях $b_{\max} \cong r_D e^2/\hbar v$)

Влиянием магнитного поля на процесс рассеяния можно пренебречь, когда

$$\ln\left(\omega_B/\omega_p\right) < \Lambda$$

$$\boxed{\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}^\alpha}{m_\alpha}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} = st_\alpha}$$

$$\boxed{div\mathbf{E} = 4\pi\rho_e}$$

$$\boxed{rot\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}}$$

$$\boxed{div\mathbf{B} = 0}$$

$$\boxed{rot\mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}}$$

$$\mathbf{E} \to \mathbf{E} + \mathbf{E}_{ex}, \mathbf{B} \to \mathbf{B} + \mathbf{B}_{ex}$$

Если $\omega_0^{-1} < t < \tau$, то $\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vB}]\right)\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}}\right) = 0$ (уравнение Власова)

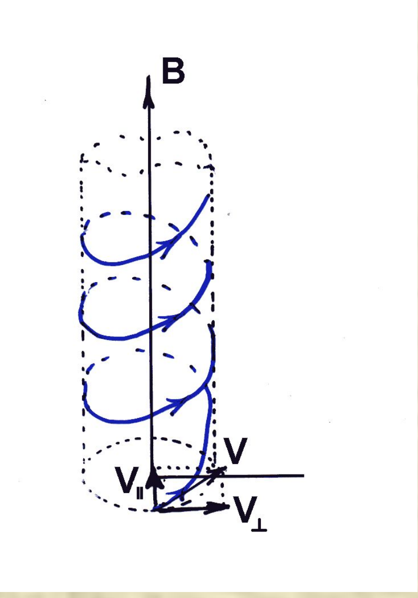
Если $t < \omega_0^{-1}$, то следует учитывать многочастичные корреляции.

Если $t > \tau$ - магнитогидродинамическое описание плазмы.

Дрейфовое кинетическое уравнение

$$\lambda = v_T \tau >> r_L \qquad \omega_B \tau >> 1$$

(критерий замагниченности)



$f(\mathbf{r}, v_{II}, \mu)$ - функции распределения центров ларморовских кружков в пятимерном фазовом пространстве

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathrm{div}_{\mathbf{r}}(\mathbf{u}_d f) + \frac{F_{II}}{m}\frac{\partial f}{\partial v_{II}} = St$$

$$\mathbf{F}_{II} = (e\mathbf{E} - \mu\nabla B)\mathbf{h} \qquad \mathbf{u}_d = \mathbf{V}_d + \mathbf{v}_{II}$$

$$\mathbf{j}_d = en\mathbf{u}_d \qquad \mathbf{j}_{diam} = \mathrm{crot}\, n\boldsymbol{\mu} = \mathrm{crot}\int \boldsymbol{\mu} f d\mathbf{v}$$

Уравнения переноса

$$(\mathbf{v})^0,\ (\mathbf{v})^1,\ (\mathbf{v})^2 \qquad \times \qquad \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \left(\frac{\mathbf{F}^\alpha}{m_\alpha}\right)\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}}\right) = st_\alpha$$

Уравнение непрерывности

$$\int \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial t}\int f d\mathbf{v} = \frac{\partial n}{\partial t} \qquad \int \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} d\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\int \mathbf{v} f d\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}(n\mathbf{v})$$

$$\int \frac{\mathbf{F}}{m}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{v} = \frac{\mathbf{F}}{m} f\Big|_{\mathbf{v}\to\infty} - \frac{1}{m}\int f \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{F}) d\mathbf{v} = 0 \quad \text{т.к}\ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial F_i}{\partial v_i} = \frac{\partial}{\partial v_i}\left(eE_i + \frac{e}{c}[\mathbf{vB}]_i\right) = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial \mathrm{n}}{\partial \mathrm{t}} + \mathrm{div} n\mathbf{V} = \int St d\mathbf{v}}$$

$\rho = mn$ $\qquad \boxed{\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\mathbf{V}) = 0}$ $\qquad \rho_e = en$ $\qquad \boxed{\dfrac{\partial \rho_e}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{j} = 0}$ $\qquad \mathbf{j} = en\mathbf{V}$

Уравнение движения

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(mnV_j\right)+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(mn\left\langle v_i v_j\right\rangle\right)-n\left\langle\frac{\partial}{\partial v_i}\left(F_i v_j\right)\right\rangle=\int mv_j St d\mathbf{v}.$$

$$\left\langle v_i v_j\right\rangle=\left\langle\left(u_i+V_i\right)\left(u_j+V_j\right)\right\rangle=\left\langle u_i u_j\right\rangle+V_i V_j,$$

$$mn\frac{\partial V_j}{\partial t}+mV_j\frac{\partial n}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(mn\left\langle u_i u_j\right\rangle\right)+mV_j\frac{\partial nV_i}{\partial x_i}+mn\frac{\partial V_j}{\partial x_i}V_i=$$

$$=mn\frac{\partial V_j}{\partial t}+mnV_i\frac{\partial V_j}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(mn\left\langle u_i u_j\right\rangle\right),$$

$$-n\left\langle\frac{\partial}{\partial v_i}\left(F_i v_j\right)\right\rangle=-n\left\langle F_i\frac{\partial v_j}{\partial v_i}\right\rangle=-n\left\langle F_i\delta_{ij}\right\rangle=-n\left\langle F_j\right\rangle=-en\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{VB}]\right)_j$$

$$P_{ij}=mn\left\langle u_i u_j\right\rangle=p\delta_{ij}+\pi_{ij};\quad R_j=\int mv_j St d\mathbf{v};\qquad \frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+V_i\frac{\partial}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial t}+(\mathbf{V}\nabla),$$

$$\boxed{mnd\mathbf{V}/dt=mn\left[\partial\mathbf{V}/\partial t+(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V}\right]=-\nabla P+en\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{VB}]\right)+\mathbf{R}}$$

$$\boxed{\rho\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla\pi - \nabla p + en\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{V}\mathbf{B}]\right) + \mathbf{R},}$$

При изотропии хаотических скоростей π=0.

В случае упругих столкновений, т.к. $\mathbf{R} = \int m\mathbf{v}St d\mathbf{v},\qquad \mathbf{R}_\alpha = \sum_\beta \mathbf{R}_{\alpha\beta}$

$$\mathbf{R}_{\alpha\alpha} = 0,\qquad \mathbf{R}_{\alpha\beta} = -\mathbf{R}_{\beta\alpha}.$$

τ - приближение $\quad \mathbf{R}_{\alpha\beta} = -n_\alpha m_\alpha \left(\mathbf{V}_\alpha - \mathbf{V}_\beta\right)/\tau_{\alpha\beta}.$

Уравнение переноса энергии

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{n}{2}\left(u^2 + 2u_iV_j + V^2\right) \times \quad \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \left(\frac{\mathbf{F}^\alpha}{m_\alpha}\right)\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}}\right) = st_\alpha$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{nm\langle u^2\rangle}{2} + \frac{nmV^2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(n\left\langle v_i\frac{mv^2}{2}\right\rangle\right) - \frac{n}{m}\left\langle F_i\frac{\partial}{\partial v_i}\left(\frac{mv^2}{2}\right)\right\rangle = \int\frac{mv^2}{2}St d\mathbf{v}.$$

$$-n\langle \mathbf{F}\mathbf{v}\rangle = -en\mathbf{E}\mathbf{V} \qquad Q + \mathbf{R}\mathbf{V}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\frac{nmV^2}{2} - \frac{nm\langle u^2\rangle}{2}\right)V_i + nm\langle u_iu_j\rangle V_j + n\left\langle u_i\frac{mu^2}{2}\right\rangle\right] = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\frac{nmV^2}{2} + \frac{3}{2}p\right)V_i + P_{ij}V_j + q_i\right]$$

$$\mathbf{q} = n\left\langle \mathbf{u}\frac{mu^2}{2}\right\rangle$$ - плотность потока тепла

$$Q = \int\frac{mu^2}{2}St d\mathbf{v}$$ - выделение тепла за счет столкновений с остальными частицами

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{nmV^2}{2}+\frac{3}{2}p\right)+\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\frac{nmV^2}{2}+\frac{3}{2}p\right)V_j+P_{ij}V_j+q_i\right]=enE_iV_i+R_iV_i+Q$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{nmV^2}{2}+\frac{3}{2}p\right)+\nabla\left[\left(\frac{nmV^2}{2}+\frac{5}{2}p\right)\mathbf{V}+\pi\mathbf{V}+\mathbf{q}\right]=en\mathbf{E}\mathbf{V}+\mathbf{R}\mathbf{V}+Q.}$$

В случае упругих соударений $Q_{\alpha\beta}+Q_{\beta\alpha}+\mathbf{R}_{\alpha\beta}\mathbf{V}_\alpha+\mathbf{R}_{\beta\alpha}\mathbf{V}_\beta=0$

Уравнение баланса тепла

$$\boxed{\frac{3}{2}\frac{\partial nT}{\partial t}+\mathrm{div}\left(\frac{3}{2}nT\mathbf{V}\right)+nT\,\mathrm{div}\mathbf{V}+(\pi\nabla)\mathbf{V}+\mathrm{div}\mathbf{q}=0}$$

Уравнение для температуры

$$\boxed{\frac{3}{2}n\left(\frac{dT}{dt}\right)=Q-nT\,\mathrm{div}\mathbf{V}-(\pi\nabla)\mathbf{V}-\mathrm{div}\mathbf{q}}$$

Энтропия, приходящаяся на одну частицу

$$S = \ln\left(T^{3/2} / n\right) = \ln\left(p^{3/2} / n^{5/2}\right)$$

$$\boxed{T\left\{\frac{\partial nS}{\partial t} + \mathrm{div}\left(nS\mathbf{V}\right)\right\} = -\mathrm{div}\mathbf{q} - \left(\pi\nabla\right)\mathbf{V} + Q}$$

Связь π_{ij}, $\mathbf{q}$, $\mathbf{R}$, Q с n, $\mathbf{V}$, T можно найти либо феноменологически, либо методами кинетики.

$$f_\alpha\left(t, f, \mathbf{V}\right) = f_\alpha^0 + f_\alpha^1 + \dots \ , \qquad \left|f_\alpha^1\right| << f_\alpha^0$$

$$\left|\frac{\nabla n_\alpha}{n_\alpha}\right|, \left|\frac{\nabla V_\alpha}{V_\alpha}\right|, \left|\frac{\nabla T_\alpha}{T_\alpha}\right| << \frac{1}{l_\alpha}, \qquad \left|\frac{1}{n_\alpha}\frac{\partial n_\alpha}{\partial t}\right|, \left|\frac{1}{V_\alpha}\frac{\partial V_\alpha}{\partial t}\right|, \left|\frac{1}{T_\alpha}\frac{\partial T_\alpha}{\partial t}\right| << \frac{1}{\tau_\alpha}$$

$$\left[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}_B^\alpha\right]\frac{\partial f_\alpha^0}{\partial \mathbf{v}} = St_\alpha$$

Решение линейного интегродифференциального уравнение в пространстве скоростей для f_α^1 будет линейно зависеть от пространственных производных $n_\alpha, \mathbf{V}_\alpha, T_\alpha$

Двухжидкостная магнитная гидродинамика

$$n_e, n_i, \mathbf{V}_e, \mathbf{V}_i, T_e, T_i, p_e, p_i, (p_e = n_e T_e, p_i = n_i T_i).$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla(n_e \mathbf{V}_e) = 0, \qquad \frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla(n_i \mathbf{V}_i) = 0,$$

$$m_e n_e \left[\frac{\partial \mathbf{V}_e}{\partial t} + (\mathbf{V}_e \nabla)\mathbf{V}_e \right] = -\nabla \pi_e - \nabla p_e - e n_e \left(\mathbf{E} + [\mathbf{V}_e \mathbf{B}]/c \right) + \mathbf{R},$$

$$m_i n_i \left[\frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial t} + (\mathbf{V}_i \nabla)\mathbf{V}_i \right] = -\nabla \pi_i - \nabla p_i - e n_i \left(\mathbf{E} + [\mathbf{V}_i \mathbf{B}]/c \right) - \mathbf{R},$$

$$\frac{3}{2} \mathrm{n_e} \left[\partial T_e / \partial t + (\mathbf{V}_e \nabla) T_e \right] = Q_e - p_e \mathrm{div} \mathbf{V}_e - (\pi_e \nabla) \mathbf{V}_e - \mathrm{div} \mathbf{q}_e,$$

$$\frac{3}{2} \mathrm{n_i} \left[\partial T_i / \partial t + (\mathbf{V}_i \nabla) T_i \right] = Q_i - p_i \mathrm{div} \mathbf{V}_i - (\pi_i \nabla) \mathbf{V}_i - \mathrm{div} \mathbf{q}_i,$$

$$\mathrm{div}\mathbf{E} = 4\pi e(n_i - n_e), \qquad \mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0, \qquad \mathrm{rot}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} e(n_i \mathbf{V}_i - n_e \mathbf{V}_e),$$

где $\mathbf{R} = \int m_e \mathbf{v} St_{ei} d\mathbf{v},$

$$\pi_{ekl} = m_e n_e \langle u_k u_l \rangle_e - p_e \delta_{kl}, \qquad \pi_{ikl} = m_i n_i \langle u_k u_l \rangle_i - p_i \delta_{kl},$$

$$\mathbf{q}_e = n_e \left\langle \mathbf{u} \frac{m_e u^2}{2} \right\rangle_e; \qquad \mathbf{q}_i = n_i \left\langle \mathbf{u} \frac{m_i u^2}{2} \right\rangle_i$$

$$Q_e = \int \frac{m_e}{2} (\mathbf{v} - \mathbf{V}_e)^2 St_{ei} d\mathbf{v}_e, \qquad Q_i = \int \frac{m_i}{2} (\mathbf{v} - \mathbf{V}_i)^2 St_{ie} d\mathbf{v}_i.$$

Током смещения можно пренебречь, если $B/L \gg E/ct$

или $B \gg VE/c$. $E/L \sim B/ct$ т.е. $\sim VB/c$.

Током смещения можно пренебречь, если $\boxed{v^2 \ll c^2}$

Одножидкостная магнитная гидродинамика

плотность массы

$$\rho = \sum_\alpha m_\alpha n_\alpha$$

гидродинамическая скорость

$$\mathbf{V} = \frac{1}{\rho}\sum_\alpha m_\alpha n_\alpha \mathbf{V}_\alpha$$

$$\boxed{\partial\rho / \partial t + \mathrm{div}\left(\rho\mathbf{V}\right) = 0}$$

$$\rho_q = \sum_\alpha e_\alpha n_\alpha \qquad \mathbf{j} = \sum_\alpha e_\alpha n_\alpha \mathbf{V}_\alpha$$

$$\boxed{\partial\rho_q / \partial t + \mathrm{div}\mathbf{j} = 0}$$

$$\rho_q = e(n_i - n_e) \qquad \mathbf{j} = \rho_q \mathbf{V}_i - en_e\left(\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_e\right) \qquad \rho_q = e(n_i - n_e) << en_e$$

$$n_i \approx n_e = n \qquad \mathbf{j} = -en(\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_e)$$

$$\boxed{\mathrm{div}\mathbf{j} = 0} \qquad \boxed{\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}} \qquad \boxed{\mathrm{rot}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}} \qquad \boxed{\mathrm{div}\mathbf{B} = 0}$$

Не вошло $\mathrm{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho_e$

Уравнение движения в одножидкостном пределе

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_\alpha V_{\alpha k}\right) = -\frac{\partial \Pi_{\alpha kl}}{\partial x_l} + F_{\alpha k} \qquad \Pi_{\alpha kl} = \rho_\alpha \left\langle v_k v_l \right\rangle = \pi_{\alpha kl} + \delta_{kl} P_\alpha + \rho_\alpha V_{\alpha k} + V_{\alpha l}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho V_k\right) = -\frac{\partial}{\partial x_l}\left[\Pi_{ekl} + \Pi_{ikl}\right] + F_{ek} + F_{ik}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho V_k\right) = \rho \frac{\partial V_k}{\partial t} - V_k \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\rho V_l\right) = \rho\left(\frac{\partial V_k}{\partial t} + V_l \frac{\partial V_k}{\partial x_l}\right) - \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\rho V_k V_l\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial V_k}{\partial t} + V_l \frac{\partial V_k}{\partial x_l}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_l}\left[\Pi_{ekl} + \Pi_{ikl} - \rho V_k V_l\right] + F_{ek} + F_{il}$$

$$\Pi_{ekl} + \Pi_{ikl} - \rho V_k V_l = \pi_{ekl} + \pi_{ikl} + \delta_{kl}\left(p_e + p_i\right) + \rho_e V_{ek} V_{el} + \rho_i V_{ik} V_{il} -$$

$$-\frac{1}{\rho_e + \rho_i}\left(\rho_e V_{ek} + \rho_i V_{ik}\right)\left(\rho_e V_{el} + \rho_i V_{il}\right) = \pi_{ekl} + \pi_{ikl} + \delta_{kl}\left(p_e + p_i\right) +$$

$$+\frac{\rho_e \rho_i}{\rho}\left(V_{ik} - V_{ek}\right)\left(V_{il} - V_{el}\right) = \pi_{kl} + \delta_{kl}\left(p_e + p_i\right)$$

$$\frac{\rho_e \rho_i}{\rho}\left(V_{ik} - V_{ek}\right)\left(V_{il} - V_{el}\right) = \frac{m_e m_i}{m_e + m_i}\frac{1}{n_e^2} j_k j_l$$

$$\mathbf{F}_e + \mathbf{F}_i = e\left(n_i - n_e\right)\mathbf{E} + \frac{1}{c}\left[\left(en_i\mathbf{V}_i - en_e\mathbf{V}_e\right)\mathbf{B}\right] = \rho_q\mathbf{E} + \frac{1}{c}\left[\mathbf{jB}\right]$$

$$\boxed{\rho\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{c}\left[\mathbf{jB}\right] + \mathbf{F}}$$

$p = p_e + p_i$ - полное давление

В **F** входят вязкость, электрические силы (и могут входить другие силы не электрической природы)

Тензор максвелловских натяжений

$$T_{ij} = T_{ij}^{B} + T_{ij}^{E} = \frac{1}{4\pi}\left(B_i B_j + E_i E_j - \delta_{ij}\frac{E^2 + B^2}{2}\right)$$

$$\frac{1}{c}[\mathbf{jB}]_i + \rho_q E_i = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_{ij}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{c}{4\pi}[\mathbf{EB}]_i\right)$$

$\dfrac{c}{4\pi}[\mathbf{EB}]$ - вектор Умова-Пойнтинга

В приближении одножидкостной магнитной гидродинамики рассматриваются большие масштабы и малые скорости или низкие частоты процессов. Плазма в этих условиях почти квазинейтральна и изотропна. Поэтому можно пренебречь вязкостью и величинами $\sim V^2$

$$\boxed{\rho\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\nabla p + \frac{1}{c}[\mathbf{jB}]}$$

Условия, при которых можно пользоваться $\rho \dfrac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\nabla p + \dfrac{1}{c}[\mathbf{jB}]$

(1) $\rho_q << en$ $\quad enE \sim \nabla p$ $\quad E \sim T / eL$ $\quad \rho_q \sim E / 4\pi L$

$\rho_q / en \sim r_D^2 / L^2$

$$\boxed{r_D^2 << L^2}$$

(2) $E \sim VB/c$ $\quad \omega\rho V \sim \dfrac{1}{c} jB$ $\quad j \sim c\omega\rho V / B$ $\quad \mathrm{div}\mathbf{j} \sim c\omega\rho V / BL$

$\partial\rho_e / \partial t \sim \omega\rho_e \sim \omega E / 4\pi L << \mathrm{div}\mathbf{j}$

$$\boxed{V_A = \frac{B}{(4\pi\rho)^{1/2}}}$$

если $\dfrac{\omega}{4\pi L}\dfrac{VB}{c}\dfrac{BL}{c\omega\rho V} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{B^2}{4\pi\rho} << 1 \Rightarrow V_A^2 << c^2$

Уравнение переноса энергии

$$\sum_\alpha \left\{ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho_\alpha V_\alpha^2}{2} + \frac{3}{2}P_\alpha \right) + \nabla \left[\left(\frac{\rho_\alpha V_\alpha^2}{2} + \frac{5}{2}P_\alpha \right)\mathbf{V}_\alpha + \pi_\alpha \mathbf{V}_\alpha + \mathbf{q}_\alpha \right] \right\} = \sum_\alpha \left(e_\alpha n_\alpha \mathbf{E}\mathbf{V}_\alpha + \mathbf{R}_\alpha \mathbf{V}_\alpha + Q_\alpha \right)$$

$$m_e << m_i \qquad \rho \approx \rho_i \qquad V \approx V_i \qquad \rho_e V_e^2/2 + \rho_i V_i^2/2 \approx \rho_i V_i^2/2 \approx \rho V^2/2$$

$$\rho_e V_e^2 \mathbf{V}_e/2 + \rho_i V_i^2 \mathbf{V}_i/2 \approx \rho V^2 \mathbf{V}/2$$

При, $T_e \sim T_i$ вязкость ионов всегда гораздо больше, чем электронов, поэтому вязкость плазмы целиком определяется ионами.

$$\pi_i \mathbf{V}_i + \pi_e \mathbf{V}_e \approx \pi_i \mathbf{V}_i \approx \pi \mathbf{V} \qquad \sum \mathbf{R}_\alpha \mathbf{V}_\alpha + Q_\alpha = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho V^2}{2} + \frac{3}{2}p \right) + \nabla \left[\mathbf{V}\frac{\rho V^2}{2} + \frac{5}{2}(p_e + p_i)\mathbf{V} + \frac{5}{2}p_e(\mathbf{V}_e - \mathbf{V}_i) + \mathbf{q}_e + \mathbf{q}_i + \pi \mathbf{V} \right] = \mathbf{jE}$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_e + \mathbf{q}_i - \frac{5}{2}\frac{p_e}{en}\mathbf{j}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho V^2}{2} + \frac{3}{2}p \right) + \nabla \left[\left(\frac{\rho V^2}{2} + \frac{5}{2}p \right)\mathbf{V} + \pi \mathbf{V} + \mathbf{q} \right] = \mathbf{jE}}$$

Уравнение баланса тепла

$$\sum\left\{\frac{3}{2}\frac{\partial p_\alpha}{\partial t}+\frac{3}{2}\nabla\left(p_\alpha\mathbf{V}_\alpha\right)+p_\alpha\nabla\mathbf{V}_\alpha+\left(\pi\nabla\right)\mathbf{V}_\alpha+\nabla\mathbf{q}+Q_\alpha\right\}=0$$

$$\frac{3}{2}\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{3}{2}\nabla\left(p\mathbf{V}\right)-\frac{3}{2}\nabla\left(\frac{p_e}{ne}\mathbf{j}\right)+p\nabla\mathbf{V}-p_e\nabla\left(\frac{\mathbf{j}}{ne}\right)+\left(\pi\nabla\right)\mathbf{V}+\nabla\left(\mathbf{q}_e+\mathbf{q}_i\right)-Q_e-Q_i=0$$

$$\frac{3}{2}\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{3}{2}\nabla\left(p\mathbf{V}\right)+p\nabla\mathbf{V}=-\nabla\mathbf{q}-\frac{\mathbf{j}}{en}\nabla p_e-\left(\pi\nabla\right)\mathbf{V}+Q_e+Q_i$$

$$Q_e+Q_i=\mathbf{R}\left(\mathbf{V}_i-\mathbf{V}_e\right)=j^2/\left(ne^2\tau_{ei}/m_e\right)=j^2/\sigma$$

$$\boxed{\sigma=ne^2\tau_{ei}/m_e}$$

$$\boxed{\frac{3}{2}\frac{dp}{dt}+\frac{5}{2}\mathbf{V}\nabla\mathbf{V}=-\nabla\mathbf{q}-\frac{\mathbf{j}}{en}\nabla p_e-\left(\pi\nabla\right)\mathbf{V}+\frac{j^2}{\sigma}}$$

$$\nabla\mathbf{V}=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{V}\nabla\right)\rho=-\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$$

$$\frac{3}{2}\frac{dp}{dt}-\frac{5}{2}\frac{p}{\rho}\frac{dp}{dt}=\frac{3}{2}p\frac{d}{dt}\left[\ln\frac{p}{\rho^{5/3}}\right]$$

$$\boxed{\frac{3}{2}\frac{d}{dt}\left(\ln\frac{p}{\rho^{5/3}}\right)=-\nabla\mathbf{q}-\left(\pi\nabla\right)\mathbf{V}-\frac{\mathbf{j}}{en}\nabla p_e+\frac{j^2}{\sigma}}$$

Закон сохранения полной энергии

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{B^2}{8\pi} + \nabla\left\{\frac{c}{4\pi}[\mathbf{EB}]\right\} = -\mathbf{Ej}$$

$$\boxed{\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{q}^* = 0}$$

$$\varepsilon^* = \frac{1}{2}\rho V^2 + \frac{3}{2}p + \frac{B^2}{8\pi} \qquad \mathbf{q}^* = \left(\frac{1}{2}\rho V^2 + \frac{5}{2}p\right)\mathbf{V} + \pi\mathbf{V} + \mathbf{q} + \frac{c}{4\pi}[\mathbf{EB}]$$

Если времена диссипативных процессов велики по сравнения с обратными величинами частот движений

$$\boxed{p/\rho^{5/3} = const}$$

Уравнение баланса энтропии при $T_i = T_e = T$

$$\boxed{\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla\left\{S\mathbf{V} - \frac{S_e \mathbf{j}}{en} + \frac{(q_e + q_i)}{T}\right\} = \theta}$$

$$\theta = T^{-1}\left\{-(\mathbf{q}_e + \mathbf{q}_i)\nabla \ln T + Q_e + Q_i\right\}$$

- рождение энтропии,

$$S = S_e + S_i = n_e \ln\left(\frac{T^{3/2}}{n_e}\right) + n_i \ln\left(\frac{T^{3/2}}{n_i}\right)$$

- энтропия единицы объема плазмы.