Теорема Пифагора

И способы ее доказательства

Магнитогорск 2011

Теорема Пифагора и способы ее доказательства

Содержание:

- ✔*Исторический обзор*
- ✔*Алгебраический метод доказательства теоремы Пифагора*
  - ✔*Доказательство теоремы Пифагора по Евклиду*
  - ✔*Доказательство теоремы Пифагора по Басхари*
  - ✔*Доказательство теоремы Пифагора по площади*
  - ✔*Доказательство теоремы Пифагора по косинусу*
  - ✔*Доказательство теоремы по методам Гофмана и Мёльманна*
  - ✔*Наиболее привычный способ доказательства теоремы Пифагора*
- ✔*Карикатуры*

Теорема Пифагора и способы ее доказательства

Исторический обзор

Исторический обзор начнем с древнего Китая. Здесь особое внимание привлекает математическая книга Чу-пей. В этом сочинении так говорится о пифагоровом треугольнике со сторонами 3, 4 и 5: "Если прямой угол разложить на составные части, то линия, соединяющая концы его сторон, будет 5, когда основание есть 3, а высота 4". В этой же книге предложен рисунок, который совпадает с одним из чертежей индусской геометрии Басхары.

Кантор (крупнейший немецкий историк математики) считает, что равенство $3^2 + 4^2 = 5^2$ было известно уже египтянам еще около 2300 г. до н. э., во времена царя Аменемхета I (согласно папирусу 6619 Берлинского музея). По мнению Кантора гарпедонапты, или "натягиватели веревок", строили прямые углы при помощи прямоугольных треугольников со сторонами 3, 4 и 5. Очень легко можно воспроизвести их способ построения. Возьмем веревку длиною в 12 м. и привяжем к ней по цветной полоске на расстоянии 3м. от одного конца и 4 метра от другого . Прямой угол окажется заключенным между сторонами длиной в 3 и 4 метра. Гарпедонаптам можно было бы возразить, что их способ построения становиться излишним, если воспользоваться, например, деревянным угольником, применяемым всеми плотниками. И действительно, известны египетские рисунки, на которых встречается такой инструмент, например рисунки, изображающие столярную мастерскую.

Теорема Пифагора и способы ее доказательства

Несколько больше известно о теореме Пифагора у вавилонян. В одном тексте, относимом ко времени Хаммураби, т. е. к 2000 г. до н. э., приводится приближенное вычисление гипотенузы прямоугольного треугольника. Отсюда можно сделать вывод, что в Двуречье умели производить вычисления с прямоугольными треугольниками, по крайней мере в некоторых случаях. Основываясь, с одной стороны, на сегодняшнем уровне знаний о египетской и вавилонской математике, а с другой-на критическом изучении греческих источников, Ван-дер-Варден (голландский математик) сделал следующий вывод: "Заслугой первых греческих математиков, таких как Фалес, Пифагор и пифагорейцы, является не открытие математики, но ее систематизация и обоснование. В их руках вычислительные рецепты, основанные на смутных представлениях, превратились в точную науку."

Геометрия у индусов, как и у египтян и вавилонян, была тесно связана с культом. Весьма вероятно, что теорема о квадрате гипотенузы была известна в Индии уже около 18 века до н. э.

В первом русском переводе евклидовых "Начал", сделанном Ф. И. Петрушевским, теорема Пифагора изложена так: "В прямоугольных треугольниках квадрат из стороны, противолежащей прямому углу, равен сумме квадратов из сторон, содержащих прямой угол".

Теорема Пифагора и способы ее доказательства

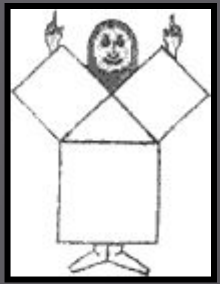
В настоящее время известно, что эта теорема не была открыта Пифагором. Однако одни полагают, что Пифагор первым дал ее полноценное доказательство, а другие отказывают ему и в этой заслуге. Некоторые приписывают Пифагору доказательство, которое Евклид приводит в первой книге своих "Начал". С другой стороны, Прокл утверждает, что доказательство в "Началах" принадлежит самому Евклиду. Как мы видим, история математики почти не сохранила достоверных данных о жизни Пифагора и его математической деятельности. Зато легенда сообщает даже ближайшие обстоятельства, сопровождавшие открытие теоремы. Рассказывают, что в честь этого открытия Пифагор принес в жертву 100 быков.

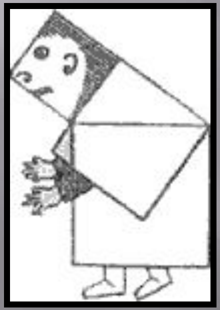
На главную

Теорема Пифагора и способы ее доказательства

Карикатуры

Доказательство теоремы Пифагора учащиеся средних веков считали очень трудным и называли его Dons asinorum- ослиный мост, или elefuga- бегство "убогих", так как некоторые "убогие" ученики, не имевшие серьезной математической подготовки, бежали от геометрии. Слабые ученики, заучившие теоремы наизусть, без понимания, и прозванные поэтому "ослами",были не в состоянии преодолеть теорему Пифагора, служившую для них вроде непреодолимого моста. Из-за чертежей, сопровождающих теорему Пифагора, учащиеся называли ее также "ветряной мельницей", составляли стихи вроде "Пифагоровы штаны на все стороны равны", рисовали карикатуры.



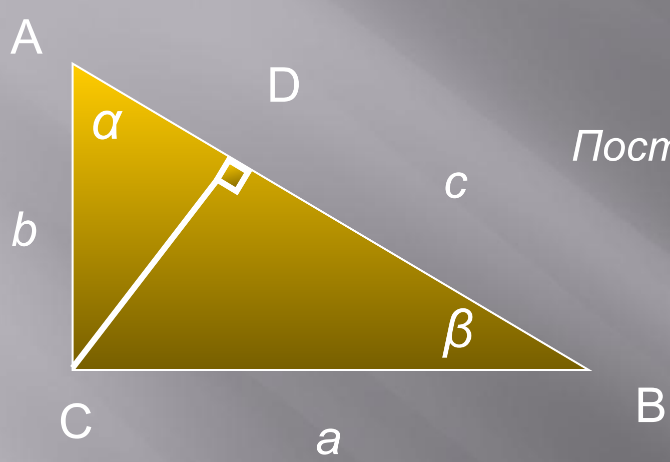


Теорема Пифагора-одна из главных и, можно сказать, самая главная теорема геометрии. Значение ее состоит в том, что из нее или с ее помощью можно вывести большинство теорем геометрии. Теорема Пифагора замечательна и тем, что сама по себе она вовсе не очевидна. Например, свойства равнобедренного треугольника можно видеть непосредственно на чертеже. Но сколько ни смотри на прямоугольный треугольник, никак не увидишь, что между его сторонами есть простое соотношение: $c^2=a^2+b^2$.

На главную

Теорема Пифагора и способы ее доказательства

Доказательство теоремы Пифагора по косинусу



Построим из прямого угла С высоту CD

*По определению **косинуса***

Cos α= AD:AC=AC:AB ⟹ *AB*AD=AC*

Аналогично:

Cos β=BD:BC=BC:AB

Складывая полученные равенства почленно, и отмечая, что

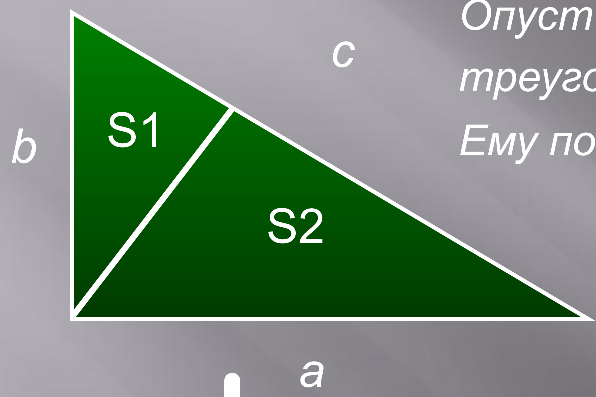
$$AC^2+BC^2=AB(AD+DB)=AB^2$$

чтд

На главную

Теорема Пифагора и способы ее доказательства

<u>Доказательство теоремы Пифагора по площади</u>



Опустим высоту на гипотенузу С .Площадь треугольника-S ,разбивается на 2 Ему подобных с площадями S1 и S2.

Площади треугольников относятся как <u>Квадраты их гипотенуз.</u>

$S1:S2:S=a^2: b^2:c^2$

<u>НО!</u>

<u>S1+S2=S ,то есть $a^2 + b^2 + c^2$</u>

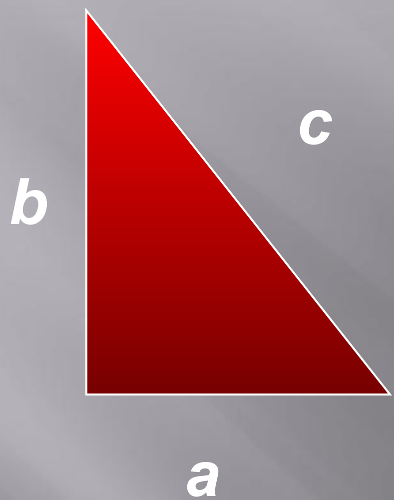
что

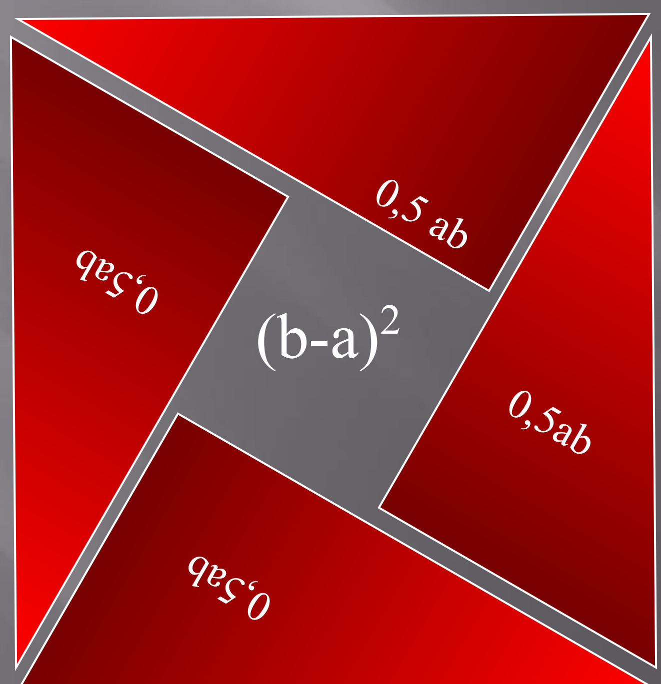
<u>На главную</u>

Теорема Пифагора и способы ее доказательства

<u>Доказательство теоремы Пифагора по Басхари</u>

Это прямоугольный треугольник





Иллюстрирует доказательство великого индийского математика Бхаскари (знаменитого автора Лилавати, XII в.). Рисунок сопровождало лишь одно слово: СМОТРИ! Среди доказательств теоремы Пифагора алгебраическим методом первое место (возможно, самое древнее) занимает доказательство,

Теорема Пифагора и способы ее доказательства

Здесь изображено два равных квадрата. Длина сторон каждого квадрата равна а + b. Каждый из квадратов разбит на части, состоящие из квадратов и прямоугольных треугольников. Ясно, что если от площади квадрата отнять учетверенную площадь прямоугольного треугольника с катетами а, b, то останутся равные площади, т. е. $c^2 = a^2 + b^2$.

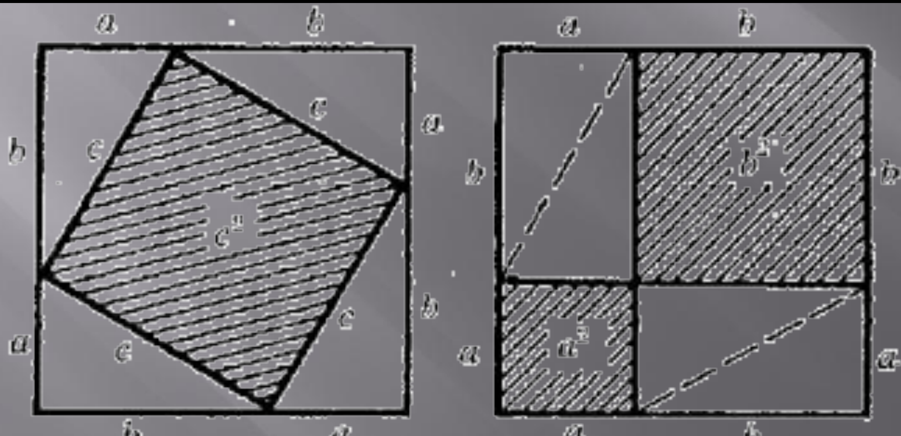


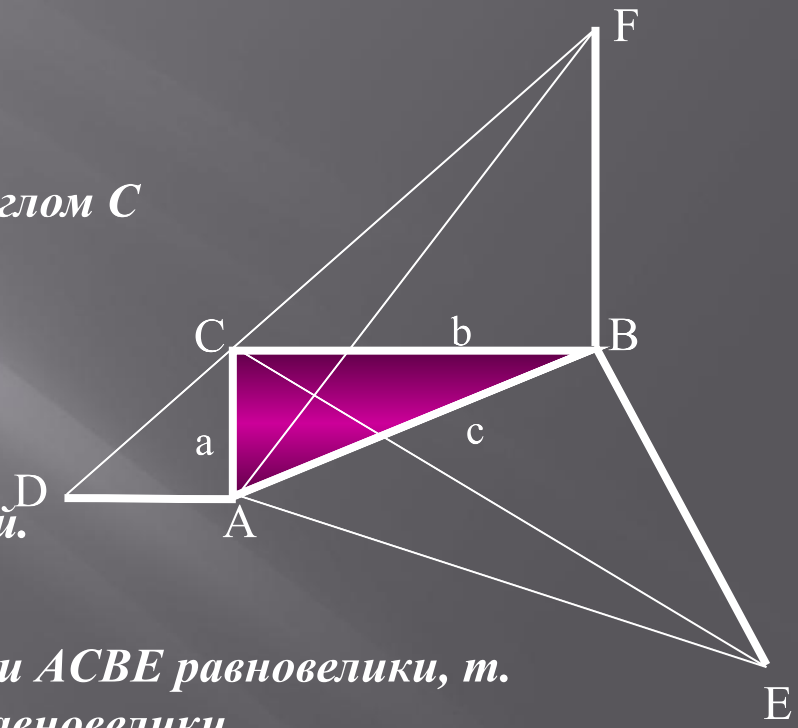
Рис. 2

[На главную](#)

Теорема Пифагора и способы ее доказательства

Доказательство теоремы Пифагора методом Гофмана и Мёльманна

Метод Гофмана



Построим треугольник ABC с прямым углом C

Построим BF=CB, BF$\perp$CB

Построим BE=AB, BE$\perp$AB

Построим AD=AC, AD$\perp$AC

Точки F, C, D принадлежат одной прямой.

Как мы видим, четырёхугольники ADFB и ACBE равновелики, т. к. ABF=ECB. Треугольники ADF и ACE равновелики.

Отнимем от обоих равновеликих четырёхугольников общий для них треугольник ABC, получим: $\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2=\frac{1}{2}c^2$

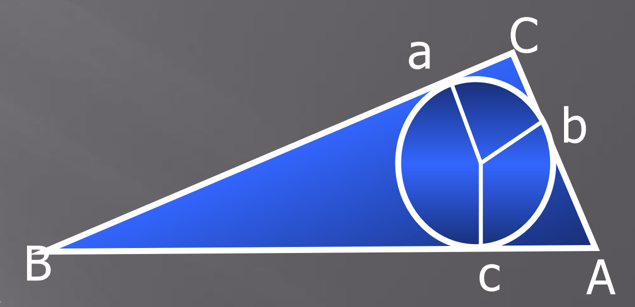
Соответственно: $a^2+b^2=c^2$

чтд

Теорема Пифагора и способы ее доказательства

Доказательство теоремы Пифагора методом Гофмана и Мёльманна

Метод Мёльманна



Площадь данного прямоугольника с одной стороны равна 0.5ab, с другой 0.5pr, где p – полупериметр треугольника, r – радиус вписанной в него окружности (r = 0.5(a+b-c)).

Имеем:

$0.5ab=0.5pr=0.5(a+b+c)*0.5(a+b-c)$

Отсюда следует , что

$c^2=a^2+b^2$

чтд

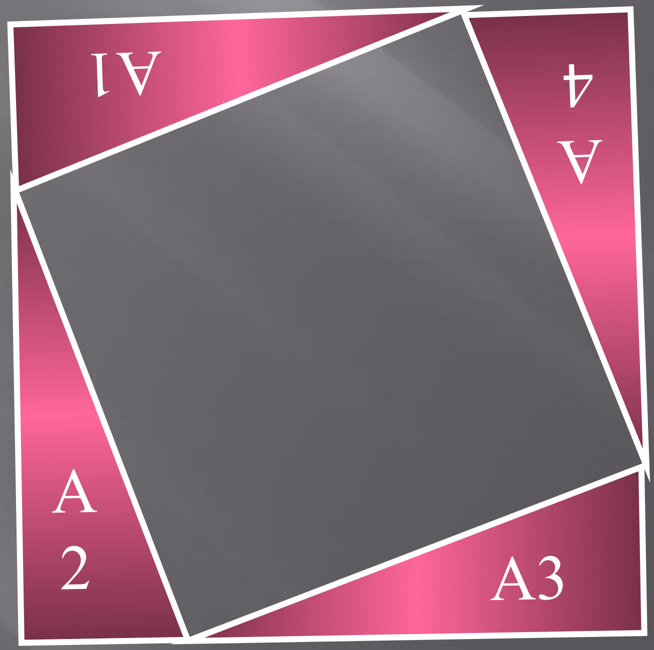
На главную

Теорема Пифагора и способы ее доказательства

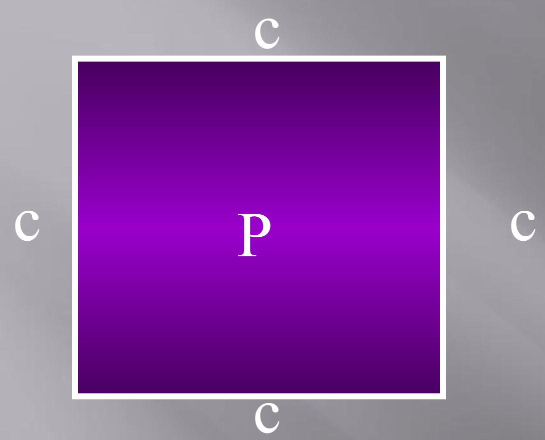
Алгебраический способ доказательства теоремы Пифагора

Треугольники А1, А2, А3 равны треугольнику А (по двум катетам и прямому углу

Следовательно их гипотенузы равны



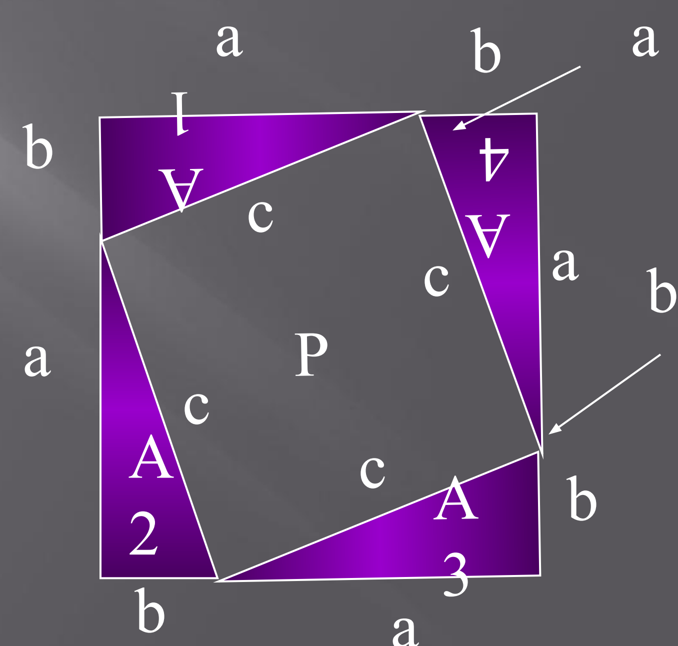
Теорема Пифагора и способы ее доказательства



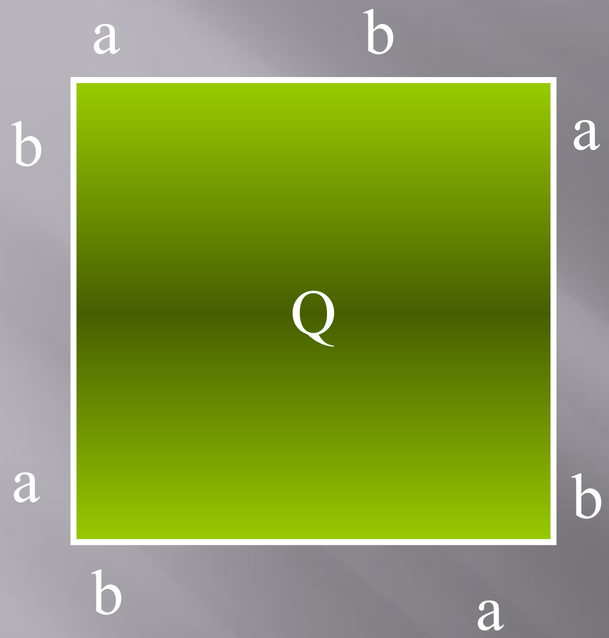
Четырехугольник P является квадратом (Все стороны равны, углы прямые)

<u>Равенство углов в четырехугольнике P доказывается следующим образом:</u>

- ***Пусть a и b – величины острых углов треугольника***
- ***Тогда $\angle a + \angle b = 90^0$***
- ***Угол A + ($\angle a + \angle b$) = 180^0***
- ***$180^0 - 90^0 = 90^0$***
- ***Угол A равен 90^0***
- ***Аналогичным способом находятся градусные меры остальных углов квадрата P***



Теорема Пифагора и способы ее доказательства



Это квадрат Q

Получим площадь квадрата Q

- $S(Q) = S(P) + 4S(T)$
- $S(Q) = (a + b)^2$
- $S(P) = c^2$
- $S(T) = 1/2(ab)$
- $(a + b)^2 = c^2 + 4(1/2(ab))$
- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$

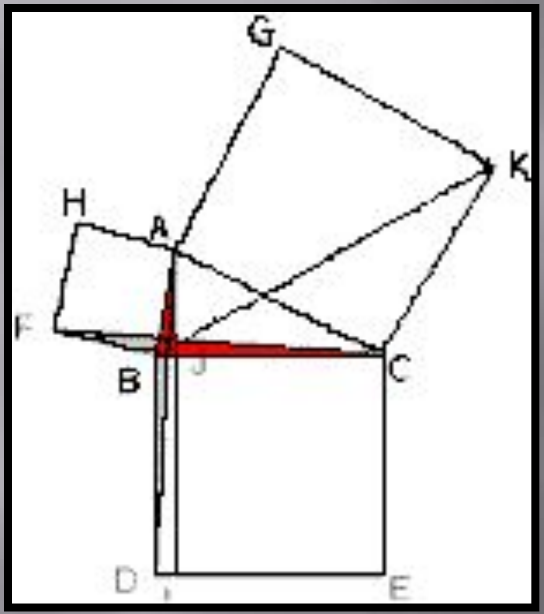
- $a^2 + b^2 = c^2$

чтд

На главную

Теорема Пифагора и способы ее доказательства

Доказательство теоремы Пифагора по Евклиду



AJ- высота, опущенная на гипотенузу.
Докажем, что её продолжение делит построенный на гипотенузе квадрат
На два прямоугольника, площади которых равны площадям соответствующих
Квадратов, построенных на катетах.
1) Докажем, что прямоугольник BJLD равновелик квадрату ABFH.
Треугольник ABD=BFC (по двум сторонам и углу между ними BF=AB; BC=BD;
угол FBC=углу ABD).

НО!

Теорема Пифагора и способы ее доказательства

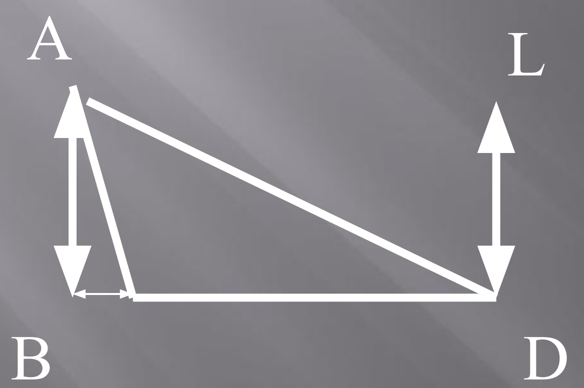
S треугольника ABD=1/2 Sпрямоугольника BJLD, т.к. у треугольника ABD и прямоугольника BJLD общее основание BD и общая высота LD

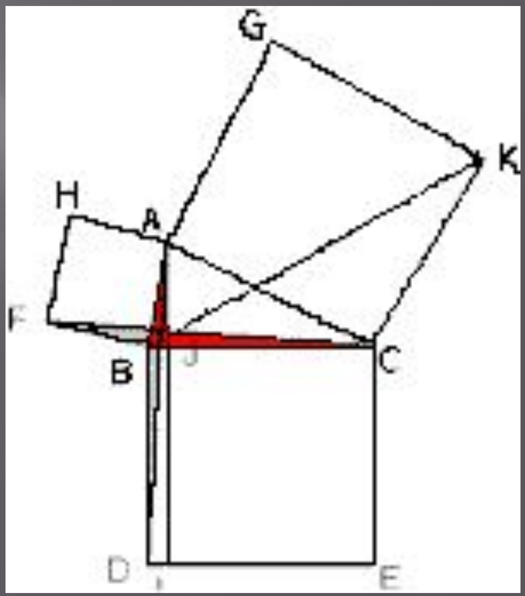
<u>АНАЛОГИЧНО,</u> S треугольника FBC=1/2 S прямоугольника ABFH(BF-общее Основание, AB-общая высота). Отсюда, учитывая, что S треугольника ABD =S треугольника FBC, имеем: S BJLD=S ABFH.

<u>АНАЛОГИЧНО</u>, используя равенство треугольников BCK и ACE, доказывается, что S JCEL=S ACKG.

S ABFH+S ACKJ=S BJLD+ S JCEL=S BCED.

<u>S треугольника=1/2AB x BD=1/2LD x BD=1/2 S BJLD</u>



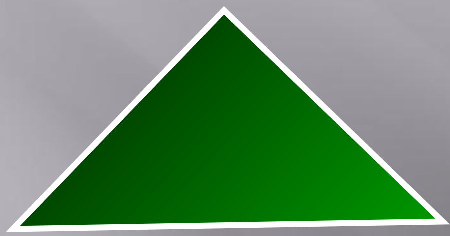


чтд

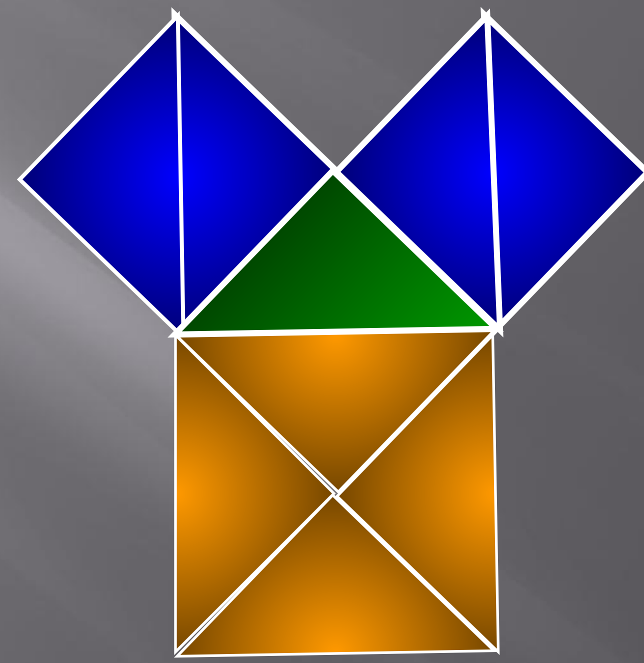
<u>На главную</u>

Теорема Пифагора и способы ее доказательства

<u>Наиболее привычный способ доказательства теоремы Пифагора.</u>

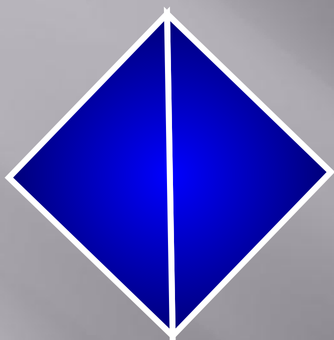


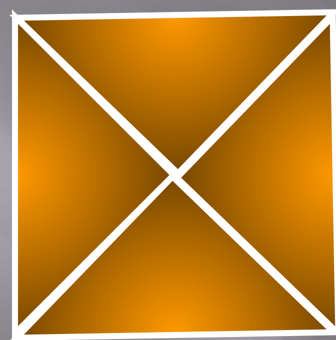
Это равнобедренный прямоугольный треугольник.

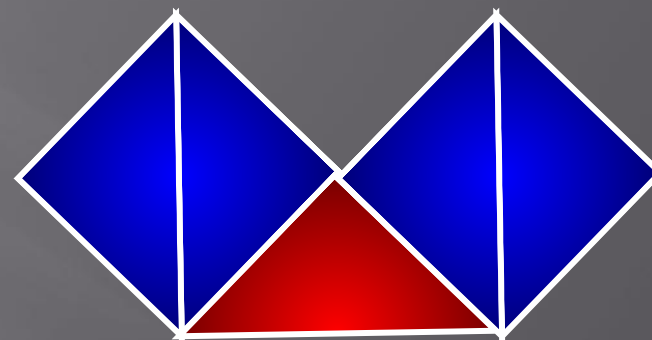


<u>Все треугольники равны исходному, поэтому также являются равнобедренными и прямоугольными</u>

Теорема Пифагора и способы ее доказательства

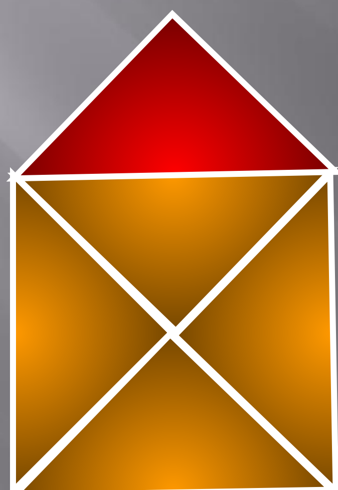






Фигуры построенные на сторонах треугольника являются квадратами (определение квадрата)

Квадраты,построенные на катетах исходного треугольника, содержат по два таких же треугольника.



Квадрат, построенный на гипотенузе исходного треугольника, содержит 4 таких же треугольников

Теорема Пифагора и способы ее доказательства

Получается что квадрат построенный на гипотенузе треугольника равен сумме квадратов построенных на катетах этого треугольника

$$a^2 + b^2 = c^2$$

чтд

[На главную](#)