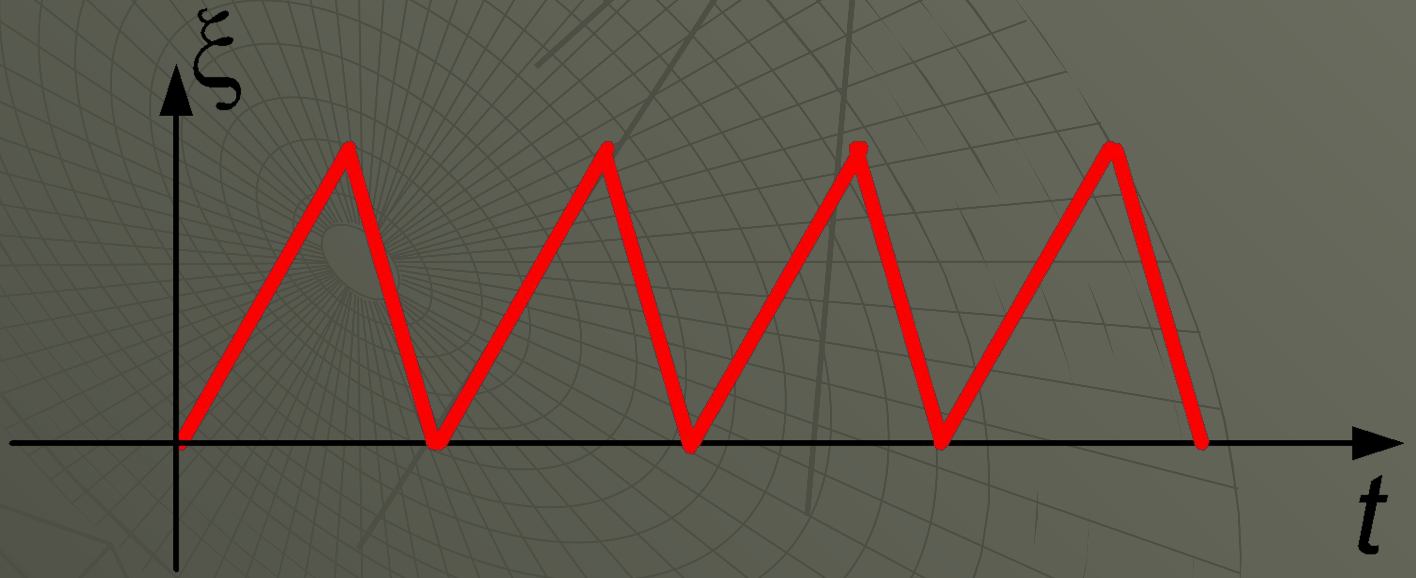
Л.37 (29) Колебания

Процессы, при которых состояние системы повторяется, спустя строго определённый промежуток времени. Этот промежуток времени называется периодом колебаний

$$\xi(t+\tau)=\xi(t) \quad (37.1)$$



6. Дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний и его решение

$$\tilde{m}\ddot{\xi} + \tilde{k}\xi = 0 \quad (6.1)$$

Динамическое уравнение

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0 \quad (6.2)$$

Кинематическое уравнение

$$\xi = \xi_m \cos(\omega_0 t + \alpha_0) \quad (6.3)$$

Решение – закон косинуса

$$\omega_0 = \left(\tilde{k} / \tilde{m}\right)^{1/2} \quad (6.4)$$

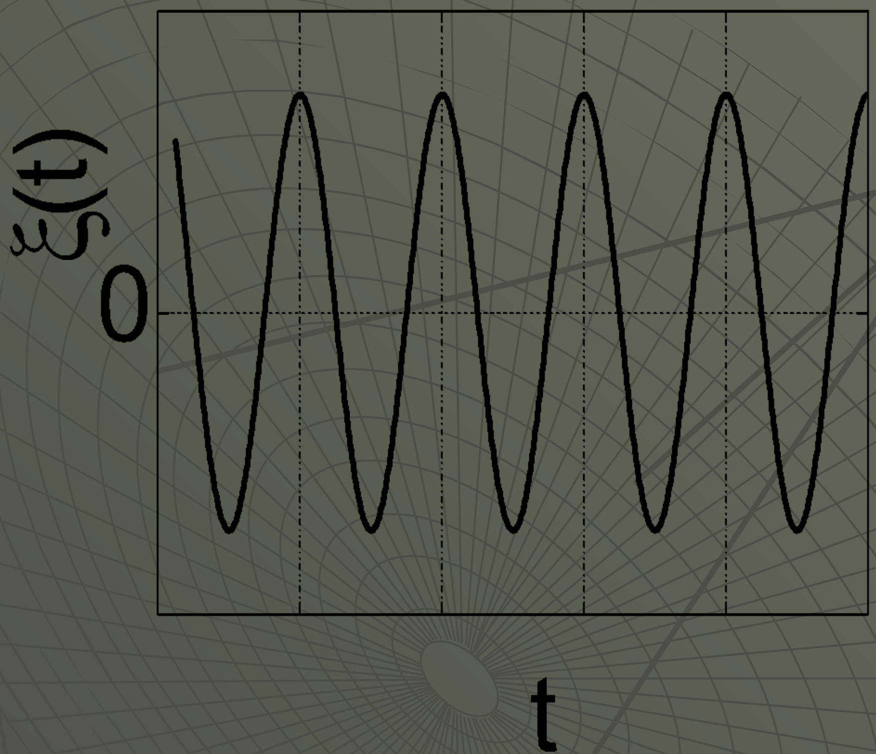
СЧ ГО

ξ_m, α_0

Амплитуда и начальная фаза определяются НУ

$\xi_0, \dot{\xi}_0$

График зависимости обобщённой координаты от времени при свободных и вынужденных гармонических колебаниях



$$\alpha(t) = \omega t + \alpha_0 \quad (10.2)$$

Зависимость от времени фазы любых колебаний

7. Дифференциальное уравнение затухающих колебаний и его решение

$$\tilde{m}\ddot{\xi} + \tilde{r}\dot{\xi} + \tilde{k}\xi = 0 \ (7.1)$$

Динамическое уравнение

$$\dot{\xi} + 2\beta\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = 0 \quad (7.2)$$

Кинематическое уравнение

$$\xi = \xi_{m0}\exp(-\beta t)\cos(\omega_d t + \alpha_0) \ (7.3)$$

Решение – закон, по которому совершаются ЗК

$$\beta = \frac{\tilde{r}}{2\tilde{m}} \quad (7.4)$$

Коэффициент затухания

$$\xi_{m0}, \alpha_0$$

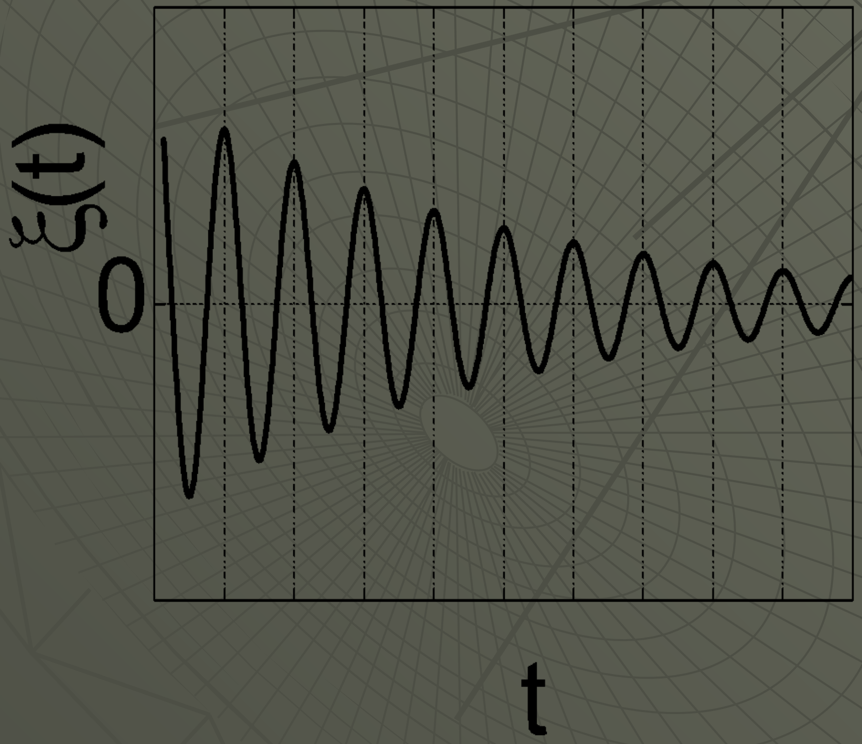
Начальная амплитуда и начальная фаза определяются НУ

$$\xi_0, \dot{\xi}_0$$

Затухающие колебания: ближе к реальности, чем свободные; консервативный + инерционный + диссипативный элементы (демонстрации)

$$W(t) = \frac{\tilde{m}\dot{\xi}^2}{2} + \frac{\tilde{k}\xi^2}{2} \quad (37.2)$$

Энергия ГО при затухающих колебаниях убывает со временем, переходя во внутреннюю энергию среды - диссипация



Зависимость от времени обобщённой координаты при затухающих колебаниях

Практически наиболее интересны слабозатухающие колебания

$$\beta << \omega_0 \quad (37.3)$$

Коэффициент затухания много меньше собственной частоты

$$\Delta W_{\tau 0}(t) << W(t) \quad (37.4)$$

Убыль энергии за один период много меньше энергии осциллятора в данный момент

$$\beta^{-1} = \tau_r >> \tau_0 \quad (37.5)$$

Время релаксации много больше периода колебаний

Логарифмический декремент затухания (ЛДЗ) и добротность – удобные безразмерные характеристики диссипативных свойств осциллятора

$$\Lambda = \ln \frac{\xi_m(t)}{\xi_m(t+\tau_0)}$$

Определение ЛДЗ

$$Q = 2\pi \frac{W(t)}{\Delta W_{\tau 0}(t)}$$

Определение добротности

$$\Lambda = \beta\tau_0$$

Связь ЛДЗ с коэффициентом затухания и периодом

$$\beta << \omega_0$$

$$Q = \frac{\pi}{\Lambda}$$

Связь ЛДЗ с добротностью

8. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний и его решение

$$\dot{\xi} + 2\beta\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = \frac{\tilde{F}_m}{\tilde{m}}\cos(\omega t) \quad (8.1)$$

Дифференциальное уравнение ВК

$$\xi = \xi_{mf}(\omega)\cos\left[\omega t - \alpha_f(\omega)\right] \quad (8.2)$$

Решение – закон ВК

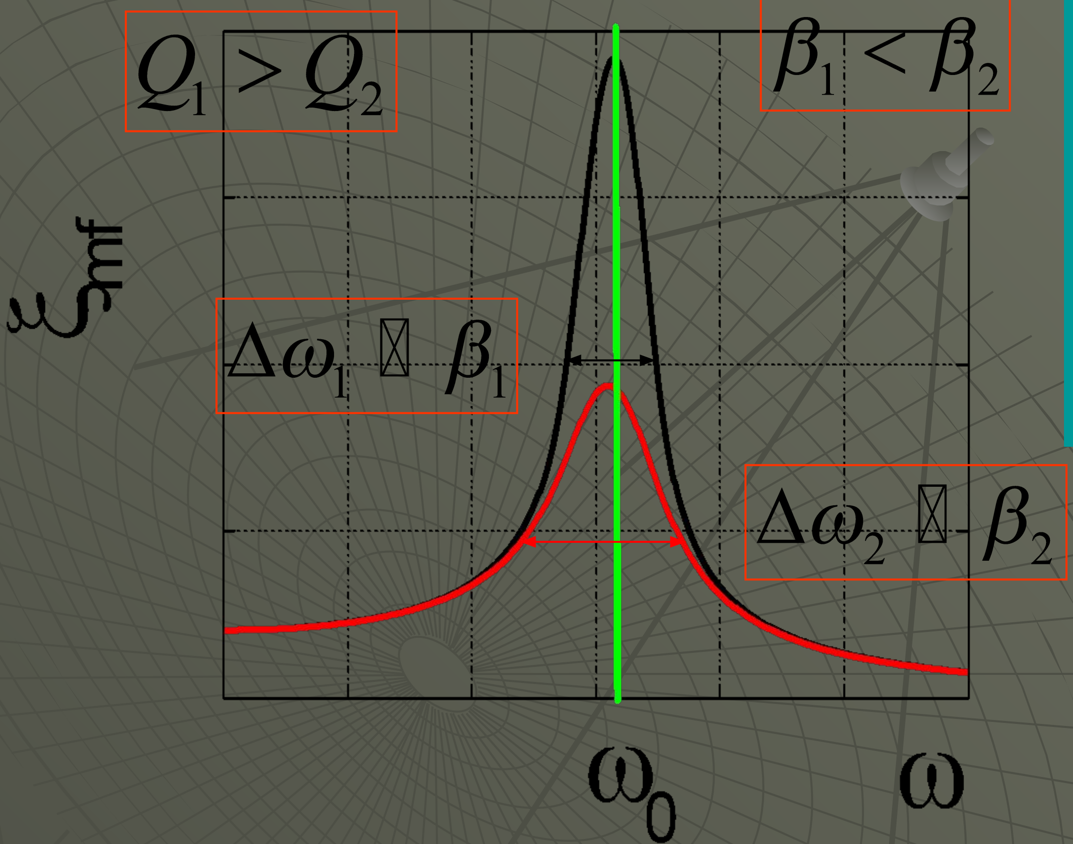
$$\xi_{mf}(\omega) = \frac{\tilde{F}_m}{\tilde{m}}\left[\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2\right]^{-1/2} \quad (8.3)$$

Амплитуда ВК (АЧХ)

$$tg[\alpha_f(\omega)] = \frac{2\omega\beta}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (8.4)$$

Разность фаз ВВС и ВК (ФЧХ)

Вынужденные колебания: резонансная кривая – зависимость амплитуды от частоты ВВС (АЧХ)

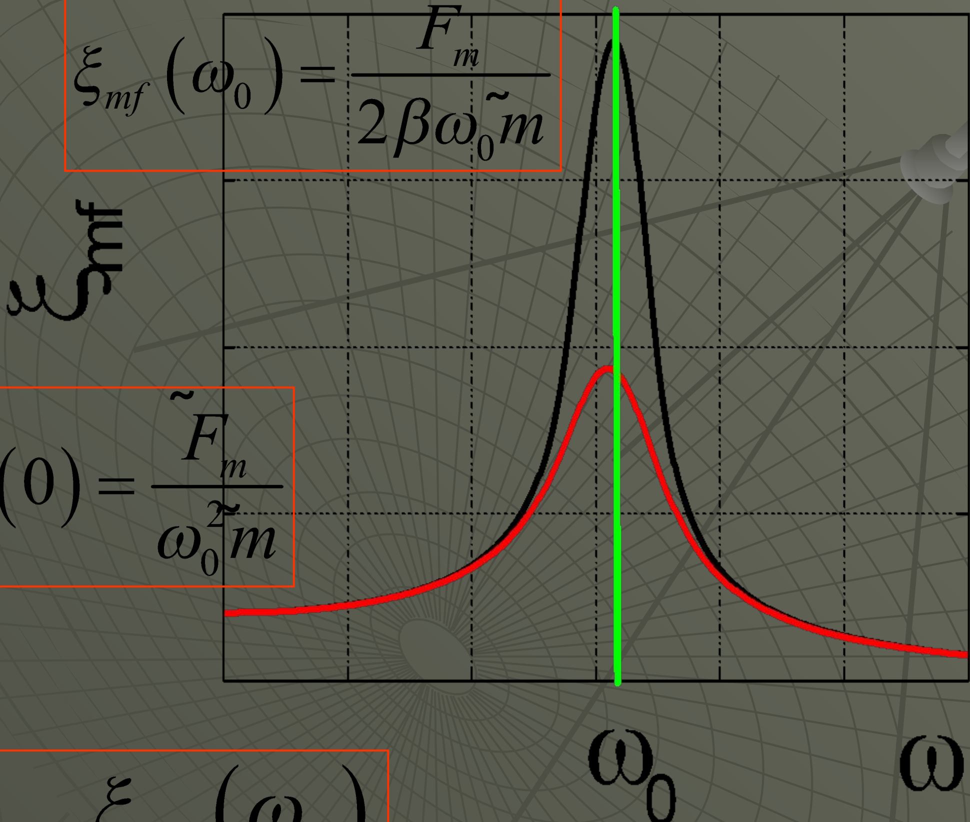


Резонанс – резкое возрастание амплитуды ВК при приближении частоты ВВС к СЧ ГО (демонстрации)

$$Q \sim \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

Глядя на резонансную кривую сразу можно прикинуть добротность

Вынужденные колебания: резонансная кривая – зависимость амплитуды от частоты ВВС (АЧХ)



$$\xi_{mf}(\omega_0) = \frac{\tilde{F}_m}{2\beta\omega_0\tilde{m}}$$

$$\xi_{mf}(0) = \frac{\tilde{F}_m}{\omega_0^2\tilde{m}}$$

$$Q \equiv \frac{\xi_{mf}(\omega_0)}{\xi_{mf}(0)}$$

Другое определение добротности

$$Q = \frac{\omega_0}{2\beta}$$

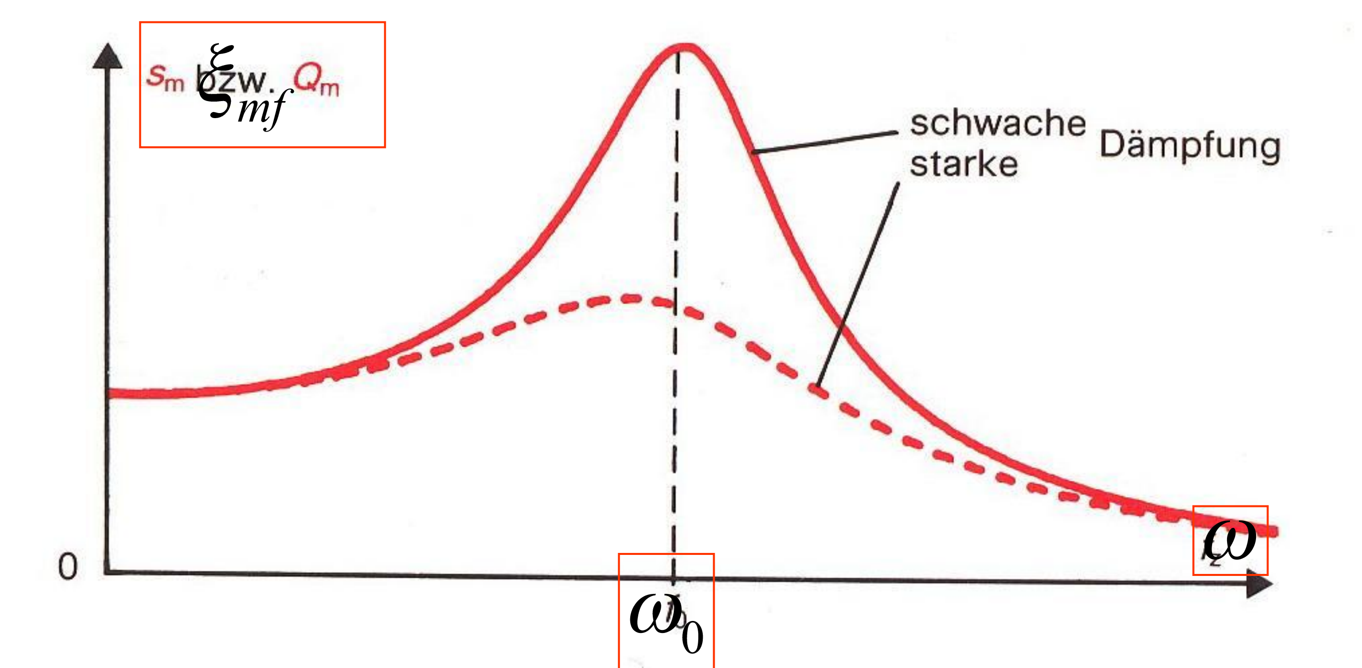
$$\beta_1 < \beta_2$$

$$Q_1 > Q_2$$

9. Резонанс

Физическое явление. Заключается в резком возрастании амплитуды вынужденных колебаний при совпадении СЧ и частоты ВВС

Физическая причина резонанса в том, что фазы ВВС и обобщённой скорости всё время совпадают, мощность ВВС всё время положительна



Метод векторных диаграмм позволяет наглядно и эффективно анализировать колебания:
анимация из Открытой физики

$$\xi = \xi_{mf}(\omega)\cos\left[\omega t - \alpha_f(\omega)\right]$$

ξ как бы катет, если ξ_{mf} - гипотенуза

$$\dot{\xi} = -\omega\xi_{mf}(\omega)\sin\left[\omega t - \alpha_f(\omega)\right]$$

$\dot{\xi}$ тоже как бы катет, если $\omega\xi_{mf}$ - гипотенуза

Это мотивация использования «как бы» векторов для анализа колебательных процессов

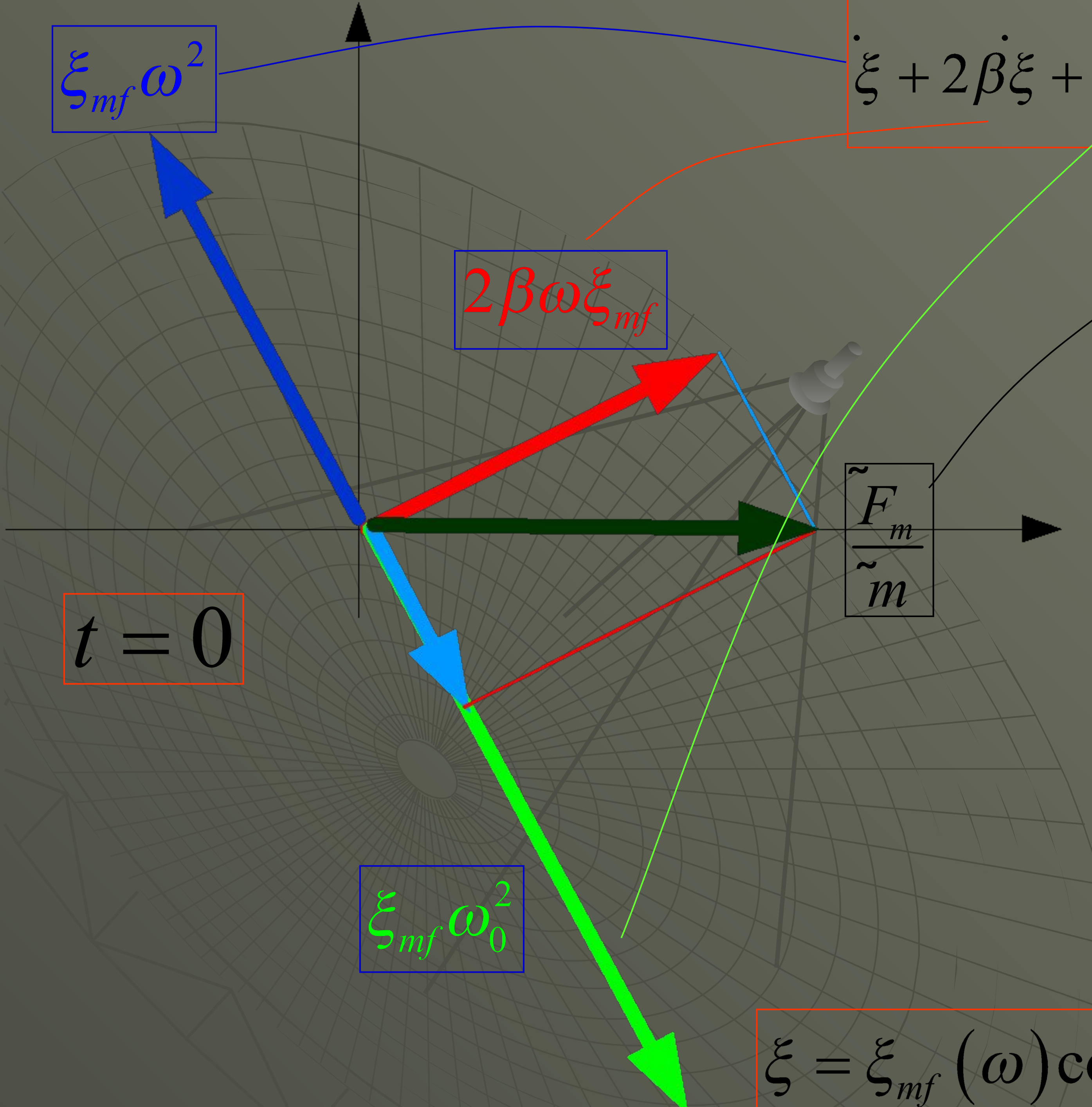
Рецепт построения векторных диаграмм

Каждое слагаемое-колебание - стрелка

Амплитуда колебания – длина стрелки

Фаза колебания – угол между положительным направлением горизонтальной оси и стрелкой, положительный – против часовой стрелки

$$\ddot{\xi} + 2\beta\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = \frac{\tilde{F}_m}{\tilde{m}}\cos(\omega t)$$

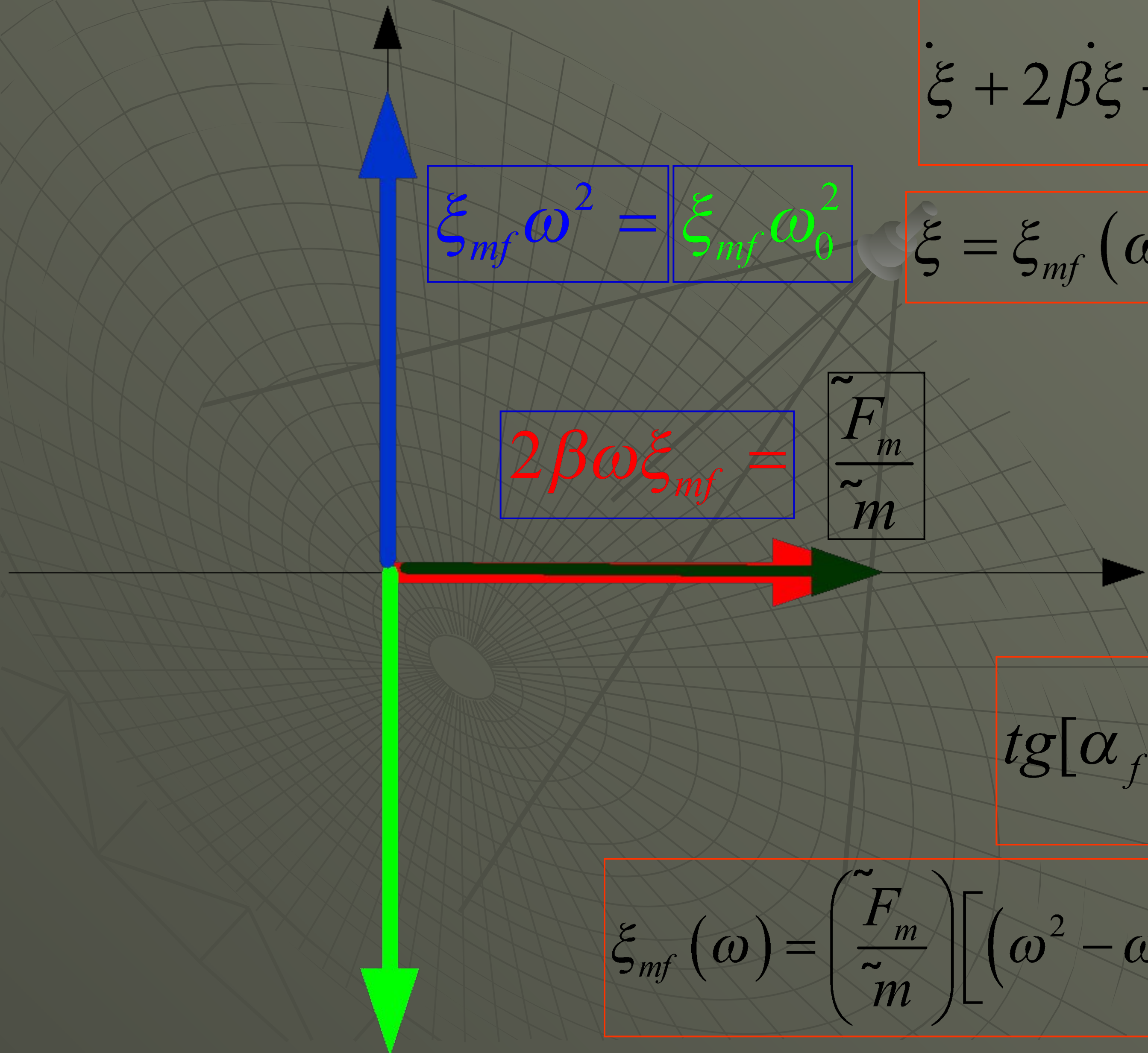


$$\xi = \xi_{mf}(\omega)\cos\left[\omega t - \alpha_f(\omega)\right]$$

Векторная диаграмма вынужденных колебаний для случая резонанса

$$\ddot{\xi} + 2\beta\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = \frac{\tilde{F}_m}{\tilde{m}}\cos(\omega t)$$

$$\xi = \xi_{mf}(\omega)\cos\left[\omega t - \alpha_f(\omega)\right]$$



$$tg[\alpha_f(\omega)] = \frac{2\omega\beta}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$\xi_{mf}(\omega) = \left(\frac{\tilde{F}_m}{\tilde{m}}\right)\left[\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2\right]^{-1/2}$$

Пример использования вынужденных колебаний и резонанса: приём радиосигнала

Пример учёта вынужденных колебаний и резонанса: СЧ конструкций должны быть подальше от частот возможных периодических воздействий

Пример катастрофического резонанса: совпадение СЧ зданий с частотой землетрясения – Спитак, 7.12.1988, около 50 тыс. погибших, около 500 тыс. человек остались без крова (Природа, 1998,)

Если хотите добиться максимального эффекта воздействия с минимальными усилиями – воздействуйте в резонанс, на СЧ

Если хотите добиться минимального эффекта воздействия – держитесь подальше от СЧ