Применение методов прогнозирования в логистике

Продолжение

Прогноз по данным временного ряда, содержащим сезонную компоненту

При составлении прогноза сезонную компоненту можно учесть как аддитивную составляющую или в виде индекса сезонности. В теории прогнозирования разработаны несколько способов учета сезонности, рассмотрим некоторые из них.

Учет сезонности в трендовых моделях прогнозирования.

Алгоритм прогнозирования с учетом сезонной составляющей по трендовым моделям (формулы (7.4) и (7.5)) состоит из пяти этапов.

$$y^*_t = \bar{y}_t + s_t + v_t + d_t + \varepsilon_t, \qquad (7.4)$$

$$y^*_t = \bar{y}_t \times I_s \times I_v \times I_d + \varepsilon_t, \qquad (7.5)$$

1) Первый этап заключается в <u>определении структуры сезонных изменений и периода этих колебаний</u>. Например, через каждые 4 квартала "поведение" показателя повторяется; если данные собраны по месяцам, то структура сезонных колебаний будет повторяться каждые 12 месяцев. Если значение показателя существенно изменяется по дням недели, то можно говорить о "сезонных" колебаниях периодичностью 7дн.

2) Второй этап- это <u>оценка и исключение тренда</u>. Для оценки тренда могут использоваться два варианта: линии (кривые) тренда или метод скользящих средних. Уделим внимание второму варианту оценки тренда.

<u>Метод скользящих средних</u> предусматривает вычисление последовательности скользящих средних по m узлам, где m- продолжительность сезонных колебаний.

<u>Если m-нечетное</u>, то первое значение скользящего среднего (среднее от первого до m-го значения ряда) присваивается (m + 1)/2 точке. Аналогично следующее значение скользящего среднего (среднее от второго до (m + 1)-го значения назначается (m + 3)/2 точке и т. д.).

Если m-четное, то задача несколько усложняется, так как средние точки будут расположены между точками, по которым выполнялся расчет. Например, если m = 4, то первое скользящее среднее окажется между второй и третьей точками, второе скользящее среднее между третьей и четвертой и т. д. В этом случае требуется процедура центрирования полученных значений.
Центрированное значение находится как среднее от двух скользящих средних, находящихся между точками. Например, центрированное значение для третьей точки это среднее от скользящих средних, расположенных между второй и третьей, третьей и четвертой точками.
Необходимо отметить, что полученные значения скользящих средних уже не содержат сезонной компоненты, поскольку представляют среднюю величину за определенный период.
3) Третий этап- определение сезонной компоненты. Расчеты зависят от выбора вида модели прогноза.
Для аддитивной модели (7.4) рассчитывается оценка сезонной компоненты как разность между фактическим значением и значением, определенным по трендовой модели (первый вариант оценки тренда). Или фактическим значением и скользящей средней (при нечетном m), или фактическим значением и центрированной средней (при четном m), если использовался второй вариант оценки тренда.

Для мультипликативной модели (7.5) при первом варианте оценки тренда находится отношение фактических значений показателя к расчетным, определенным по трендовой модели. Во втором варианте оценки тренда находится отношение фактических значений показателя к скользящей средней (при нечетном m) или к центрированной средней (при четном m). Такое отношение называется индексом (коэффициентом) сезонности.

Для того чтобы дальше использовать значения сезонной компоненты и коэффициентов сезонности, необходимо найти средние значения оценок (коэффициентов) для каждого сезона. Далее полученные средние значения следует скорректировать таким образом, чтобы сумма оценок сезонной компоненты для аддитивной модели равнялась нулю (это позволит усреднить значения сезонной компоненты за весь период колебаний), а сумма коэффициентов (индексов) сезонности равнялась числу сезонов.

Если в аддитивной модели из фактического значения вычесть сезонную компоненту, а в мультипликативной модели фактическое значение разделить на индекс сезонности, то получим данные, в которых нет сезонности.

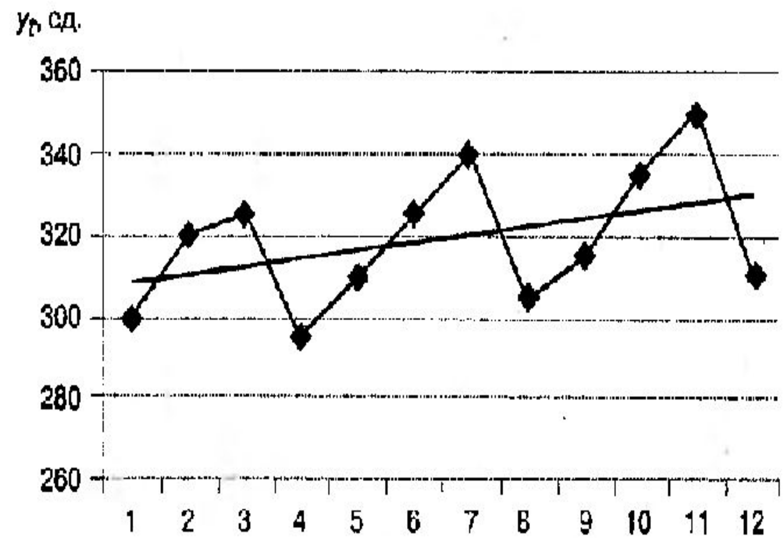
4) Четвертый этап- прогнозирование на основе данных, из которых исключена сезонная составляющая. Этот этап выполняется в том случае, если на втором этапе мы выбрали для оценки тренда метод скользящих средних. Для прогнозирования выбирается трендовая модель с помощью метода наименьших квадратов или экспоненциальное сглаживание. После исключения из исходных данных сезонности и тренда остается случайная составляющая, отражающая присутствие не поддающихся учету и прогнозу факторов.

5) Пятый этап- вычисление ошибки модели прогноза. Из фактического значения вычитаются сезонная компонента и тренд (аддитивная модель), для полученных остатков определяется среднее квадратическое отклонение. В мультипликативной модели из фактического значения вычитается произведение индекса сезонности и тренда. По полученным остаткам также рассчитывается ошибка прогноза. Следует напомнить, что чем больше период упреждения прогноза, тем его точность будет меньше.

Пример 1. В таблице представлены поквартальные данные о количестве реализованных единиц товара за три года.

По данным таблицы построим график. Из графика видно, что периодичность сезонных колебаний равна 4, существует тенденция увеличения размера реализации. На основе имеющихся данных выполним прогноз на четвертый год.

Год	Квартал	Период, t	Размер реализации, ед. товара
1	I	1	300
	II	2	320
	III	3	325
	IV	4	295
2	I	5	310
	II	6	325
	III	7	340
	IV	8	305
3	I	9	315
	II	10	335
	III	11	350
	IV	12	310



Оценим тренд. МНК (методом наименьших квадратов) подберем линию тренда к данным таблицы и рисунку.

Уравнение линейного тренда по данным таблицы:

$$y_t = 306{,}6 + 1{,}9t.$$

Для $t = 1$ $y_1 = 306{,}6 + 1{,}9 \times 1 = 308{,}5.$

Для $t = 2$ $y_2 = 306{,}6 + 1{,}9 \times 2 = 310{,}4.$

Результаты расчета представлены в пятом столбце:

Год	Квартал	Размер реализации, ед.	Период, t	Тренд, ед.	Оценка сезонной компоненты аддитивной модели, ед.	Оценка сезонной компоненты мультипликативной модели
1	I	300	1	308,5	–8,5	0,972
	II	320	2	310,4	9,6	1,031
	III	325	3	312,4	12,6	1,040
	IV	295	4	314,3	–19,3	0,939
2	I	310	5	316,2	–6,2	0,980
	II	325	6	318,1	6,9	1,022
	III	340	7	320,1	19,9	1,062
	IV	305	8	322,0	–17,0	0,947
3	I	315	9	323,9	–8,9	0,973
	II	335	10	325,8	9,2	1,028
	III	350	11	327,8	22,2	1,068
	IV	310	12	329,7	–19,7	0,940

Оценим сезонную составляющую аддитивной модели (см. формулу 7.4) как разность между фактическим размером реализации и значением тренда . Для t=1 оценка сезонной компоненты равна $s^*_1 = 300 - 308{,}5 = -8{,}5$ ед

Для t=2 $s^*_2 = 320 - 310{,}4 = 9{,}6$ ед Оценки сезонной компоненты аддитивной модели представлены в шестом столбце.

Оценим сезонную составляющую мультипликативной модели (см. формулу 7.5) как отношение фактического размера реализации к значению тренда. Для t=1 оценка сезонной компоненты равна $s^*_1 = 300/308{,}5 = 0{,}972.$ Для t=2 $s^*_2 = 300/310{,}4 = 1{,}031$

Результаты определения сезонной составляющей для мультипликативной модели представлены в последнем столбце.

Полученные оценки сезонной компоненты пока еще не пригодны для построения прогнозов, поскольку они показывают сезонное отклонение от тренда для конкретного периода времени в исходном ряду. Для того чтобы оценки сезонности можно было использовать в целях получения более точного прогноза, скорректированного с учетом сезонных изменений, необходимо найти средние оценки сезонной компоненты.

Рассмотрим аддитивную модель. Средняя оценка сезонной компоненты для первого квартала равна:

$$s_1 = \frac{-8{,}5 - 6{,}2 - 8{,}9}{3} = -7{,}9 \text{ ед}$$

$$s_2 = \frac{9{,}6 + 6{,}9 + 9{,}2}{3} = 8{,}6 \text{ ед}$$

Для третьего и четвертого

$$s_3 = 18{,}2 \text{ ед. и } s_4 = -18{,}7 \text{ ед}$$

В моделях с сезонной компонентой предполагается, что сезонные воздействия за период взаимопогашаются (т.е. сумма значений сезонных компонент должна равна нулю. Определим сумму: **-7,9+8,6+18,2-18,7=0,2**
Определим корректирующий коэффициент: **k=0,2/4=0,05**
Скорректированные значения сезонной компоненты рассчитываются как разность между ее средней оценкой и корректирующим коэффициентом k. Для первого квартала: **-7,9-0,05=-7,95ед.** для второго **8,55** и т.д. …
Проверим условие равенства нулю суммы скорректированных значений:
-7,95+8,55+18,15-18,75=0 Таким образом полученные значения сезонной компоненты рассчитаны верно, и они могут использоваться в аддитивной модели прогноза.
Найдем прогноз на один год по трендовой модели и скорректируем его с учетом сезонности. Продолжим тренд на 13-й, 14-й, 15 и 16-й кварталы и рассчитаем значение размера реализации на основе выявленной тенденции, для этого в уравнение $y_t = 306{,}6 + 1{,}9t.$ вместо t подставим значения 13-й, 14, 15 и 16-й. Затем к полученным значениям прибавим оценку сезонной компоненты.
Для первого квартала (t=13) прогнозное значение равно

$$y_{13} = 306{,}6 + 1{,}9 \times 13 + (-7{,}95) = 331{,}3 - 7{,}95 = 323{,}35 \text{ ед.}$$

$$y_{14} = 306{,}6 + 1{,}9 \times 14 + 8{,}55 = 333{,}2 + 8{,}55 = 341{,}75 \text{ ед.}$$

Расчет ошибки, которую дает рассмотренная модель прогноза, показан в следующей таблице. Ошибка модели прогноза рассчитывается по формуле

($s_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i^* - y_i)^2}{k}},$) $s_y = \sqrt{\frac{62{,}63}{12-2}} = 2{,}5$ ед.

Год	Квартал	Размер реализации, ед. товара, y_t	Период, t	Тренд, T_t	Сезонная компонента, S_t	Тренд + + Сезонность, $T_t + S_t$	$(y_t - (T_t + S_t))^2$
1	I	300	1	308,5	–7,95	300,55	0,3025
	II	320	2	310,4	8,55	318,95	1,1025
	III	325	3	312,4	18,15	330,55	30,8025
	IV	295	4	314,3	–18,75	295,55	0,3025
2	I	310	5	316,2	–7,95	308,25	3,0625
	II	325	6	318,1	8,55	326,65	2,7225
	III	340	7	320,1	18,15	338,25	3,0625
	IV	305	8	322,0	–18,75	303,25	3,0625
3	I	315	9	323,9	–7,95	315,95	0,9025
	II	335	10	325,8	8,55	334,35	0,0025
	III	350	11	327,8	18,15	345,95	16,4025
	6	310	12	329,7	–18,75	310,95	0,9025
Сумма							62,63

Рассмотрим мультипликативную модель прогноза. Рассчитаем средние индексы сезонности. Для первого квартала индекс сезонности равен:

$$I_{s1} = \frac{0{,}972 + 0{,}98 + 0{,}973}{3} = 0{,}975$$

Для второго:

$$I_{s2} = \frac{1{,}031 + 1{,}022 + 1{,}028}{3} = 1{,}027$$

и т.д.

Взаимопогашаемость сезонных воздействий в мультипликативной модели выражается в том, что сумма значений сезонной компоненты по отдельным периодам должна быть равна числу периодов в цикле. В нашем примере число периодов в цикле равно четырем. Найдем сумму средних оценок сезонной компоненты: 0,975+1,027+1,057+0,942=4,002

Определим корректирующий коэффициент: k=4/4.002=0,9998=>1

Скорректированные значения сезонной компоненты или индексы сезонности равны произведению средних оценок и корректирующего коэффициента. В нашем примере индексы сезонности не претерпят существенных изменений, поскольку корректирующий коэффициент практически равен 1. Полученные значения индексов сезонности могут использоваться в моделях прогнозов.

Найдем прогноз на четвертый год с помощью мультипликативной модели. Для первого квартала (t = 13) прогноз размера реализации равен

$$y_{13} = (306{,}6 + 1{,}9 \times 13) \times 0{,}975 = 331{,}3 \times 0{,}975 = 323{,}018 \text{ ед}$$

Расчет ошибки, которую дает рассмотренная модель прогноза, показан в след. таблице:

Год	Квартал	Размер реализации, ед. товара, y_t	Период, t	Тренд, T_t	Сезонная компонента, S_t	Тренд × × Сезонность, $T_t \times S_t$	$(y_t - (T_t \times I_{St}))^2$
1	I	300	1	308,5	0,975	300,833	0,693
	II	320	2	310,4	1,027	318,775	1,501
	III	325	3	312,4	1,057	330,134	26,353
	IV	295	4	314,3	0,942	296,083	1,172
2	I	310	5	316,2	0,975	308,333	2,779
	II	325	6	318,1	1,027	326,673	2,800
	III	340	7	320,1	1,057	338,263	3,017
	IV	305	8	322,0	0,942	303,329	2,792
3	I	315	9	323,9	0,975	315,833	0,694
	II	335	10	325,8	1,027	334,572	0,183
	III	350	11	327,8	1,057	346,392	13,015
	IV	310	12	329,7	0,942	310,575	0,331
Сумма							**55,331**

Ошибка модели прогноза рассчитывается по формуле:

($s_y = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{N}(y_i^* - y_i)^2}{k}}$,)

$$s_y = \sqrt{\frac{55{,}331}{12-2}} = 2{,}352 \approx 2 \text{ ед}$$

Экспоненциальное сглаживание с тремя параметрами, отражающими тренд и сезонность изменений. Данная модель была предложена Винтерсом. Считается, что модель Винтерса позволяет повысить точность прогноза, когда временной ряд включает тренд и сезонные колебания. Модель Винтерса включает четыре уравнения:

- сглаживание исходного ряда:

$$L_t = \alpha \frac{y_t}{s_{t-s}} + (1-\alpha)(L_{t-1} + T_{t-1});$$

- сглаживание тренда:

$$T_t = \beta(L_t - L_{t-1}) + (1 - \beta)T_{t-1};$$

- оценка сезонности:

$$S_t = \gamma \frac{y_t}{L_t} + (1-\gamma)S_{t-s};$$

- $$y^*_{t+p} = (L_t + pT_t)S_{t-s+p},$$ еред:

Где L_t - сглаженное значение ряда;

α - параметр сглаживания данных;

y_t - фактическое значение показателя для периода t;

β - параметр сглаживания для оценки тренда;

T_t - оценка тренда;

γ - параметр сглаживания для оценки сезонности;

S_t - оценка сезонности;

p - количество периодов, на которое строится прогноз;

s **-** длительность периода сезонных колебаний.

Параметры сглаживания должны соответствовать условиям:

$$0 \le \alpha \le 1; 0 \le \beta \le 1; 0 \le \gamma \le 1.$$

Прежде чем применять уравнения, необходимо задать начальные условия. Существует <u>два варианта выбора начальных условий</u> в модели Винтерса. <u>Первый</u> предполагает, что начальное значение сглаженного ряда (**Ls**) равно первому наблюдению. Тогда тренд (**Ts**) равен нулю, а коэффициенты сезонности (**St-s**) устанавливаются равными 1.

Следует отметить, что начальных условий для сезонности столько, каков период сезонных колебаний, т. е., например, если Период колебаний равен 4 (поквартальная сезонность), то требуется установить 4 начальных условия для сезонности.

Второй вариант назначения начальных условий предполагает, что начальное значение для сглаженного ряда (**Lt-1)** равно среднему значению за первые s наблюдений. Тогда начальные условия для тренда (**Tt-1**) определяются наклоном прямой, образованной этими наблюдениями.

Коэффициенты сезонности равны

$$S_t = \frac{y_t}{L_s},$$

где **Ls-** начальное условие для сглаживания данных.

Анализ Фурье.

При применении этого метода сначала также оценивается и удаляется тренд. Для полученных остатков подбирается кривая, которая описывается формулой:

$$y_t = a_0 + \sum(a_k \cos k\tau + b_k \sin k\tau),$$

Где a_0, a_k, b_k параметры модели, **k**- номер гармоники (обычно от 1 до 4). Параметры модели определяются по МНК. Для применения этого метода необходимо, чтобы количество точек исходного ряда являлось степенью числа 2, например 2, 4, 8, 16…

Экспертные методы прогнозирования

Процедура получения экспертных оценок может быть формализована и представлена в виде блок-схемы.


Формирование группы экспертов
Составление анкеты и выбор количественных оценок факторов
Статистический анализ результатов опроса
Вычисление: среднего значения, дисперсии, коэффициента вариации, доверительных границ
Подтверждение достоверности экспертных оценок прогноза
Построение диаграммы рангов
Оценка экспертной группы
Согласованность мнений экспертов
Выделение подобных групп экспертов
Оценка взаимосвязи мнений экспертов
Проверка по критериям
Корректировка

Формирование группы экспертов- Остановимся на количественной стороне выбора экспертов. Известно, что при прогнозировании в целях минимизации расходов на прогноз стремятся привлекать минимальное число экспертов при условии обеспечения ошибки результата прогнозирования не более **E**, где 0 < **E** < 1. Поэтому рекомендуемое число экспертов может быть определено по формуле

$$N_{\min} = 2,5 + \frac{1,5}{E}$$

При подстановке предельных значений **E** в формулу получим, что минимальное количество экспертов равно 4.
Для определения максимальной численности экспертной группы используется неравенство:

$$N_{\max} \leq 3 \times \sum_{i=1}^{n} \frac{K_i}{2 \times K_{\max}}$$

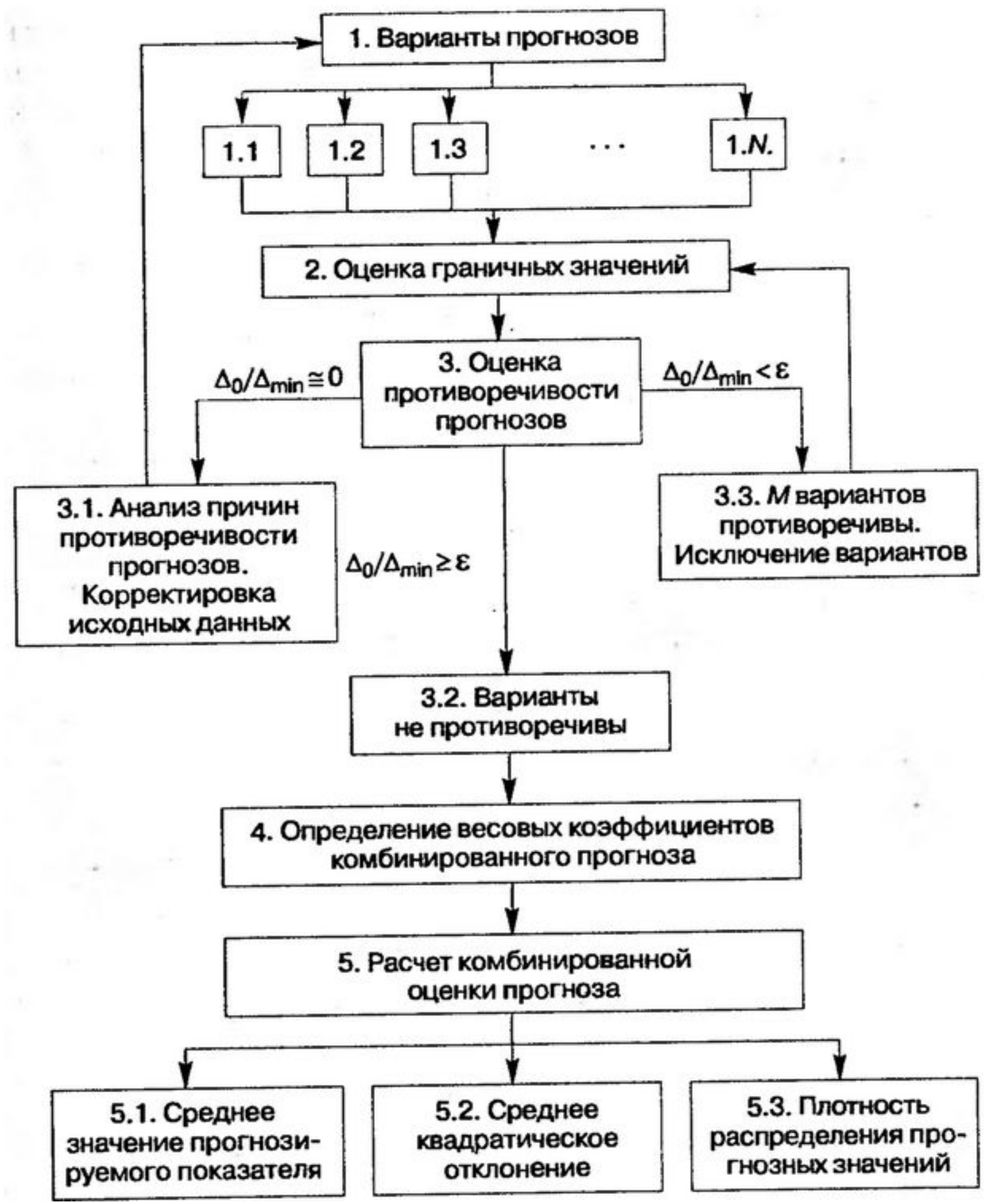
где **Ki**- компетентность i-го эксперта, рассчитанная на основе анкеты самооценки или иным способом; **Kmax**- максимально возможная компетентность по используемой шкале компетентности экспертов.
После определения числа экспертов переходят к поиску специалистов, отбор которых начинается с составления списка компетентных в данной области лиц. Далее все процедуры выбора экспертов основываются на составленном списке.

Комбинированная оценка прогноза

Для получения комбинированной оценки прогноза необходимо решить две задачи:

1. Установить область, внутри которой прогнозные результаты, полученные разными методами, могут считаться согласованными.
2. Установить такое соотношение между результатами прогнозов, которое наиболее адекватно отражало бы их связь с наиболее вероятным результатом прогнозирования.

Далее представлена общая схема получения комбинированного прогноза.


1. Варианты прогнозов
1.1
1.2
1.3
. . .
1.N.
2. Оценка граничных значений
3. Оценка противоречивости прогнозов
$\Delta_0/\Delta_{min} \cong 0$
$\Delta_0/\Delta_{min} < \varepsilon$
3.1. Анализ причин противоречивости прогнозов. Корректировка исходных данных
$\Delta_0/\Delta_{min} \geq \varepsilon$
3.3. M вариантов противоречивы. Исключение вариантов
3.2. Варианты не противоречивы
4. Определение весовых коэффициентов комбинированного прогноза
5. Расчет комбинированной оценки прогноза
5.1. Среднее значение прогнозируемого показателя
5.2. Среднее квадратическое отклонение
5.3. Плотность распределения прогнозных значений

Сначала формируется база исходных данных для комбинированного прогноза, которыми являются прогнозные значения, полученные разными методами. Исходные данные должны быть представлены в аналогичном виде. Если математический прогноз представлен в виде функции распределения, значит, необходимо получить вероятностную оценку значений прогнозируемой величины, полученных эвристическим методом.

Затем оцениваются резко выделяющиеся значения средних оценок прогнозируемого показателя, полученных разными методами. На этом этапе некоторые варианты прогнозов могут быть исключены из комбинированной оценки. Следующим шагом является оценка противоречивости прогнозов. Для решения этой задачи существует несколько методов, мы рассмотрим два из них. Первый метод предусматривает сравнение точечных и интервальных прогнозов. Точечные прогнозы, естественно, могут не совпадать. При сравнении интервальных прогнозов возможны три случая

1) Доверительные интервалы не имеют общей области: $\Delta_0 = 0.$

В этом случае проводится логический анализ причин противоречивости прогнозов, корректируются исходные данные, и проводится повторная проверка согласованности откорректированных прогнозов.

2) Доверительный интервал одного прогноза полностью охватывает доверительный интервал другого прогноза. При этом общая часть равна меньшему доверительному интервалу.

3) Доверительные интервалы частично перекрываются.

В качестве правила определения противоречивости или непротиворечивости прогнозов может быть принято следующее: результаты прогнозов не противоречат друг другу, если точечные прогнозы принадлежат общей области:

$Y_1, Y_2, ..., Y_N \in \Delta_0,$

Где **Yi -** значение точечной оценки i-го прогноза.

В качестве дополнительного условия непротиворечивости прогнозов может быть принято следующее: величина общей области должна быть такова, что $\Delta_0/\Delta_{\min} \geq \varepsilon,$ (*)

где ε - критерий оценки непротиворечивости прогнозов (определяется прогнозистом на основании опыта), $0 < \varepsilon \leq 1$

Если условие (*) не выполняется, а Δ_0 отличается от нуля, то при комбинированной оценке более чем двух прогнозов возможно исключение противоречивого варианта прогноза или его корректировка и затем повторная проверка противоречивости прогнозов. Если условие выполняется, то прогнозы не противоречивы и возможна их совместная обработка для получения комбинированной оценки прогноза.

Совместная обработка прогнозов заключается в определении средневзвешенного результата прогнозов, полученных различными методами с учетом их точности. Чем менее точен результат, тем меньше его вес в окончательном прогнозе. Весовые коэффициенты рассчитываются по формуле

$$\mu_i = \left(\sigma_i^2 \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2} \right)^{-1}$$

Где **N**- количество прогнозов, их в комбинированной оценке.

Среднее значение комбинированного прогноза определяется по формуле

$$\bar{Y}_{комб} = \sum_{i=1}^{N} \mu_i \times Y_i$$

Дисперсия комбинированного прогноза рассчитывается по следующей форм

$$\sigma^2_{комб} = \sum_{i=1}^{N} \mu_i \times \sigma_i^2$$