

Методы Монте-Карло

A close-up photograph of a roulette wheel. The wheel is made of wood and has a metal croupier's button in the foreground. The numbers on the wheel are visible, including 27, 13, 36, 11, 30, 8, 23, 5, and 2. The background is slightly blurred.

Выполнила: студентка 734 гр.
Авдеюк Ирина
Руководитель: доц. Сороко Е.Л.

Москва 2011

Методы Монте-Карло – это численные методы решения математических задач (систем алгебраических, дифференциальных, интегральных уравнений) и прямое статистическое моделирование (физических, химических, биологических, экономических, социальных процессов) при помощи получения и преобразования случайных чисел.

- *Первое упоминание в 1873 Холлом при организации стохастического процесса экспериментального определения числа путём бросания иглы на лист линованной бумаги.*
- 1940-е годы – Дж. Фон Нейман – моделирование траекторий нейтронов
- 1949 год – систематизация Н. Метрополисом и С.Уламом, решение линейных интегральных уравнений (статья «Метод Монте-Карло»)

- В 1950-х годах метод использовался для расчётов при разработке водородной бомбы. Основные заслуги в развитии метода в это время принадлежат сотрудникам лабораторий ВВС США.
- В 1970-х годах в новой области математики — теории вычислительной сложности было показано, что существует класс задач, сложность (количество вычислений, необходимых для получения точного ответа) которых растёт с размерностью задачи экспоненциально.
- В настоящее время основные усилия исследователей направлены на создание эффективных Монте-Карло алгоритмов различных физических, химических и социальных процессов для параллельных вычислительных систем.

- **Основная идея** методов состоит в создании определенной последовательности псевдослучайных чисел, моделирующих тот или иной эффект.
- Для решения задачи по **методам Монте-Карло** прежде всего строят *вероятностную модель*, представляют *искомую величину*, например многомерный интеграл, в виде *математического ожидания функционала от случайного процесса*, который затем моделируется на компьютере. В результате проведения вычислительного эксперимента получают нужную выборку и результаты всех испытаний усредняют.

- **Моделирование случайных величин с заданными распределениями** осуществляется путём преобразования одного или нескольких независимых значений случайного числа a , распределённого равномерно в интервале $(0,1)$. Последовательности «выборочных» значений a обычно получают на компьютере с помощью теоретико-числовых алгоритмов. Такие числа называются **«псевдослучайными»**
- **Генератор псевдослучайных чисел** (ГПСЧ, PRNG) — алгоритм, генерирующий последовательность чисел, элементы которой почти независимы друг от друга и подчиняются заданному распределению.

Общая схема метода Монте-Карло основана на Центральной предельной теореме теории вероятности, утверждающей, что случайная величина $Y = \sum_{i=1}^N X_i$, равная сумме большого

количества N произвольных случайных величин X_i с одинаковыми математическими ожиданиями m и дисперсиями σ^2 , всегда распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $N \cdot m$ и дисперсией $N \cdot \sigma^2$.

Общие свойства методов:

- абсолютная сходимость к решению,
- *тяжёлая* зависимость погрешности от числа испытаний (для уменьшения погрешности на порядок, необходимо увеличить количество испытаний на два порядка);
- основным методом уменьшения погрешности является максимальное уменьшение дисперсии, другими словами, максимально приблизить плотность вероятности $p(x)$ случайной величины к математической формулировке задачи или физике моделируемого явления;
- простая структура вычислительного алгоритма (N раз повторяющиеся одностипные вычисления реализаций случайной величины);
- конструкция случайной величины может основываться на физической природе процесса и не требовать обязательной, как в регулярных методах, формулировки уравнения, что для современных проблем становится всё более актуальным.

- В демографии все большее распространение получают **имитационные модели**, представляющие собой стохастические дискретные микромодели, в которых изменение демографического состояния индивида или другие демографические единицы моделируется методом статистических испытаний - **методом Монте-Карло**
- **Имитационные модели** позволяют лучше учесть причинно-следственной связи, возникающие в демографическом процессе, включить в рассмотрение большое число поведенческих факторов, которые нельзя учесть в макромоделях
- **Имитационные модели** призваны решать ту же задачу, что и поиск значений демометрических функций - описать общую закономерность изменения интенсивности демографических событий с возрастом

- **Имитационная модель** брачной рождаемости выделяет, например, такие события, как вступление в брак (с этого начинается функционирование модели), зачатие, с учётом его желательности для семьи и используемой контрацепции, вынашивание, рождение живого или мёртвого ребёнка, период послеродовой стерильности и т. д.
- Вероятности и их распределения могут рассматриваться как функции социальных, экономических и других переменных. После описания модели жизнь индивида или семьи прослеживается от начала до конца, причём событие принимается наступившим или не наступившим в зависимости от значений случайных чисел, вырабатываемых с помощью спец. датчика на каждом шагу имитации. Время в **имитационных моделях** меняется, как правило, с небольшим шагом - порядка одного месяца, а для получения содержательного результата надо проследить жизнь тысяч или десятков тысяч индивидов.

Список литературы

1. **Белоцерковский О.М., Хлопков Ю.И.** *«Методы Монте-Карло в прикладной математике и вычислительной аэродинамике»*
2. **Кирьянов Д.В. , Кирьянова Е.Н.** *«Вычислительная физика»* – М.: Полибук Мультимедиа, 2006. – 352 с.
3. **Эдиев Д.М.** *“Концепция демографического потенциала и ее приложения”*, Матем. моделирование, 15:12 (2003), 37–74
4. **www.wikipedia.org**