

Лекция

Логика предикатов

- Логика высказываний оперирует простейшими высказываниями, которые могут быть или истинными, или ложными.
- В разговорном языке встречаются более сложные повествовательные предложения, истинность которых может меняться при изменении объектов, о которых идет речь.

- В логике такие предложения, истинность которых зависит от параметров, обозначают с помощью предикатов.
- "Предикат" с английского переводится как сказуемое.

Определение предиката

- Формально **предикат** - функция, аргументами которой могут быть ПРОИЗВОЛЬНЫЕ ОБ'ЕКТЫ из некоторого множества, а значения функции "истина" или "ложь".
- Предикат можно рассматривать как расширение понятия высказывания.

Пример

- "Маша любит кашу"
- "Даша любит кашу"
- "Саша любит кашу«

- **предикат** "Икс любит кашу"
- и вместо неизвестного Икс могут быть либо Маша, либо Даша, либо Саша.

- Подстановка вместо Икс имени конкретного ребенка превращает предикат в обычное высказывание.

- **Определение**

Предикат - это высказывание-функция, значение

(истина/ложь)

которого зависит от параметров

□ Пример

$x \leq 2$ при $x = 1$ истина при $x = 3$ ложь.

- **Определение**

Одноместным предикатом $P(x)$ - произвольная функция переменного x , определенная на множестве M и принимающая значение из множества $\{1; 0\}$.

"ВСЕ любят Игрека" - одноместный предикат.

Замечание

Высказывания – это 0(нуль)-местный предикат,
булева функция – n -местный предикат.

"ВСЕ любят КОЙ-КОГО [некоторого]" - нульместный предикат, то есть высказывание.

- **Определение**

Двухместный предикат $P(x,y)$ - функция двух переменных x и y , определенная на множестве $M=M_1 \times M_2$ и принимающая значения из множества $\{1;0\}$.

Пример

$Q(x, y)$ – “ $x=y$ ” - предикат равенства на множестве $R \times R = R^2$

"Икс любит Игрека" -двухместный предикат.

- **Определение**

n-местный предикат - это функция определенная на наборах длины n элементов некоторого множества M, принимающая значения в области True, False.

Множество M называется *предметной областью предиката*,

а x_1, x_2, \dots, x_n – *предметными переменными*

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \{ , \}$$

- **Определение.**

Предикат называется **ТОЖДЕСТВЕННО ИСТИННЫМ** (тождественно ложным), если на всех наборах своих переменных принимает значение 1 (0), **ВЫПОЛНИМЫМ**, если на некотором наборе своих переменных принимает значение 1

□ Пример

$$P(x) = x \leq 2$$

$$\forall x \quad x \leq 2$$

ложь

$$P(x) = x \leq 2$$

$$\exists x \quad x \leq 2$$

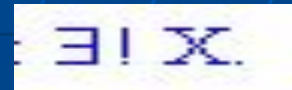
- истина

Логические операции над предикатами

Замечание

- Предикаты при подстановки переменных становятся высказываниями, поэтому с предикатами можно производить все логические операции
- Для предикатов справедливы логические операции и две новые операции, специфические.
 - - операциями **навешивания кванторов** или **операциями квантификации**.
 - Эти операции соответствуют фразам "для всех" - **квантор общности** и "некоторые" - квантор существования.

Выражение "существует точно одно X такое, что..." - **квантор существования и единственности**



Пример (Экзюпери)

- *"Ты любишь потому, что ты любишь."*
- *Не существует причин, чтобы любить."*
- МОЖНО записать в виде:

"Ты любишь потому, что ты любишь. Не существует причин, чтобы любить."

МОЖНО записать в виде:

$A \Rightarrow A \quad \exists B,$

где A - "ты любишь", B - "причины любви".

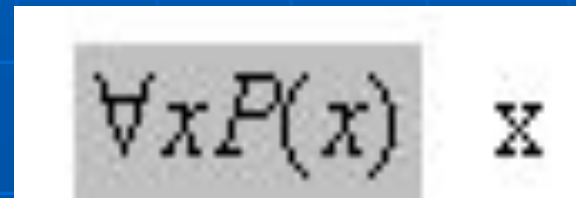
- **Определение**

Присоединение квантора с переменной к предикатной формуле называется *навешивание* квантора на переменную x .

Переменная при этом называется *связанной* и вместо нее подставлять константы уже нельзя.

- Если квантор навешивается на формулу с несколькими переменными, то он уменьшает число несвязанных переменных в этой формуле

- Переменную x в предикате $P(x)$ называют **свободной** (ей можно придавать различные значения из M),
- В высказывании же x называют **связанной** квантором всеобщности.



The diagram consists of a white rectangular box. Inside the box, on the left, is a grey rectangular area containing the mathematical expression $\forall x P(x)$. To the right of this grey area, within the white box, is the variable x .

- Переменная , на которую навешивается квантор называется **связанной**.
- Выражение, на которое навешивается квантор, называется **областью действия квантора**

✚ Пример

$\forall x P(x)$ - « из всякого положения есть выход»

$\exists x \overline{P(x)}$ - « существуют безвыходные положения»

Пример

- Предикат "ВСЕ любят кашу":
- Возьмем отрицание
- "НЕ ВЕРНО, что ВСЕ любят кашу".
- Это равносильно (по закону Де Моргана!) заявлению:
- "НЕКОТОРЫЕ НЕ любят кашу."

- отрицание "задвинули" за квантор, в результате чего квантор сменился на противоположный

$$\overline{\forall x P(x)} \equiv \exists x \overline{P(x)}$$

- Кванторы общности и существования называются **двойственными** относительно друг друга.
- Вот некоторые "классические примеры" несоответствия языка предикатов и естественного языка

Пример

- предикат
- "Собакам и кошкам вход воспрещен".
- "ДЛЯ ВСЕХ иксов справедливо:
- ЕСЛИ икс - собака И икс - кошка, ТО иксу вход запрещен"
- Ясно что таких иксов, которые бы были одновременно собакой и кошкой не существует! Как, впрочем, и таких играков.
- Поэтому ЕСЛИ икс - собака ИЛИ икс - кошка, ТО иксу вход запрещен"

➤ **Определение.** Выражение вида $\forall x p(x)$ на множестве M представляет собой **истинное высказывание**, тогда и только тогда, когда $p(x)$ истинно для любого элемента $x \in M$

➤ **Определение.** Выражение $\exists x p(x)$ на множестве M представляет собой истинное высказывание, тогда и только тогда, когда $p(x)$ - истинно хотя бы для одного элемента из этого множества.

Пример

$P(x, y)$ - « x любит y » - двуместный предикат.

$\forall x \exists y$ - « для любого человека существует y – человек, которого он любит»

$\forall y \exists x$ - « для любого человека существует x – человек, которого он любит»

$\exists y \forall x$ « существует человек, которого любят все»

$\exists x \forall y$ « существует человек, который любит всех»

$\forall x \forall y$ все люди любят всех людей»

$\exists y \exists x$ существует человек, который кого-то любит»

Свойства кванторов

- 1. **Коммутативность
в одноименных
кванторов**

$$\forall x \forall y P(x, y) = \forall y \forall x P(x, y)$$

$$\exists x \exists y P(x, y) = \exists y \exists x P(x, y)$$

- 2.

$$\exists x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall y \exists x P(x, y)$$

$$\exists y \forall x P(x, y) \rightarrow \forall x \exists y P(x, y)$$

Перестановка кванторов общности и существования меняет смысл.

Основные законы, содержащие кванторы

$$\left. \begin{aligned} \forall x \forall y P(x, y) &\equiv \forall y \forall x P(x, y) \\ \exists x \exists y P(x, y) &\equiv \exists y \exists x P(x, y) \end{aligned} \right\} - \text{коммутация одноименных кванторов}$$

$$\left. \begin{aligned} \forall x (P(x) \wedge Q(x)) &\equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \\ \exists x (P(x) \vee Q(x)) &\equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \end{aligned} \right\} - \text{дистрибутивные законы для кванторов}$$

$$\left. \begin{aligned} \forall x (P(x) \vee Q(y)) &\equiv \forall x P(x) \vee \forall x Q(y) \\ \exists x (P(x) \wedge Q(y)) &\equiv \exists x P(x) \wedge \exists x Q(y) \end{aligned} \right\} - \text{законы ограничения действия кванторов}$$

$$\exists y \forall x P(x, y) \rightarrow \forall x \exists y P(x, y) \equiv 1$$

Равносильные формулы логики предикатов

- **Определение**
- Две формулы логики предикатов A и B называются **равносильными** на области M , если они принимают одинаковые логические значения при всех значениях входящих в них переменных, отнесенных к области M .

Правила переноса кванторов через отрицание или законы де Моргана для кванторов

- Пусть $A(x)$ и $B(x)$ – переменные предикаты, а C – переменное высказывание (или формула, не содержащая x).
- Тогда имеют место равносильности

$$1. \overline{\forall x A(x)} \equiv \exists x \overline{A(x)}.$$

« не верно, что для любого x $A(x)$ истинно» эквивалентно «найдется x , для которого $A(x)$ ложно»

Правила переноса кванторов через отрицание или законы де Моргана для кванторов

$$2. \overline{\exists x A(x)} \equiv \forall x \overline{A(x)}.$$

Равносильность 2 означает тот простой факт, что, если не существует x , при котором истинно $A(x)$, то для всех x будет истинной $\overline{A(x)}$.

$$3. \quad \forall x A(x) \equiv \overline{\overline{\exists x A(x)}}.$$

$$4. \quad \exists x A(x) \equiv \overline{\overline{\forall x A(x)}}.$$

- «квантор можно вносить и выносить за скобки в конъюнкции»

$$\forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \equiv \forall x [A(x) \wedge B(x)]$$

- постоянное высказывание можно вносить под знак квантора всеобщности и выносить из под знака в конъюнкции, дизъюнкции и импликации

$$6. \quad C \wedge \forall x B(x) \equiv \forall x [C \wedge B(x)].$$

$$7. \quad C \vee \forall x B(x) \equiv \forall x [C \vee B(x)]$$

$$8. \quad C \rightarrow \forall x B(x) \equiv \forall x [C \rightarrow B(x)]$$

$$9. \quad \forall x [B(x) \rightarrow C] \equiv \exists x B(x) \rightarrow C.$$

- квантор существования можно вносить и выносить за скобки в дизъюнкции»

$$\exists x[A(x) \vee B(x)] \equiv \exists xA(x) \vee \exists xB(x).$$

11. $\exists x[C \vee B(x)] \equiv C \vee \exists xB(x).$

12. $\exists x[C \wedge B(x)] \equiv C \wedge \exists xB(x).$

13. $\exists xA(x) \wedge \exists yB(y) \equiv \exists x\exists y[A(x) \wedge B(y)].$

14. $\exists x[C \rightarrow B(x)] \equiv C \rightarrow \exists xB(x).$

15. $\exists x[B(x) \rightarrow C] \equiv \forall xB(x) \rightarrow C.$

Нормальные формы формул логики предикатов

- В логике предикатов формулы могут иметь нормальную форму.
- При этом, используя равносильности логики предикатов, каждую формулу логики предикатов можно привести к нормальной форме.
- В логике предикатов различают два вида нормальных форм: **приведенную и предваренную**

- Среди нормальных форм формул логики предикатов выделяют так называемую **предваренную** (префиксную) нормальную форму (ПНФ).
- В ней кванторные операции
- либо полностью отсутствуют,
- либо они используются после всех операций алгебры логики

Пример

Получили приведенную нормальную форму исходной формулы.

$$\begin{aligned} & \overset{18}{\overline{\overline{\overline{(\exists x P(x) \rightarrow \forall y Q(y)) \rightarrow R(z)}}}}} \equiv \overset{17}{\overline{\overline{\overline{\exists x P(x) \vee \forall y Q(y) \vee R(z)}}}}} \equiv \overset{131}{\overline{\overline{\overline{\exists x P(x) \wedge \forall y Q(y) \vee R(z)}}}}} \\ & \overset{131}{\equiv} \overline{\overline{\overline{\exists x P(x) \wedge \exists y \overline{Q(y)} \vee R(z)}}}} \end{aligned}$$

ПНФ имеет вид

$$(\sigma_{x_1})(\sigma_{x_2})\dots(\sigma_{x_m})A(x_1, x_2, \dots, x_m), n \leq m,$$

где под символом σ_{x_i} понимается один из кванторов $\forall x_i$ или $\exists x_i$, а формула A кванторов не содержит.

Алгоритм получения (приведения) ПНФ.

- Формула B называется **предваренной нормальной формой** формулы A , если она удовлетворяет ниже перечисленным требованиям:
 - 1. Формулы A и B равносильны.
 - 2. Формула B удовлетворяет следующим условиям:
 - а) используются логические операции \neg , \vee , $\&$, при этом отрицание применяется только в атомарных формулах;
 - б) операции кванторов следуют за операциями алгебры \neg , \vee , $\&$

- **Шаг 1.** Исключить связи эквивалентности (\sim) и импликации (\rightarrow).
- Формула $x \sim y$ заменяется на $(x \rightarrow y) \& (y \rightarrow x)$, а формула $A \rightarrow B$ заменяется на $(\bar{A} \vee B)$.
- **Шаг 2.** Переименовать, если необходимо, связанные переменные таким образом, чтобы никакая переменная не имела бы одновременно свободных и связанных вхождений. Это условие рассматривается и по отношению к подформулам.

- **Шаг 3.** Удалить те квантификации, область действия которых не содержит вхождений квантифицированной переменной.
- **Шаг 4.** Перенести отрицания внутри формулы в соответствии со следующими правилами:
- **Шаг 5.** Перенести все квантификации в начало формулы

$$\frac{A \rightarrow B, A}{B}; \quad \overline{\forall x A} \sim \exists x \overline{A}, \quad \overline{A \& B} \sim \overline{A} \& \overline{B}, \quad \overline{\overline{A}} \sim A.$$

✚ Пример. Найти ПНФ формулы $x \rightarrow (y \rightarrow xy)$.

Решение.

Шаг 1: $\forall x(P(x) \& \forall y \exists x(\overline{Q}(x,y) \vee \forall z R(a,x,y)))$

Шаг 2: $\forall x(P(x) \& \forall y \exists u(\overline{Q}(u,y) \vee \forall z R(a,u,y)))$

Шаг 3: $\forall x(P(x) \& \forall y \exists x(\overline{Q}(x,y) \vee R(a,x,y)))$

Шаг 4: $\forall x(P(x) \& \forall y \exists x(Q(x,y) \vee R(a,x,y)))$

Шаг 5: $\forall x \forall y (p(x) \& \exists u(Q(u,y) \vee R(a,u,y)))$.

$\forall x \forall y \exists u (P(x) \& (Q(u,y) \vee R(a,u,y)))$.

Скулемовские функции

- Приведение формулы ЛП к сколемовской форме (сколемизация) призвано обеспечить дальнейшее упрощение логических представлений и облегчить введение процедур машинной обработки в ЛП.
- Отправной точкой сколемизации является предваренная нормальная форма, матрица которой приведена к конъюнктивной нормальной форме (КНФ).
- **Цель сколемизации** - исключение \exists -квантификаций

Алгоритм получения сколемовской формы

- 1) сопоставить каждой \exists -квантифицированной переменной список \forall -квантифицированных переменных, предшествующих ей,
- 2) а также некоторую еще не использованную функциональную константу, число мест, у которой равно мощности списка.
- 3) Данная константа будет представлять сколемовскую функцию;

- 4) в матрице формулы заменить каждое вхождение каждой \exists -квантифицированной переменной на некоторый терм.

Этот терм является функциональной константой, соответствующей данной переменной и снабженной списком аргументов, также соответствующим той же самой переменной;

- 5) устранить из формулы все \exists - квантификации.

- **Клаузальная** форма -сколемовская форма, матрица которой приведена к КНФ.
- Любая сколемовская форма допускает эквивалентную клаузальную форму.

→ Пример: ¶

$$\exists x \forall y P(x, y) \vee \overline{\forall x \exists y Q(x, y)} \equiv \exists x \forall y P(x, y) \vee \exists x \forall y \overline{Q(x, y)} \stackrel{36}{=} \exists x [\forall y P(x, y) \vee \forall y \overline{Q(x, y)}] \equiv \mid \cdot$$

обозначим в предикате Q переменную y через z ¶

$$\equiv \exists x [\forall y P(x, y) \vee \forall z \overline{Q(x, z)}] \stackrel{53}{=} \exists x \forall y \forall z (P(x, y) \vee \overline{Q(x, z)}) \quad ¶$$