Производная в технике

Использование в технике

Производная помогает получить для нужд техники очень простые и удобные для вычислений формулы. Этому служит известная приближенная формула:

$$\boxed{f(x_0+h)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot h,\quad (f'(x_0)\neq 0)}$$

(1)

$$\boxed{\sqrt{1+h}\approx 1+\frac{1}{2}h}$$

(2)

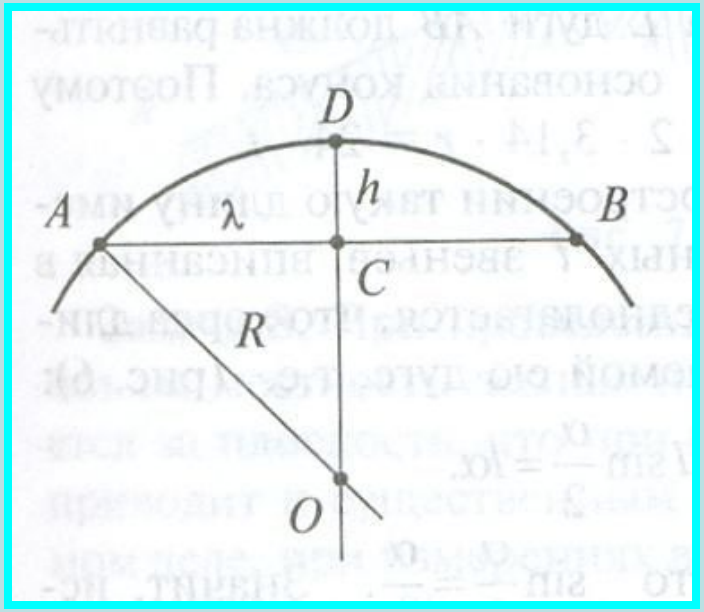
$$\boxed{(1+h)^2\approx 1+h}$$

(3)

$$\boxed{\sin h\approx h,\ \text{где } h \text{ близко к нулю.}}$$

Примеры из реальной производственной практики

Рельсовая нить, уложенная на железнодорожном повороте радиуса R,
в процессе эксплуатации может изменить свое положение.
Поэтому необходимо производить проверку правильности ее формы.
Для этого с помощью специального прибора измеряют стрелку CD
сегмента круга, стягиваемого хордой AB длиной
и сравнивают ее с проектной величиной.
Вывести формулу для h.



$$h = OD - OC = R - \sqrt{R^2 - \lambda^2}.$$

Эта формула сложна для полевых вычислений. Так как величина λ в десятки раз меньше величины R, то $\frac{\lambda}{R}$ близко к нулю. Преобразуем полученную формулу:

$$h = R - R\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{R}\right)^2}.$$

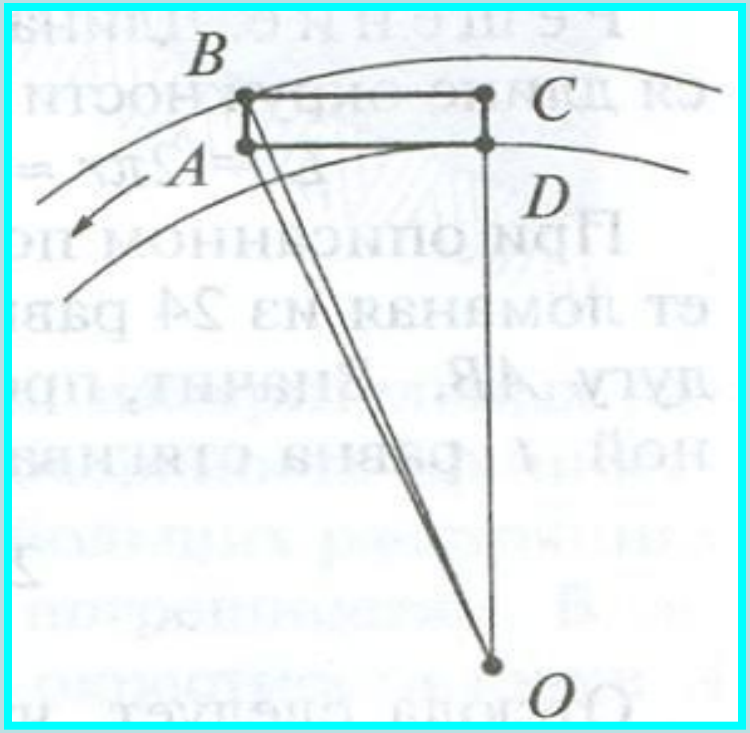
Теперь можно воспользоваться приближенной формулой (2). Получим:

$$h \approx \frac{\lambda^2}{2R}.$$

Стандартное значение $\lambda = 10$ м, $R > 100$ м. С помощью более тонких методов математического анализа можно доказать, что в таком случае допускаемая абсолютная погрешность не превосходит 1,5 мм. Вот сколь точна полученная приближенная формула.

Примеры из реальной производственной практики

Показать, что автомобиль, проходящий поворот, занимает на проезжей части большую ширину, чем на прямолинейном участке дороги. Найти необходимое уширение однополосной дороги на повороте радиуса *R* для автомобиля, продольная база (расстояние между передней и задней осями) которого равна *l* .

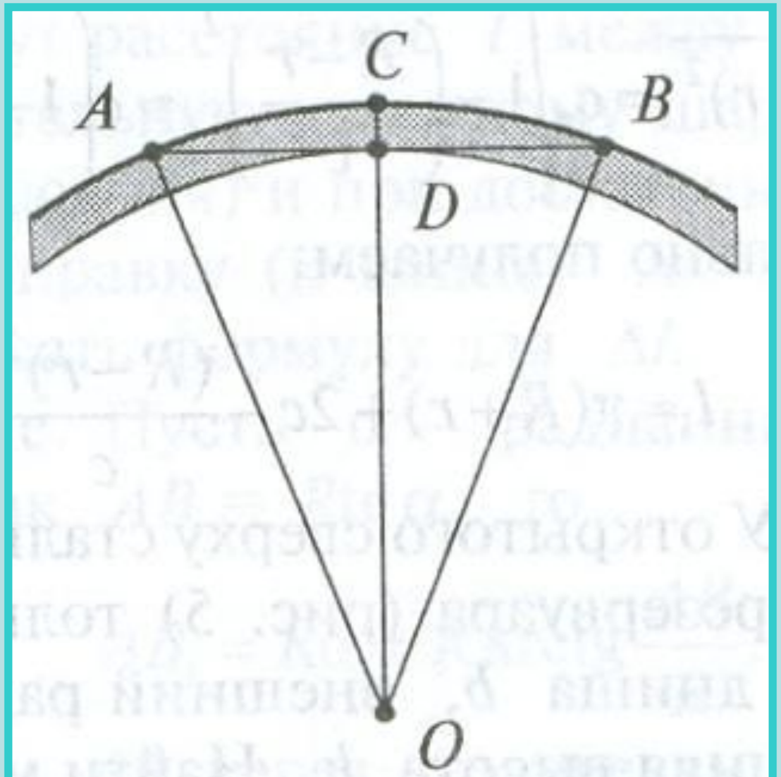


На повороте все четыре колеса автомобиля катятся по дугам концентрических окружностей с центром в некоторой точке О центр поворота), причем заднее левое колесо D описывает окружность наименьшего, а переднее правое В – наибольшего радиуса. Поэтому ширина дорожной полосы на повороте должна равняться ОВ – OD. Необходимая ширина прямолинейной полосы равна ОС – OD. Так как, очевидно, ОВ>ОС, то дорога на повороте должна быть шире. Искомое уширение h = (OB – OD) – (OC – OD) = OB – OC. Поскольку радиус поворота во много раз больше ширины дороги, число R можно считать радиусом окружности качения любого из четырех колес. Пусть R = OB. В таком случае нам нужно найти стрелку сегмента круга радиуса R по величине 2l, стягивающей этот сегмент хорды.

Ответ: $h = \dfrac{l^2}{2R}$

Примеры из реальной производственной практики

Для того, чтобы водитель на повороте видел дорогу на безопасном расстоянии *s* (оно определяется длиной тормозного пути), у внутренней стороны поворота должна быть полоса (*зона видимости*), свободная от всяких препятствий видимости. Определить ширину зоны видимости вдоль поворота радиуса *R*.



Решение.

В данном случае ширина дороги значения не имеет.

Дорогу принимаем за дугу окружности радиуса R.

Пусть автомобиль находится в точке A, а точка B

такова, что длина дуги AB равна s.

Требуется найти длину f стрелки CD сегмента круга.

Если радианная мера центрального угла AOB равна α,

то s = Rα, а значит, $\alpha = \frac{s}{R},\ f(s) = OC - OD =$

$$= R\left(1 - \cos\frac{s}{2R}\right) == 2R\sin^2\frac{s}{2R} \Rightarrow$$

$$f \approx \frac{s^2}{8R}$$

Примеры из реальной производственной практики

В машинах и установках широко применяются *ременные передачи*. Поэтому представляют интерес формулы , позволяющие правильно подобрать ремни или определить расстояние между шкивами по известной длине стандартных ремней. Найти длину l ремня, туго натянутого на два шкива с радиусом r и R, если расстояние между шкивами равно c

Решение. Ремень сбегает с большего шкива и набегает на меньший шкив по касательным к окружностям шкивов. Пусть α – радианная мера равных углов COB и TDF. Тогда

$$\cup AB = R\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right), \quad \cup FE = r\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).$$

$$BF = LD = \sqrt{c^2-(R-r)^2}.$$

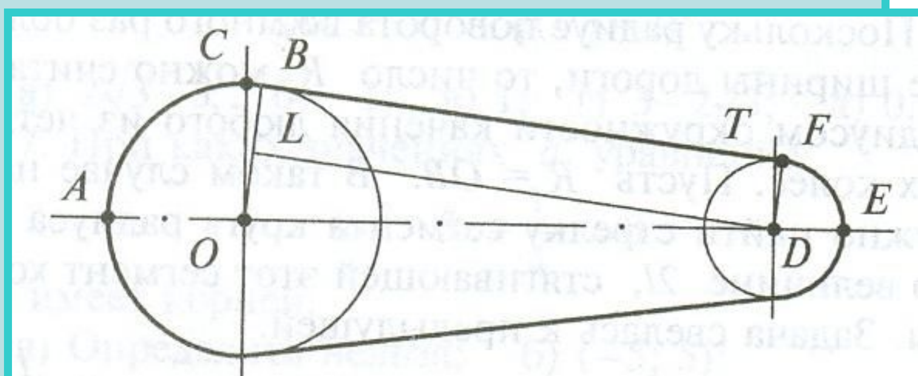
Так как на практике величина $R-r$ очень мала по сравнению с c, то можно воспользоваться последовательно приближенными формулами

$$\alpha \approx \sin\alpha = \frac{R-r}{c},$$

$$\sqrt{c^2-(R-r)^2} = c\sqrt{1-\left(\frac{R-r}{c}\right)^2} \approx c\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{R-r}{c}\right)^2\right).$$

Окончательно получаем:

$$l \approx \pi(R+r)+2c-\frac{(R-r)^2}{c}.$$



Примеры из реальной производственной практики

У открытого сверху стального резервуара толщина стенки *a*, толщина днища *b*, внешний радиус основания *r*, внешняя высота *h*. Найти массу пустого резервуара, если плотность металла *p*.

Решение. Объем стенки V находится следующим образом:

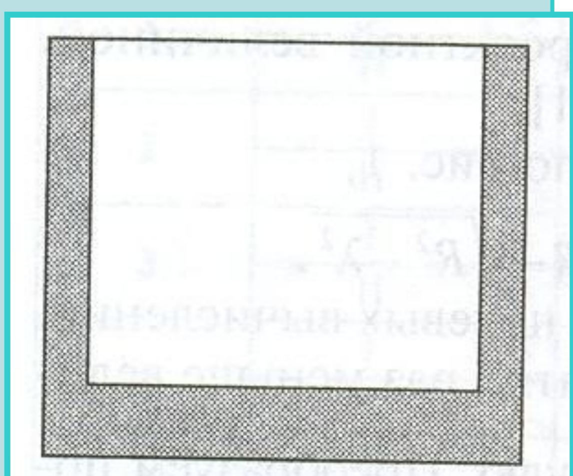
$$V = \pi h((r^2 - (r-a)^2).$$

Так как a очень мало по сравнению с r, то полученную формулу можно упростить с помощью формулы (3). Имеем:

$$(r-a)^2 = r^2\left(1-\frac{a}{r}\right)^2 \approx r^2\left(1-\frac{2a}{r}\right) = r^2 - 2ar,\ V \approx 2\pi ahr.$$

В таком случае масса резервуара

$$M \approx 2\pi\, aprh + \pi\, pbr^2.$$



Примеры из реальной производственной практики

Ломаная AOB изображает продольный профиль автомобильной дороги с углом перелома α ($\alpha = \pi - \angle AOB$). Хорошо известно, что на такой дороге сильно ограничена видимость встречного транспорта. При проектировании дорог рассчитывают так называемое *расстояние видимости* встречных легковых автомобилей на данном участке дороги в зависимости от величины угла COC', где C' – положение глаз водителя. Найти этот расстояние.

Р е ш е н и е. Момент начала видимости встречной машины характеризуется ее расположением в такой точке D, что линия $C'OD'$ представляет собой прямую (D' – положение глаз водителя). Угол BOP для водителя C' – слепая зона.

Пусть $\angle COC' = x$, $CC' = DD' = d$ (для легковых автомобилей полагают $d = 1{,}2$ м). Тогда

$$r(x) = OC + OD = \frac{d}{\operatorname{tg} x} + \frac{d}{\operatorname{tg}(\alpha - x)}.$$

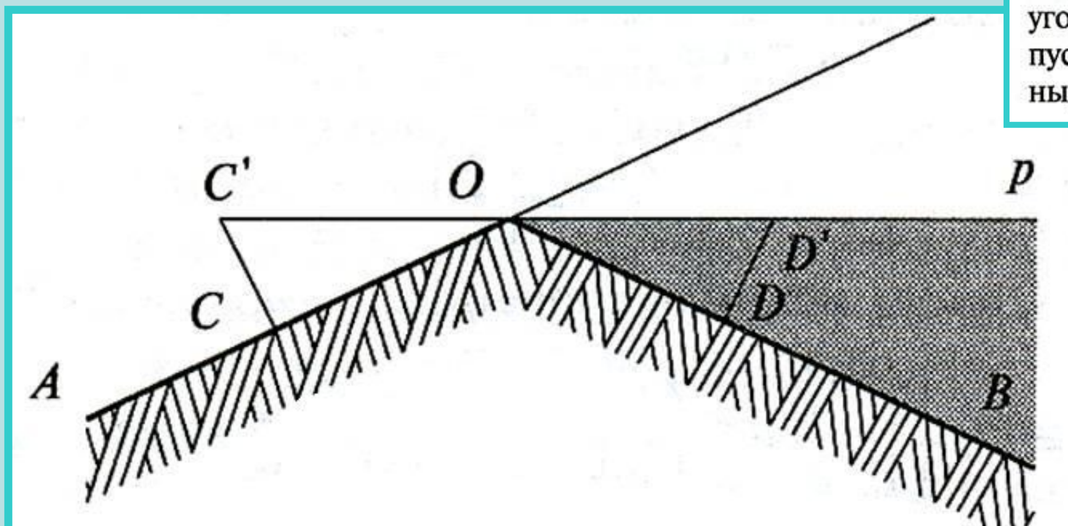
Так как углы x и $\alpha - x$ очень малы, то по формуле (1):

$$\operatorname{tg} x \approx x, \quad \operatorname{tg}(\alpha - x) \approx \alpha - x$$

(α и x – радианные меры углов). Поэтому

$$r(x) \approx \frac{d}{x} + \frac{d}{\alpha - x}.$$

Если рассчитанный для практикуемой дороги угол перелома профиля таков, что r меньше допустимой (для данной категории дороги) величины, то профиль дороги скругляют, срыв вершину.



Примеры из реальной производственной практики

При проведении измерительных работ на местности земная поверхность принимается за плоскость, что при больших расстояниях приводит к существенным погрешностям. В самом деле, при измерениях в окрестности точки A точка B, принадлежащая рассматриваемой плоскости(касательной к земной поверхности в точке A), при таких расчетах имеет нулевую высоту, а на самом деле, высота точки B равна $\Delta h = BB_1$. Эта величина называется поправкой к высоте на кривизну Земли. Выразить поправку Δh через радиус Земли R и расстояние l между точками A и B_1 .

Решение. Пусть O – центр Земли, α – радианная мера угла AOB. Рассматривая прямоугольный треугольник OAB, находим, что

$$\Delta h = OB - OB_1 = R\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right) = R\left(\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} - 1\right).$$

С помощью формулы (4) далее получаем, что

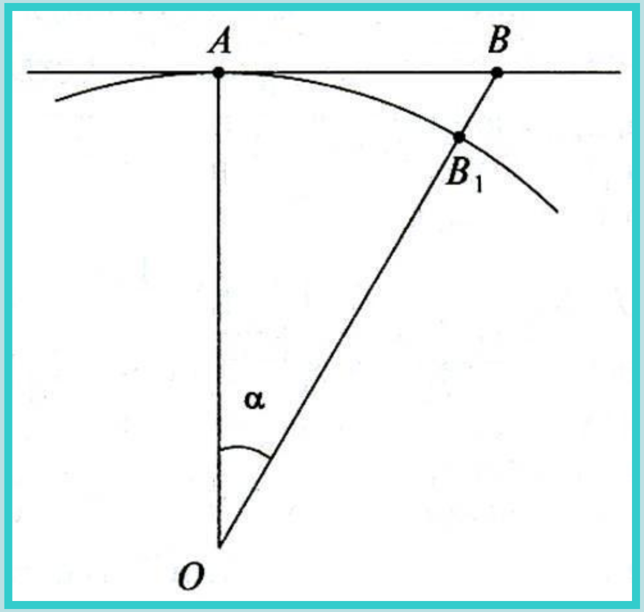
$$\Delta h \approx R\left(\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} - 1\right).$$

Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$. Записав для нее формулу (1) при $x_0 = 0$, получим:

$$\frac{1}{\sqrt{1-h}} \approx 1 + \frac{h}{2}; \quad \Delta h \approx \frac{R\alpha^2}{2}.$$

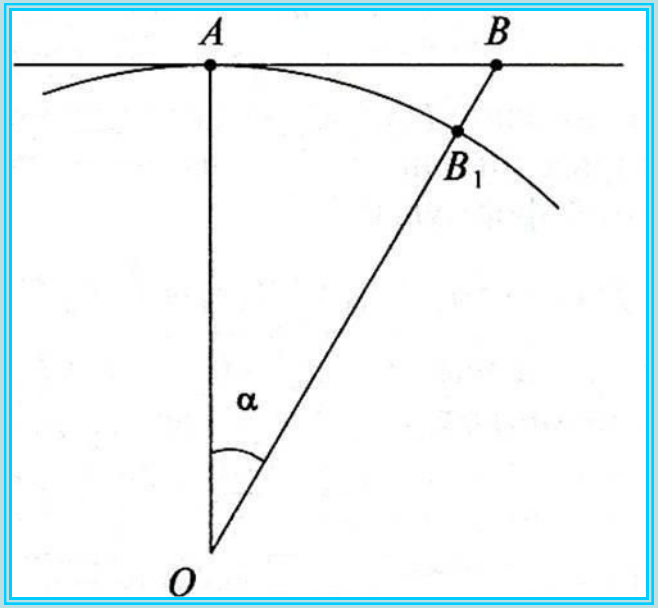
Выразив α из формулы $l = R\alpha$, окончательно находим, что

$$\Delta h \approx \frac{l^2}{2R}.$$



Примеры из реальной производственной практики

При топографических съемках окрестности точки A вместо истинного расстояния между точками земной поверхности A и B_1 берут расстояние l между их проекциями на касательную к земному шару плоскость (A – точка касания) и при достаточно большой l вводят поправку (к длине) Δl на кривизну Земли. Записать формулу для Δl.



Решение: Пусть α – радианная мера угла AOB.

Т.к. $AB = R\,\mathrm{tg}\alpha$, то $AB_1 = R\alpha = R\,\mathrm{arctg}\,\frac{AB}{R}$

Пусть AB = x .

Рассмотрим функцию $f(x) = \Delta l = AB - AB_1 =$

$x - R\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{R}$

Легко проверить, что $f'(0) = 0$.

Значит, формулой (1) пользоваться нельзя.

Однако имеется обобщение этой формулы:

В нашем случае при x0 = 0 и $h = l$ эта формула дает такой результат:

$$\Delta l \approx \frac{l^3}{3R^2},$$

Рекомендуемая литература

В.А. Петров «Производная на службе у техники», журнал «Математика в школе», №8, 2006

1. *Шахунянц Г.М.* Железнодорожный путь. – М., 1961.
2. *Славуцкий А.К.* Проектирование, строительство, содержание и ремонт сельскохозяйственных дорог. – М., 1972.
3. *Макиенко Н.И.* Слесарно-сборочные и ремонтные работы. – М., 1978.
4. *Лихтарников Я.М.* Вариативное проектирование и оптимизация стальных конструкций. – М., 1979.
5. *Белевич В.Б., Козловский А.С.* Технология кровельных работ. – М., 1977.
6. *Бируля А.К.* Проектирование автомобильных дорог. – М., 1961.
7. *Орлов П.М.* Курс геодезии. – М., 1962.