

Определение опорного плана транспортной задачи

Метод северо-западного угла

Метод минимального элемента

Метод аппроксимации Фогеля

Математическая дисциплина, занимающаяся изучением экстремальных (максимальных или минимальных) задач управления, планирования и разработкой методов их решения, получила название **математического программирования**.

Задачи управления и планирования возможно представить как выбор параметров и системы функций, например:

Требуется найти максимум функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

при условиях

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0,$$
$$x_j \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n},$$

Требуется найти максимум функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

при условиях

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, \\ x_j \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n},$$

Здесь f, g_i — функции,

x_1, x_2, \dots, x_n — параметры управления.

Выражение $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется **функцией цели**.

Условия представляют собой ограничения поставленной задачи.

транспортная задача

Цель - В МИНИМИЗАЦИИ ПОЛНОЙ СТОИМОСТИ перевозок известного количества товаров со складов к потребителю.

постановка транспортной задачи :

определение оптимального плана перевозок однородного груза

из m пунктов отправления A_1, A_2, \dots, A_m
в n пунктов назначения B_1, B_2, \dots, B_n .

в качестве критерия оптимальности обычно берется либо минимальная стоимость перевозок всего груза, либо минимальное время его доставки.

транспортная задача

определение оптимального плана перевозок груза
из m пунктов отправления A_1, A_2, \dots, A_m
в n пунктов назначения B_1, B_2, \dots, B_n .

**определение минимального значения целевой
функции стоимости перевозок**

Всякое неотрицательное решение систем линейных уравнений,
называется планом транспортной задачи.

План, при котором целевая функция принимает свое минимальное
значение, называется оптимальным планом транспортной задачи.

транспортная задача

определение оптимального плана перевозок груза
из m пунктов отправления A_1, A_2, \dots, A_m
в n пунктов назначения B_1, B_2, \dots, B_n .

Пункты отправления	Пункты назначения					Запасы
	B_1	...	B_j	...	B_n	
A_1	$c_{11} x_{11}$...	$c_{1j} x_{1j}$...	$c_{1n} x_{1n}$	a_1
...
A_i	$c_{i1} x_{i1}$...	$c_{ij} x_{ij}$...	$c_{in} x_{in}$	a_i
...
A_m	$c_{m1} x_{m1}$...	$c_{mj} x_{mj}$...	$c_{mn} x_{mn}$	a_m
Потребности	b_1	...	b_j	...	b_n	

транспортная задача

C_{ij} тарифы перевозок

X_{ij} количество груза

Пункты отправления	Пункты назначения					Запасы
	B_1	...	B_j	...	B_n	
A_1	$C_{11} x_{11}$...	$C_{1j} x_{1j}$...	$C_{1n} x_{1n}$	a_1
...
A_i	$C_{i1} x_{i1}$...	$C_{ij} x_{ij}$...	$C_{in} x_{in}$	a_i
...
A_m	$C_{m1} x_{m1}$...	$C_{mj} x_{mj}$...	$C_{mn} x_{mn}$	a_m
Потребности	b_1	...	b_j	...	b_n	

Определение оптимального плана транспортной задачи начинают с нахождения какого-нибудь ее **опорного плана**.

опорный план находят последовательно за $n+m-1$ шагов, на каждом из которых в таблице условий задачи заполняют одну клетку, которую называют занятой.

заполнение одной из клеток обеспечивает полностью либо удовлетворение потребности в грузе одного из пунктов назначения, либо вывоз груза из одного из пунктов отправления.

Опорный план является исходным условием для проверки последнего на оптимальность и нахождения **оптимального плана**.

Метод северо-западного угла

на каждом шаге рассматривают первый из оставшихся пунктов отправления и первый из оставшихся пунктов назначения.

- Заполнение клеток таблицы условий начинается с левой верхней клетки для неизвестного X_{11} (“северо-западный угол”)
- заканчивается для неизвестного X_{mn} , т. е. идет как бы по диагонали таблицы с севера на запад.

Пункты отправления	Пункты назначения					Запасы
	B_1	...	B_j	...	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	...	c_{1j} x_{1j}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
...
A_i	c_{i1} x_{i1}	...	c_{ij} x_{ij}	...	c_{in} x_{in}	a_i
...
A_m	c_{m1} x_{m1}	...	c_{mj} x_{mj}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребности	b_1	...	b_j	...	b_n	

Метод северо-западного угла

Задача 1. На три базы А1, А2, А3 поступил однородный груз в количествах, соответственно равных 140, 180 и 160 ед. Это груз требуется перевезти в пять пунктов назначения В1, В2, В3, В4, В5 соответственно в количествах 60, 70, 120, 130 и 100 ед. Тарифы перевозок единицы груза с каждого из пунктов отправления в соответствующие пункты назначения указаны в таблице:

Пункты отправления	Пункты назначения					Запасы
	В1	В2	В3	В4	В5	
А1	2	3	4	2	4	140
А2	8	4	1	4	1	180
А3	9	7	3	7	2	160
Потребности	60	70	120	130	100	480

Метод северо-западного угла

Решение.

пунктов отправления $m=3$, а число пунктов назначения $n=5$ $5+3-1=7$

Заполнение таблицы начнем с неизвестного x_{11} , т. е. попытаемся удовлетворить потребности первого пункта назначения за счет запасов первого пункта отправления. Так как запасы пункта A1 больше, чем потребности пункта B1, то полагаем $x_{11}=60$, записываем это значение в соответствующей клетке табл и временно исключаем из рассмотрения столбец B1, считая при этом запасы пункта A1 равными 80.

Пункты отправления	Пункты назначения					Запасы
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	2 60	3	4	2	4	140 - 60
A2	8	4	1	4	1	180
A3	9	7	3	7	2	160
Потребности	60 - 60	70	120	130	100	480

Метод северо-западного угла

Решение. первые из оставшихся пунктов отправления А1 и назначения В2. Запасы пункта А1 больше потребностей пункта В2. Положим $X_{12}=70$, запишем это значение в соответствующей клетке табл и временно исключим из рассмотрения столбец В2. В пункте А1 запасы считаем равными 10 ед.

Пункты отправления	Пункты назначения					Запасы
	В1	В2	В3	В4	В5	
А1	2 60	3 70	4	2	4	140 - 60 - 70
А2	8	4	1	4	1	180
А3	9	7	3	7	2	160
Потребности	60 - 60	70 - 70	120	130	100	480

Метод северо-западного угла

Решение. Снова рассмотрим первые из оставшихся пунктов отправления А1 и назначения В3. Потребности пункта В3 больше оставшихся запасов пункта А1. Положим $X_{13}=10$ **и исключим из рассмотрения строку А1.** Значение $X_{13}=10$ запишем в соответствующую клетку табл и считаем потребности пункта В3 равными 110 ед.

Пункты отправления	Пункты назначения					Запасы
	В1	В2	В3	В4	В5	
А1	2 60	3 70	4 10	2	4	140 -60 -70 -10
А2	8	4	1	4	1	180
А3	9	7	3	7	2	160
Потребности	60 -60	70 -70	120 -10	130	100	480

Метод северо-западного угла

Решение. Теперь перейдем к заполнению клетки для неизвестного x_{23} и т. д.

Через шесть шагов остается один пункт отправления A_3 с запасом груза 100 ед. и один пункт назначения B_5 с потребностью 100 ед.

Соответственно имеется одна свободная клетка, которую и заполняем, полагая $x_{35}=100$. В результате получаем опорный план

Пункты отправления	Пункты назначения					Запасы
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	2 60	3 70	4 10	2	4	140 -60 -70 -10
A2	8	4	1	4	1	180
A3	9	7	3	7	2	160
Потребности	60 -60	70 -70	120 -10	130	100	480

Метод северо-западного угла

Решение. В результате получаем опорный план

$$X = \begin{bmatrix} 60 & 70 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 110 & 70 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 & 100 \end{bmatrix}$$

Пункты отправления	Пункты назначения					Запасы
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	2 60	3 70	4 10	2	4	140
A2	8	4	1 110	4 70	1	180
A3	9	7	3	7 60	2 100	160
Потребности	60	70	120	130	100	480

Метод северо-западного угла

$$X = \begin{bmatrix} 60 & 70 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 110 & 70 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 & 100 \end{bmatrix}$$

Пункты отправления	Пункты назначения					Запасы
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	2 60	3 70	4 10	2	4	140
A2	8	4	1 110	4 70	1	180
A3	9	7	3	7 60	2 100	160
Потребности	60	70	120	130	100	480

общая стоимость перевозок всего груза

$$S = 2 * 60 + 3 * 70 + 4 * 10 + 1 * 110 + 4 * 70 + 7 * 60 + 2 * 100 = 1380$$

Метод минимального элемента

Очевидно, выбор пунктов назначения и отправления целесообразно производить, ориентируясь на тарифы перевозок, а именно:

на каждом шаге следует выбирать какую-нибудь клетку, отвечающую минимальному тарифу (если таких клеток несколько, то следует выбирать любую из них), и рассмотреть пункты назначения и отправления, соответствующие выбранной клетке.

Сущность метода минимального элемента и состоит в выборе клетки с минимальным тарифом.

Этот метод, как правило, позволяет найти опорный план транспортной задачи, при котором общая стоимость перевозок груза меньше, чем общая стоимость перевозок при плане, найденном для данной задачи с помощью метода северо-западного угла.

Поэтому наиболее целесообразно опорный план транспортной задачи находить методом минимального элемента.

Метод минимального элемента

Задача 2

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B1	B2	B3	B4	
A1	7	8	1	2	160
A2	4	5	9	8	140
A3	9	2	3	6	170
Потребности	120	50	190	110	470

Метод минимального элемента

Решение. Минимальный тариф равный 1, находится в клетке для переменной x_{13} . Положим $x_{13}=160$, запишем это значение в соответствующую клетку таблицы и временно исключим из рассмотрения строку A1. Потребности пункта назначения B3 читаем равными 30.

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B1	B2	B3	B4	
A1	7	8	1 160	2	160 - 160
A2	4	5	9	8	140
A3	9	2	3	6	170
Потребности	120	50	190 - 160	110	470

Метод минимального элемента

Решение. В оставшейся части таблицы с двумя строками A2 и A3 и четырьмя столбцами B1, B2, B3 и B4 клетка с наименьшим тарифом находится на пересечении строки A3 и столбца B2, где $C_{32}=2$. Положим $X_{32}=50$ и внесем это значение в соответствующую клетку.

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B1	B2	B3	B4	
A1	7	8	1 160	2	160 - 160
A2	4	5	9	8	140
A3	9	2 50	3	6	170 - 50
Потребности	120	50 - 50	190 - 160	110	470

Метод минимального элемента

Решение. Временно исключим из рассмотрения столбец В2 и будем считать запасы пункта А3 равными 120.

После этого рассмотрим оставшуюся часть таблицы с двумя строками А2 и А3 и тремя столбцами В1, В3 и В4. В ней минимальный тариф находится в клетке на пересечении строки А3 и столбца В3 и равен 3. Заполним описанным выше способом эту клетку

и аналогично заполним клетки, находящиеся на пересечении строки А2 и столбца В1, строки А3 и столбца В4, строки А2 и столбца В4. В результате получим опорный план.

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 160 & 0 \\ 120 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 50 & 30 & 90 \end{bmatrix}$$

При данном плане перевозок общая стоимость перевозок составляет.

$$S = 1 \cdot 160 + 4 \cdot 120 + 8 \cdot 20 + 2 \cdot 50 + 3 \cdot 30 + 6 \cdot 90 = 1530$$

Метод аппроксимации Фогеля

на каждой итерации по всем столбцам и по всем строкам находят разность между двумя записанными в них минимальными тарифами.

разности записывают в специально отведенных для этого строке и столбце в таблице условий задачи.

Среди разностей выбирают максимальную.

В строке (или столбце), которой данная разность соответствует, определяют минимальный тариф. Клетку, в которой он записан, заполняют на данной итерации.

Если минимальный тариф одинаков для нескольких клеток данной строки (столбца), то для заполнения выбирают ту клетку, которая расположена в столбце (строке), соответствующем наибольшей разности между двумя минимальными тарифами, находящимися в данном столбце (строке).

Метод аппроксимации Фогеля

Для каждой строки и столбца таблицы условий найдем разности между двумя минимальными тарифами, записанными в данной строке или столбце, и поместим их в соответствующем дополнительном столбце или строке. Так в строке А2 минимальный тариф равен 4, а следующий за ним равен 5, разность между ними $5-4=1$. Точно так же разность между минимальными элементами в столбце В4 равна $6-2=4$.

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	В1	В2	В3	В4	
А1	7	8	1	2	160
А2	4	5	9	8	140
А3	9	2	3	6	170
Потребности	120	50	190	110	470

Метод аппроксимации Фогеля

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы	Разности по строкам					
	B1	B2	B3	B4							
A1	7 120	8 50	1 50	2 110	160	1	6	-	-	-	-
A2	4 120	5 20	9	8	140	1	1	1	1	1	0
A3	9	2 30	3 140	6	170	1	1	1	7	-	-
Потребности	120	50	190	110	470						
Разности по столбцам	3	3	2	4							
	3	3	2	-							
	5	3	6	-							
	5	3	-	-							
	0	0	-	-							
	-	0	-	-							

Метод аппроксимации Фогеля Пункты отправления	Циклы назначения				Запасы	Разности по строкам					
	B1	B2	B3	B4							
A1	7	8	1	2 110	160 -110	1					
A2	4	5	9	8	140	1					
A3	9	2	3	6	170	1					
Потребности	120	50	190	110 -110	470						
	3	3	2	4							

Разности по столбцам

Вычислив все эти разности, видим, что наибольшая из них соответствует столбцу B4. В этом столбце минимальный тариф записан в клетке, находящейся на пересечении строки A1 и столбца B4. Таким образом эту клетку следует заполнить.. Заполнив ее, тем самым мы удовлетворим потребности пункта B4. Поэтому исключим из рассмотрения столбец B4 и будем считать запасы пункта A1 равными $160-110=50$

Метод аппроксимации Фогеля

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы	Разности по строкам					
	B1	B2	B3	B4							
A1	7 1	8 2	50 1	110 2	160	1	6	-	-	-	-
A2	4 120	5 20	9	8	140	1	1	1	1	1	0
A3	9	2 30	3 140	6	170	1	1	1	7	-	-
Потребности	120	50	190	110	470						
Разности по столбцам	3	3	2	4							
	3	3	2	-							
	5	3	6	-							
	5	3	-	-							
	0	0	-	-							

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 50 & 110 \\ 120 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 140 & 0 \end{bmatrix}$$

общая стоимость перевозок $S = 1 \cdot 50 + 2 \cdot 110 + 4 \cdot 120 + 5 \cdot 20 + 2 \cdot 30 + 3 \cdot 140 = 1330$.