Математические методы и модели организации операций

Задачи линейного программирования

Задачи линейного программирования

Пусть рассматривается процесс производства некоторых товаров, которые производятся из различного вида сырья, известны запасы сырья, стоимость товара, спрос на товары, а также любые другие ограничения связанные с:

- объемом производства;

- временем изготовления товара;

- ограничением по количеству рабочей силы.

Пусть стоимость каждого из вида товара известна. Требуется оптимизировать процесс производства с точки зрения максимизации или минимизации некоторой целевой функции, например максимизировать доход от продажи товаров или минимизировать затраты на производство товаров или минимизировать время изготовления товаров.

Пусть построена математическая модель для указанных выше условий, которая представляет собой систему линейных ограничений в виде неравенств и уравнений, а также линейную функцию, задающую условия нахождения максимума / минимума.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \ge b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$L(x) = C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n$$

$x_1 \ldots x_n$ *- объемы производства продукта 1,2,…,n, при котором достигается максимум или минимум целевой функции.*

Графический метод решения задачи линейного программирования

Фирма выпускает 2 вида мороженного: сливочное и шоколадное. Для изготовления мороженного используется 2 продукта: молоко и наполнители, расходы которых на 1 кг. мороженного и суточные запасы даны в таблице.

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на сливочное мороженое превышает спрос на шоколадное не более чем на 100 кг. Спрос на шоколадное мороженое не превышает 350 кг в сутки. Розничная цена 1 кг сливочного мороженого 16 р., шоколадного-14р. Какое количество мороженого каждого вида необходимо производить, чтобы доход от реализации был максимален?

Пусть - необходимое количество сливочного мороженого, - шоколадное.

L(x) = 16 x_1 +14 x_2 $\to$ max

	Расход на 1 кг		Запас (сутки) кг
	Сливочное	Шоколадное	
Молоко	0,8	0,5	400
Наполнители	0,4	0,8	365

$$\begin{cases} 0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 \le 400 \\ 0{,}4x_1 + 0{,}8x_2 \le 365 \\ x_1 - x_2 \le 100 \\ x_2 \le 350 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Алгоритм решения графическим методом

- *На плоскости и строим область допустимых решений удовлетворяющих системе ограничений.*
- *Строим вектор целевой функции, вектор перпендикулярный к целевой функции с координатами . Перемещаем целевую функцию в направлении вектора до пересечения с конечной точкой ОДР-точка max целевой функции, или с начальной точкой ОДР- точка min целевой функции.*
- *Искомая точка с координатами и находится как точка пересечения прямых в найденной вершине многоугольника.*

Экономический анализ с использованием графического метода

Существуют активные ограничения, приводящие к оптимальному решению, определяемые прямыми (1) и (2). Этим ограничениям соответствует строгое выполнение равенства, т.к. целевая функция проходит через прямые – точка С – продукты полностью используются, поэтому увеличить план производства возможно только за счет увеличения указанных запасов.

Для пассивных ограничений можно определить диапазон, при котором план будет оставаться оптимальным.

Рассмотрим ограничения (ЕД)

$-x_1 \quad x_2 \le 100$

С (312,5;300)

312,5-300=12,5 кг

$x_1 - x_2 = 12{,}5$ – прямая, проходящая через точку С, параллельно прямой (ЕД)

Если разница в спросах $x_1 - x_2$ будет меньше, чем 12,5 кг, то ограничение из пассивных перейдет в активное.

Точка А : $\begin{cases} x_2 = 350 \\ 0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 = 365 \end{cases}$

$x_1 = 212{,}5$, $x_1 = 281{,}25$

Перемещая (ограничения)прямую (2) до точки А найдем верхнюю границу ограничения по наполнителям 0,4*281,25+0,8*350=392,5

До 392,5 кг наполнителей решение будет оставаться оптимальным.

Изменение диапазона цен

Рассмотрим изменение цены на сливочное мороженое

α *(x) =* $C_1 x_1 + 14x_2$

Решение будет оставаться оптимальным до момента, когда угловой коэффициент целевой функции не совпадет с прямыми (1) и (2).

$x_2 = -\frac{C_1}{14} x_1 + \frac{9200}{14}$

(1) $x_2 = \frac{-0,8}{0,5} x_1 + \frac{400}{0,5}$

(2) $x_2 = \frac{-0,4}{0,8} x_{1'} + \frac{365}{0,8}$

$\frac{C_1}{14} = \frac{0,8}{0,5} \Rightarrow C_1 = 22,4$

$\frac{C_1}{14} = \frac{4}{8} \Rightarrow C_1 7$

Решение будет оставаться оптимальным при

$C_1 \in$ (7;22,4)

Список литературы

- *Шапкин. Математические модели исследования операций.*
- *Н.Ш. Кремер. Эконометрика.*
- *Красс. Основы математики и ее приложение в экономическом образовании.*
- *Чупрынов. Математические методы.*