# Не линейные модели парной регрессии

Лекция 5

13 февраля 2012 года

# Два класса нелинейных регрессии

- Нелинейные относительно включенных в анализ объясняющих переменных, но линейные по оцениваемым параметрам
- Нелинейные по оцениваемым параметрам

# Класс 1

- Полиномы разных степеней
  - парабола $y = a + bx + cx^2$.
- Равносторонняя гипербола
  - $y = a + b/x$
- Полулогарифимческая функция
  - $y = a + ln\ x$

# Равносторонняя гипербола

- Удельный расход сырья от объема выпускаемой продукции
- Времени обращения товара от величины товарооборота
- Процент прироста заработной платы от уровня безработицы
- и другие...

# Приведение к линейному уравнению

- Все уравнения класса 1 приводятся к линейному простой заменой объясняющих переменных:
  - парабола: $x_1 = x$, $x_2 = x^2$
  - гипербола: $z = 1/x$
  - логарифмическая: $z = \ln x$
- К линейной регрессии применяется МНК для оценки параметров.

# Класс 2

- Степенная
  - $y = a \cdot x^b$
- Показательная
  - $y = a \cdot b^x$
- Экспоненциальная
  - $y = e^{a+bx}$
- Логистическая
- Обратная

# Степенная функция

- $y = a \cdot x^b$
- $\ln y = \ln a + b \ln x$
- Это уравнение легко приводится к линейному
- $Y = \ln y$, $A = \ln a$, $X = \ln x$
- Параметр b в степенной функции является коэффициентом эластичности: на сколько изменится результат, если фактор изменится на 1%

# Эластичность

- $Э = f'(x) \cdot (x/y)$
- Средний коэффициент эластичности:

$$\overline{Э} = f'(\overline{x}) \cdot \frac{\overline{x}}{\overline{y}}$$

# Средний коэффициент эластичности

| Вид функции, $y$ | Первая производная, $y'$ | Средний коэффициент эластичности, $\overline{Э}$ |
|---|---|---|
| $y=a+b\cdot x+\varepsilon$ | $b$ | $\dfrac{b\cdot\overline{x}}{a+b\cdot\overline{x}}$ |
| $y=a+b\cdot x+c\cdot x^2+\varepsilon$ | $b+2\,c\cdot x$ | $\dfrac{(b+2\,c\cdot\overline{x})\overline{x}}{a+b\cdot\overline{x}+c\cdot\overline{x^2}}$ |
| $y=a+\dfrac{b}{x}+\varepsilon$ | $-\dfrac{b}{x^2}$ | $-\dfrac{b}{a\cdot\overline{x}+b}$ |
| $y=a\cdot x^b+\varepsilon$ | $a\cdot b\cdot x^{b-1}$ | $b$ |
| $y=a\cdot b^x+\varepsilon$ | $a\cdot\ln b\cdot x^{b-1}$ | $\overline{x}\cdot\ln b$ |
| $y=a+b\cdot\ln x+\varepsilon$ | $\dfrac{b}{x}$ | $\dfrac{b}{a+b\cdot\ln\overline{x}}$ |
| $y=\dfrac{a}{1+b\cdot e^{-c\,x}}+\varepsilon$ | $\dfrac{a\cdot b\cdot c\cdot e^{-c\,x}}{(1+b\cdot e^{-c\,x})^2}$ | $\dfrac{b\cdot c\cdot\overline{x}}{b+e^{c\,x}}$ |
| $y=\dfrac{1}{a+b\cdot x}+\varepsilon$ | $-\dfrac{b}{(a+b\cdot x)^2}$ | $-\dfrac{b\cdot\overline{x}}{a+b\cdot\overline{x}}$ |

# Индекс корреляции и детерминации

$$\rho_{xy} = \sqrt{1 - \frac{\sigma^2_{ост}}{\sigma^2_y}}, \sigma^2_y = \frac{1}{n}\sum(y - \overline{y})^{2,} \sigma^2_{ост} = \frac{1}{n}\sum(y - \hat{y}_x)^{2,}$$

$$\rho^2_{xy} = 1 - \frac{\sigma^2_{ост}}{\sigma^2_y} = \frac{\sigma^2_{объясн}}{\sigma^2_y}, \sigma^2_{объясн} = \frac{1}{n}\sum(\hat{y}_x - \overline{y})^2$$

$$F = \frac{\rho^2_{xy}}{1 - \rho^2_{xy}} \cdot \frac{n - m - 1}{m}$$