

Не линейные модели парной регрессии

Лекция 5

13 февраля 2012 года

Два класса нелинейных регрессии

- Нелинейные относительно включенных в анализ объясняющих переменных, но линейные по оцениваемым параметрам
- Нелинейные по оцениваемым параметрам

Класс 1

- Полиномы разных степеней
 - парабола $y = a + bx + cx^2$.
- Равносторонняя гиперболоа
 - $y = a + b/x$
- Полулогарифмическая функция
 - $y = a + \ln x$

Равносторонняя гиперболола

- Удельный расход сырья от объема выпускаемой продукции
- Времени обращения товара от величины товарооборота
- Процент прироста заработной платы от уровня безработицы
- и другие...

Приведение к линейному уравнению

- Все уравнения класса 1 приводятся к линейному простой заменой объясняющих переменных:
 - парабола: $x_1 = x, x_2 = x^2$
 - гиперболола: $z = 1/x$
 - логарифмическая: $z = \ln x$
- К линейной регрессии применяется МНК для оценки параметров.

Класс 2

- Степенная
 - $y = a \cdot x^b$
- Показательная
 - $y = a \cdot b^x$
- Экспоненциальная
 - $y = e^{a+bx}$
- Логистическая
- Обратная

Степенная функция

- $y = a \cdot x^b$
- $\ln y = \ln a + b \ln x$
- Это уравнение легко приводится к линейному
- $Y = \ln y, A = \ln a, X = \ln x$
- Параметр b в степенной функции является коэффициентом эластичности: на сколько изменится результат, если фактор изменится на 1%

Эластичность

- $\mathcal{E} = f'(x) \cdot (x/y)$
- Средний коэффициент эластичности:

$$\bar{\mathcal{E}} = f'(\bar{x}) \cdot \frac{\bar{x}}{\bar{y}}$$

Средний коэффициент эластичности

Вид функции, y	Первая производная, y'	Средний коэффициент эластичности, $\bar{\varepsilon}$
$y = a + b \cdot x + \varepsilon$	b	$\frac{b \cdot \bar{x}}{a + b \cdot \bar{x}}$
$y = a + b \cdot x + c \cdot x^2 + \varepsilon$	$b + 2c \cdot x$	$\frac{(b + 2c \cdot \bar{x}) \bar{x}}{a + b \cdot \bar{x} + c \cdot \bar{x}^2}$
$y = a + \frac{b}{x} + \varepsilon$	$-\frac{b}{x^2}$	$-\frac{b}{a \cdot \bar{x} + b}$
$y = a \cdot x^b + \varepsilon$	$a \cdot b \cdot x^{b-1}$	b
$y = a \cdot b^x + \varepsilon$	$a \cdot \ln b \cdot x^{b-1}$	$\bar{x} \cdot \ln b$
$y = a + b \cdot \ln x + \varepsilon$	$\frac{b}{x}$	$\frac{b}{a + b \cdot \ln \bar{x}}$
$y = \frac{a}{1 + b \cdot e^{-cx}} + \varepsilon$	$\frac{a \cdot b \cdot c \cdot e^{-cx}}{(1 + b \cdot e^{-cx})^2}$	$\frac{b \cdot c \cdot \bar{x}}{b + e^{c\bar{x}}}$
$y = \frac{1}{a + b \cdot x} + \varepsilon$	$-\frac{b}{(a + b \cdot x)^2}$	$-\frac{b \cdot \bar{x}}{a + b \cdot \bar{x}}$

Индекс корреляции и детерминации

$$\rho_{xy} = \sqrt{1 - \frac{\sigma_{ост}^2}{\sigma_y^2}}, \sigma_y^2 = \frac{1}{n} \sum (y - \bar{y})^2, \sigma_{ост}^2 = \frac{1}{n} \sum (y - \hat{y}_x)^2,$$

$$\rho_{xy}^2 = 1 - \frac{\sigma_{ост}^2}{\sigma_y^2} = \frac{\sigma_{объясн}^2}{\sigma_y^2}, \sigma_{объясн}^2 = \frac{1}{n} \sum (\hat{y}_x - \bar{y})^2$$

$$F = \frac{\rho_{xy}^2}{1 - \rho_{xy}^2} \cdot \frac{n - m - 1}{m}$$